Množenje razlomaka

Antonija Horvatek, Ivanić Grad

U prošlom broju MiŠ-a izašao je odličan članak dr. Dubravke Glasnović Gracin pod nazivom *Razlomci – uzročnici loma u nastavi matematike*?.

Dr. Glasnović u njemu između ostaloga kaže: "U šestom razredu uče se četiri osnovne računske operacije s razlomcima. Ovdje dolazi do izražaja problem slijepog slijeđenja pravila bez razumijevanja, kako postupka, tako i pojma razlomka. Drugim riječima, na ovom se mjestu posebno pojavljuje problem rutine i ideje (tj. proceduralnog i konceptualnog znanja), pri čemu se čini da je kod razlomaka u šestom razredu ideja definitivno pala u drugi plan. Rezultati istraživanja naših udžbenika, kao i trenutno važećeg plana i programa za područje razlomaka, pokazuju da u našoj nastavi matematike dominiraju simbolički zadaci zatvorenog tipa u kojima se zahtijeva računanje s razlomcima prema određenom pravilu. Niti jedan istraženi udžbenik nije ponudio zadatak u kojem bi se tražile aktivnosti obrazlaganja, argumentiranja ili jednostavnog dokazivanja kod računskih operacija s razlomcima. Također, aktivnosti crtanja ili interpretacije nisu zastupljene u značajnijoj mjeri u zadacima istraženih udžbenika."

Ovih sam dana sa svojim šestašima završila obradu i uvježbavanje množenja i dijeljenja razlomaka, te sam nakon čitanja članka dr. Glasnović, odlučila i sama napisati članak u kojem ću opisati na koji sam način učenicima pokušala približiti što se "događa" u zadacima u kojima množimo i dijelimo razlomke.

Ovakav način rada s učenicima prirodan je nastavak načina na koji smo obrađivali razlomke u 5. razredu – uz puno crtanja/skiciranja, pojašnjavanja iste stvari na različite načine i kroz razne primjere, miješajući strogi matematički rječnik (npr. "dva cijela i jedna polovina") sa svakodnevnim ("dva i pol") itd.

Što se događa u zadatku?

I u množenju i u dijeljenju započinjemo s primjerima u kojima naglasak nije na računskom postupku, već na tome kako zamisliti što se "događa" u zadatku, te kako *logički* doći do rješenja. Tek nakon nekoliko takvih pojašnjenja postupno prelazimo na računski postupak, njegovo uvježbavanje, uočavanje nekih svojstava množenja itd.

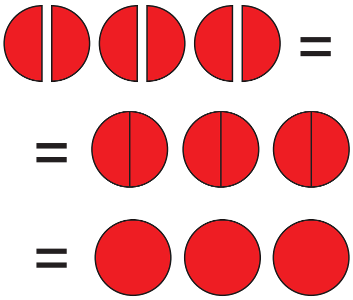
Prirodni broj puta razlomak

Primjer 1. Riješi i objasni rezultat:

a) $6 \cdot \frac{1}{2} =$

Nakon zapisivanja zadatka, od učenika očekujem da razmisle koje bi bilo rješenje i zašto. Bolji učenici obično naslute da je rješenje 3, uz obrazloženje: "Pa imamo šest puta po pola!" Prisjetimo se da iz nižih razreda znamo da je množenje zapravo uzastopno zbrajanje (npr. $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$), te isto vrijedi i ovdje, $6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Zamislimo i primjer iz života: "Imamo šest puta po pola kruha... to su zapravo tri kruha!"

Skiciramo (možemo zamišljati da su to krugovi *pizze*):



Na isti način (uzastopnim zbrajanjem) možemo riješiti bilo koji zadatak u kojem cijeli broj množimo razlomkom.

U sljedećem primjeru idemo korak dalje.

Razlomak puta prirodni broj

b) $\frac{1}{2} \cdot 6 =$

Nakon zapisa zadatka, opet od učenika očekujem da razmisle i naslute rješenje... Obično se nađe netko tko kaže da faktorima možemo zamijeniti mjesta, a umnožak se time neće promijeniti te je stoga ovaj zadatak jednak prošlom. Na pitanje otkud znaju da faktorima možemo zamijeniti mjesta, odgovor je da je tako bilo s prirodnim brojevima. Na to ih podsjetim da mnoge stvari koje su vrijedile za prirodne brojeve, za razlomke ipak ne vrijede. Međutim, ovdje su ipak u pravu – komutativnost množenja vrijedit će i dalje. Stoga zapišemo: $\frac{1}{2} \cdot 6 = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Ipak, ne zaustavljamo se na samo tom objašnjenju, već pokušavamo naći način da si pojasnimo kako razmišljati baš u zadatku $\frac{1}{2} \cdot 6$. U tu svrhu zapišemo:

$$
\begin{aligned}
3 \cdot 6 &= \\
2 \cdot 6 &= \\
1 \cdot 6 &= \\
\frac{1}{2} \cdot 6 &=
\end{aligned}
$$

Tu se prisjetimo kako "zamišljamo" zadatak $3 \cdot 6$, odnosno ponovo se prisjetimo uzastopnog zbrajanja $6 + 6 + 6$, odnosno da ovdje imamo **tri šestice**. Pritom zapišemo:

$$3 \cdot 6 = \text{tri šestice} = 18.$$

Slično tomu, u zadatku $2 \cdot 6$ imamo **dvije šestice**, a u zadatku $1 \cdot 6$ **jednu šesticu**. Kao što ćemo vidjeti, baš ti zapisi riječima "tri šestice", "dvije šestice" i "jedna šestica" dovest će nas do zaključka. Dakle, zapis koji sad imamo na ploči (i u bilježnicama) je:

$$
\begin{aligned}
3 \cdot 6 &= \text{tri šestice} = 18 \\
2 \cdot 6 &= \text{dvije šestice} = 12 \\
1 \cdot 6 &= \text{jedna šestica} = 6 \\
\frac{1}{2} \cdot 6 &=
\end{aligned}
$$

Nakon tog zapisa vratim se na prvi zadatak te pokazujući brojeve 3 i 6, naglas izgovorim "tri šestice". Zatim pokazujem brojeve 2 i 6 izgovarajući "dvije šestice", te konačno pokazujem 1 i 6 izgovarajući "jedna šestica". Nakon toga pokažem $\frac{1}{2}$ i 6, uz pitanje "A ovo je onda...?". Razredom se zaori: "Pola šestice!" Dovršimo i taj zapis:

$$\frac{1}{2} \cdot 6 = \text{pola šestice} = 3,$$

a da je pola šestice jednako 3, to je većini učenika (svakome?) jasno.

Dakle, u zadatku $6 \cdot \frac{1}{2}$ imamo "šest puta po pola", a u zadatku $\frac{1}{2} \cdot 6$ imamo "pola šestice". Rezultati su jednaki! Kako to da će zamjenom faktora rezultati uvijek biti jednaki, pojasnit ćemo kasnije...

Nadalje, upitajmo se kakvo tumačenje dobivamo ako drugi izraz, $\frac{1}{2} \cdot 6$, pokušamo protumačiti poput prvoga, $6 \cdot \frac{1}{2}$. Prisjetimo se: prvi umnožak $6 \cdot \frac{1}{2}$ tumačimo kao "šest puta po pola". Ako i $\frac{1}{2} \cdot 6$ pokušamo protumačiti na isti način, onda je to "pola puta po šest". To baš i nije uobičajeni način kako govorimo pa, ipak, razmislimo na što nas asocira "**pola** puta po šest"? Naravno, na "pola od šest". Dakle, možemo li i ovdje primijeniti onaj uobičajeni način razmišljanja koji primjenjujemo kod množenja? Možemo! Dakle, u zadatku $2 \cdot 6$ imamo"dva puta po 6", tj. "dvije šestice", a u zadatku $\frac{1}{2} \cdot 6$ imamo "pola puta po 6", tj. "pola šestice". Doduše, u $\frac{1}{2} \cdot 6$ nema uzastopnog zbrajanja, ali ako ispred drugog broja izgovorimo riječ "po", to nas navodi na smisao zadatka: "**pola** puta **po** šest" $\longrightarrow$ "pola od šest".

c) $\frac{1}{3} \cdot 6 =$

Nakon razumijevanja da je $\frac{1}{2} \cdot 6$ zapravo "pola šestice" ili "pola od šest", jasno je da je $\frac{1}{3} \cdot 6$, "trećina šestice" ili "trećina od 6". Zapisujemo $\frac{1}{3} \cdot 6 =$ trećina šestice $= \frac{1}{3}$ od $6 = 2$.

Ovdje se ujedno prisjetimo da smo zadatke tipa "$\frac{1}{3}$ od 6" ili još općenitije (kad je brojnik različit od 1), "$\frac{5}{7}$ od 42", učili rješavati u 5. razredu (zadnji smo rješavali kao $42 : 7 \cdot 5$), te da nam to znanje ovdje koristi.

Na zadatak $\frac{1}{3} \cdot 6$ prirodno se nadovezuje i zadatak $\frac{2}{3} \cdot 6$, koji možemo riješiti bilo kao "$\frac{2}{3}$ od 6", bilo koristeći se rješenjem zadatka "$\frac{1}{3}$ od 6", pa udvostručiti rezultat – rezultat je isti.

d) $\frac{1}{2} \cdot 8 =$

Nakon gornjih objašnjenja, ovo svi znaju riješiti bez problema, kao i npr. $\frac{1}{5} \cdot 10 =$.

Time smo pojasnili i množenje razlomka prirodnim brojem. Idemo dalje na množenje razlomka razlomkom.

Razlomak puta razlomak

e) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$

I ovdje, nakon zapisivanja zadatka, od učenika očekujem reakcije... Najbolji nerijetko i sami dođu do rješenja $\frac{1}{4}$, nastavljajući se na maloprijašnja razmišljanja, uz obrazloženje "pola od pola je četvrtina". Međutim, većini učenika, iako znaju da tu računamo "pola od pola", nije jasno koliko je to. Stoga nakon zapisa $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$ pola od pola, skiciramo (odnosno podebljamo rub) pola kruga  (pritom komentiramo jesmo li skicirali onaj prvi razlomak $\frac{1}{2}$ ili drugi $\frac{1}{2}$), te tih pola kruga još prepolovimo, . Na pitanje što smo dobili, većina učenika i dalje teško odgovara, za njih je jasan odgovor: "Pa dobili smo pola od pola!" Tek potpitanje *Što je obojani dio **cijelom** krugu?* ili još dodatno potpitanje *Koliko takvih dijelova trebamo da bismo prekrili cijeli krug?*, navodi većinu učenika na odgovor da je to četvrtina.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \text{pola od pola} = \frac{1}{4}$$

Ovdje je ujedno zgodno sjetiti se primjera s kruhom: ako pola kruha podijelimo još na pola, što dobivamo?

f) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} =$ trećina polovine $=$  $= \frac{1}{6}$

Ovaj primjer rješavamo slično kao prošli. Ovdje je učenicima još teže uočiti što predstavlja obojani dio u , te je ključno pitanje koje ih navodi na odgovor *Koliko takvih dijelova trebamo da popunimo cijeli krug?*. U potrazi za odgovorom, neki se dosjete da i drugu (lijevu) polovinu podijelimo na

3 jednaka dijela, te uočavamo da 6 takvih dijelova popunjava krug. A to su onda – šestine!

g) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} =$ pola od $\frac{2}{3} =$  $= \frac{1}{3}$.

Dosta trivijalno (nakon gornjih pojašnjenja), zar ne?

Računski postupak

Nakon navedenih primjera krećemo na računski postupak. Potrudim se da mi na ploči ostanu primjeri d), e) i f) (da ih ne obrišemo usput), te se vratim na primjer d). U njemu piše $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Upitam učenike mogu li iz toga naslutiti koji bi bio računski postupak, tj. kako iz $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ dobiti $\frac{1}{4}$. Naravno, odmah uoče da se jednostavno pomnože brojnici, $1 \cdot 1 = 1$, i pomnože se nazivnici, $2 \cdot 2 = 4$.

Uočimo primjer e), $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Je li i ovdje tako? Jest!

A u primjeru f), $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$? E, ovdje se na prvi pogled čini da nije. Međutim, primjenom postupka koji smo naslutili, dobivamo $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$, a budući da smo kod uvježbavanja zbrajanja i oduzimanja usvojili i sređivanje rezultata, ovdje odmah uočavamo da možemo kratiti rezultat, $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, pa dakle naslućeni postupak množenja i ovdje dovodi do točnog rezultata.

Nakon toga učenicima jednostavno kažem da se razlomci zaista i množe tako da brojnik pomnožimo brojnikom, a nazivnik nazivnikom. Sretni i zadovoljni s tim zaključkom, započinjemo s primjenom postupka:

Primjer 2. Izračunaj:

a) $\frac{15}{16} \cdot \frac{20}{21} =$

Nakon što izmnožimo brojnik brojnikom i nazivnik nazivnikom, dobivamo $\frac{300}{336}$. Ne bi to bilo preteško kad ne bi slijedilo pitanje možemo li srediti rezultat! Uočavamo djeljivost brojnika i nazivnika s 2, te skraćivanjem dobivamo $\frac{150}{168}$. Onda opet kratimo s 2 (dobivamo $\frac{75}{84}$), te konačno kratimo i s 3, pa je krajnji rezultat $\frac{25}{28}$.

$$\frac{15}{16} \cdot \frac{20}{21} = \frac{300}{336} = \frac{150}{168} = \frac{75}{84} = \frac{25}{28}$$

Nakon ovako mukotrpnog kraćenja, maloprijašnje zadovoljstvo što smo otkrili, "jednostavni recept za množenje", pretvorilo se u mučno pitanje: "Hoće li uvijek biti ovako teško?" Odgovor je: "Ako ćete raditi na ovaj način, hoće, u većini slučajeva. Ali nasreću, postoji puno jednostavniji postupak! Umjesto da prvo množimo pa tek onda kratimo, učinimo obratno, tj. prvo skratimo (dok su nam brojevi još mali), a tek onda ih pomnožimo!" Nakon te upute, isti zadatak riješimo i na taj način (uvodimo kraćenje po dijagonalama) te uočimo da smo dobili isti rezultat! Jednoglasno se složimo koji je postupak jednostavniji. Uočimo da smo i u primjeru f), $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$, mogli tako postupiti i dobili bismo isti rezultat.

Slijedi zapisivanje postupka (riječima), računski zadaci za vježbu, životni zadaci u kojima primjenjujemo taj račun, a ujedno i uočavanje nekih svojstava množenja.

Životni zadaci

Među životnim zadacima trebaju se naći i oni tipa:

1. U jednu staklenku stane $\frac{7}{10}$ litara marmelade. Koliko marmelade stane u 5 takvih staklenki?

U takvim zadacima, u pozadini je **uzastopno zbrajanje** $\frac{7}{10} + \frac{7}{10} + \frac{7}{10} + \frac{7}{10} + \frac{7}{10}$, koje kraće zapisujemo $5 \cdot \frac{7}{10}$ i rješavamo množenjem. Većina učenika to ovdje prepozna. Teži tip zadatka, koji u kontrolnom ispitu obično riješi svega nekoliko učenika, jest sljedeći:

2. U jednoj je posudi $1\frac{1}{2}$ litre mlijeka. Djeca su popila $\frac{2}{3}$ od te količine mlijeka. Koliko su mlijeka djeca popila (izraženo u litrama)? Koliko je mlijeka ostalo?

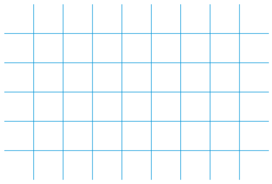
Ovdje nema uzastopnog zbrajanja, već treba uočiti da se ovdje zapravo pitamo koliko je $\frac{2}{3}$ od $1\frac{1}{2}$, a to računamo kao $\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$. Djeci su oba koraka teška – i uočiti da je riječ o "$\frac{2}{3}$ od $1\frac{1}{2}$" i sjetiti se nakon toga da takav tip zadatka rješavamo množenjem! Tu se, naravno, prisjećamo onoga što smo uočili u početnim primjerima, da riječ "od" u ovakvim zadacima označava množenje (npr. $\frac{1}{2} \cdot 6 =$ pola od 6).

Komutativnost množenja razlomaka

Pišući ovaj članak, po ne znam koji put mi je na pamet palo pitanje kako djeci vizualno predočiti da vrijedi komutativnost množenja razlomaka. Naime, $6 \cdot \frac{1}{2}$ pojasnili smo kao "šest puta po pola", a $\frac{1}{2} \cdot 6$ kao "pola od 6". Nije baš jasno zašto će oba razmišljanja dovesti do istog rezultata. U potrazi za vizualnim pojašnjenjem, prisjetila sam se kako vizualno pojašnjavamo komutativnost množenja **prirodnih brojeva**. Naravno, možemo preko površine pravokutnika ($a \cdot b = b \cdot a$, tj. površina pravokutnika dimenzija $a \times b$ bit će jednaka površini "zaokrenutog" pravokutnika čije su dimenzije $b \times a$), no mnogi se učenici "zablokiraju" kad počnemo govoriti o površinama. Dio njih stalno zaboravlja značenje samog pojma površine, zaboravljaju formule, kako smo uopće došli do tih formula (što je u pozadini) itd. Nasreću, možemo se spustiti na još nižu razinu, koja se zapravo nalazi u pozadini priče o površinama. Ovo nisam isprobala u nastavi (palo mi je na pamet za vrijeme pisanja članka), no vjerujem da bi učenici i ovo mogli shvatiti.

Dakle, kako vizualno pojasniti da vrijedi komutativnost množenja razlomaka?

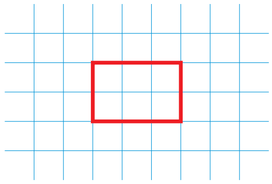
Prvo pokažemo kvadratnu mrežu (slika 1).



Slika 1.

(Možemo pripremiti materijal na projektoru koji će prikazivati isto što i sličice koje slijede, ili možda na papirima nacrtati velike slike pa ih magnetićima pričvršćivati za ploču ili skicirati na ploči. Učenici imaju kvadratnu mrežu u bilježnici pa bez problema mogu crtati.)

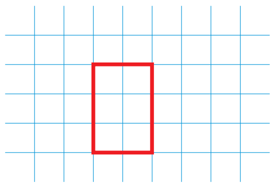
Pitamo učenike koliko kvadratića ima u pravokutniku dimenzija 3×2 (slika 2).



Slika 2.

Do odgovora lako dolazimo brojeći – ima ih 6. Nakon toga pitamo kako do tog rezultata dolazimo računski, iz brojeva 3 i 2 (dakle iz dimenzija pravokutnika). Naravno, lako uočavamo da je riječ o množenju, $3 \cdot 2$.

Nakon toga pokažemo zaokrenuti pravokutnik, čije su dimenzije 2×3 (slika 3).



Slika 3.

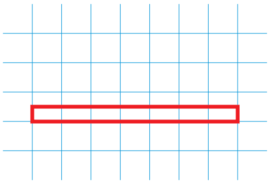
Koliko kvadratića on sadrži? Sadrži li jednako kao prošli pravokutnik? Zašto? A koji račun ovdje trebamo provesti da dobijemo taj rezultat?

Dolazimo do zaključka da se zamjenom faktora na slici događa zakretanje pravokutnika, a time se broj kvadratića unutar njega ne mijenja. Dakle, zamjenom faktora, umnožak (koji nam govori koliko kvadratića ima unutar pravokutnika) ostaje isti – vrijedi komutativnost množenja (prirodnih brojeva).

Zatražimo da netko od učenika na sličan način objasni zašto je npr. $7 \cdot 5 = 5 \cdot 7$.

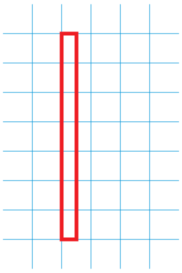
Pokušajmo slično razmišljati kad su u pitanju i razlomci:

Kako ćemo u kvadratnu mrežu ucrtati pravokutnik dimenzija $8 \times \frac{1}{2}$?



Slika 4.

A pravokutnik dimenzija $\frac{1}{2} \times 8$?



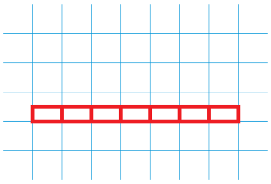
Slika 5.

Koliko prvi pravokutnik (sa slike 4) sadrži kvadratića? (Komentiramo kako to uopće izbrojiti...) A drugi (slika 5)? Je li očito da je odgovor na ta pitanja isti?

Nakon toga se pitamo dobivamo li isto rješenje ako računamo, kao u gornjim zadacima, umnožak dimenzija pravokutnika, $8 \cdot \frac{1}{2}$, odnosno $\frac{1}{2} \cdot 8$. Odgovor je, naravno, potvrdan (jednostavno izračunamo).

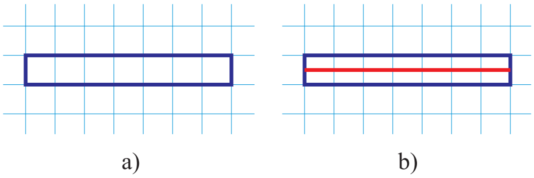
No učinimo još jedan korak dalje:

Sjetimo se kako smo protumačili što se događa u zadatku $8 \cdot \frac{1}{2}$, tj. kako ga "zamišljamo"! Tu zamišljamo "osam puta po pola". Možemo li i gledajući sliku 4, uočiti da imamo "osam puta po pola (kvadratića)"? Uočavamo (i prstom pokazujemo) polovinu po polovinu kvadratića (slika 6)...



Slika 6.

S druge strane, sjetimo se kako smo "zamišljali" zadatak $\frac{1}{2} \cdot 8$! Protumačili smo ga kao "pola od 8". Možemo li možda, gledajući istu sliku 4, uočiti da tu imamo i "pola od 8"? Možemo! Uočimo prvo pravokutnik koji se sastoji od 8 kvadratića (slika 7 a)), a zatim ga podijelimo na pola (slika 7 b))! To je "pola od 8"!



Slika 7.

Prema tome, dobivamo li isto brojeći "osam puta po pola" i "pola od osam", vrijedi li jednakost $8 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 8$?

Za one koji mogu shvatiti ovakve načine razmišljanja, možemo zadati slične zadatke za zadaću, npr.:

Zadatak:

a) Pomoću kvadratne mreže predoči množenje $3\frac{1}{2} \cdot 2$. (Nacrtaj odgovarajući sliku.)

b) Kako sa slike očitati koji je rezultat množenja? Koliki je taj rezultat?

c) Izmnoži $3\frac{1}{2} \cdot 2$ (računskim postupkom)!

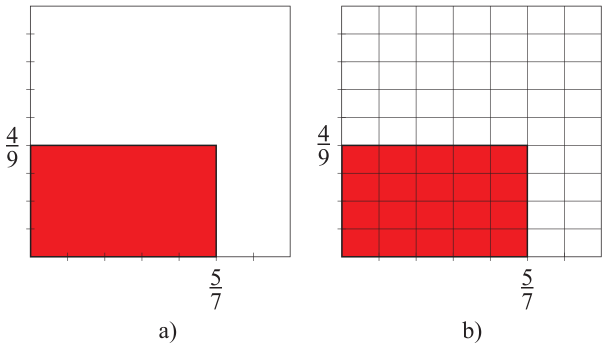
d) Usporedi rješenja b) i c) zadatka!

e) Možeš li pojasniti pokazuje li gornja slika (iz a) zadatka) koliko je "tri i pol puta po dva"? Podebljaj odgovarajuće dijelove slike (da to lakše uočimo)!

f) Ponovo nacrtaj sliku iz a) zadatka (onu početnu)! Možeš li pojasniti pokazuje li ta slika i koliko je "dva puta po tri i pol", $2 \cdot 3\frac{1}{2}$? Podebljaj odgovarajuće dijelove slike (da i to lakše uočimo)!

Naravno, slične zadatke možemo dati i s množenjem dvaju razlomaka ili razlomka i mješovitog broja, te i za usporedbu zadataka, npr. $3 \cdot 4$, $2 \cdot 4$, $1 \cdot 4$, $\frac{1}{2} \cdot 4$, $\frac{1}{3} \cdot 4, \ldots$ (jedan faktor smanjujemo, a drugi ostaje isti) itd.

Na primjeru množenja **pravih** razlomaka, npr. $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{9}$, koristeći kvadratnu mrežu, možemo lijepo pojasniti i **zašto se brojnik množi brojnikom, a nazivnik nazivnikom**. Naime, nakon predočavanja tog zadatka u kvadratnoj mreži (odnosno unutar jednog kvadrata iz te mreže, jer su razlomci pravi, slika 8 a)), i iščitavanja koji je dio kvadrata obojan (slika 8 b)), uočavamo da u nazivnik ide ukupan broj dijelova na koje je jedinični kvadrat podijeljen (a taj broj dobivamo množenjem nazivnika), dok u brojnik ide broj obojanih dijelova (a taj broj dobivamo množenjem brojnika), $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 9} = \frac{20}{63}$.



Slika 8.

Naš plan, program i udžbenici

Kao što sam već spomenula, sve što sam navela iza naslova *Komutativnost množenja razlomaka*, nisam do sad radila s učenicima. Ta su mi pojašnjenja pala na pamet dok sam pisala ovaj članak. Nisam sigurna hoću li to raditi idućih godina. Ako i hoću, to sigurno neće biti u uvodnom dijelu, jer bi time učenici previše novih načina razmišljanja morali shvatiti odjednom i bojim se da bi posljedica mogla biti da im se sve izmiješa i izgubi smisao. Možda bi se ovo moglo zgodno uklopiti negdje poslije, ili nekako drugačije iskombinirati sve izneseno u ovom članku. Problem je i vrijeme potrebno za sve to...

Kad sam na prošlom međužupanijskom stručnom skupu (Popovača, listopad 2011.) dvjema kolegicama opisivala neke od stvari koje sam opisala i u ovom članku, jedna me od njih upitala: "Pa koliko ti onda vremena potrošiš na to množenje??? Neću to valjda raditi 4 sata?!" Hoćemo? Nećemo? Odgovor prepuštam našim metodičarima i ostalim "krojačima" naših programa, kurikuluma i sl. Jer činjenica je da i kvalitetu i kvantitetu ne možemo imati, sve dok je obujam programa kakav je sad, a izvedba u okviru samo 4 sata tjedno!

I drugo, ako u udžbenicima nemamo pojašnjenja i zadatke koji prate takav način razmišljanja kod učenika, što i otkud zadavati za zadaću da bi se kod kuće obnovio i zadržao način razmišljanja koji smo postigli na satu? Ne bi li ono što nam je važno trebalo biti i dio udžbenika? Upravo je udžbenik ono po čemu velika većina nastavnika kroji svoje pripreme! Neki nastavnici čak otvoreno kažu: "Molim lijepo, ja radim po udžbeniku! Udžbenik je odobren od strane Ministarstva, pa prema tome, podrazumijeva se da djeca moraju znati ono što je u njemu! S kojim pravom bi mi netko prigovorio što ne idem izvan njega?"

S druge strane, jasno je da je mnoge od stvari koje su navedene u ovom članku, lakše pojasniti usmeno nego pismeno, te je stoga mnoga od ovih pojašnjenja teško pretočiti u jasnu pismenu formu, a pogotovo u formu jasnu djetetu od 11 godina. Rješenje se možda nazire u postojanju priručnika koje nastavnici dobivaju uz udžbenike. Prijedlozi priprema za satove koje imamo u sadašnjim priručnicima uglavnom se svode na to da se preporučuje da na satu riješimo te i te zadatke iz udžbenika, a za zadaću zadamo neke druge, uz još pokoju uputu nastavniku. Kad je riječ o složenom i teško objašnjivom gradivu (npr. gradivu iz ovog članka), priručnik bi mogao sadržavati dodatne zadatke i pojašnjenja (kakvih u udžbeniku nema), uz upute nastavniku kako ih primijeniti na satu, a u udžbeniku bi, uz primjere koje radimo na satu, mogli biti i primjeri koje učenici nakon sata kod kuće samostalno mogu proučiti i shvatiti te zadaci kakve će nakon toga znati riješiti (a koji su slični onima sa sata ili prirodna nadgradnja istih). Priručnici nisu obavezni, tj. nisu propisani kao obavezna popratna sredstva koja **moraju** biti izdana uz udžbenik, no kad već postoje, možda bi mogli ponuditi još kvalitetnija rješenja za obradu gradiva koje je teško pojasniti u samom udžbeniku.

Crtanje ili skiciranje? Krug ili pravokutnik?

Na kraju ovog članka osjećam potrebu odgovoriti na komentar jedne kolegice koja je na jednom stručnom skupu rekla da izbjegava s učenicima crtati i bojiti dijelove **kruga** jer mnoga djeca zaboravljaju donijeti šestar. Iako su i moji učenici redoviti u zaboravljanju pribora, ja ipak ne izbjegavam krug, već suprotno – u cjelinama o razlomcima najviše volim i koristim se upravo njime!

Zašto?

Pa vjerujem da će mi svatko od vas bez problema odgovoriti na pitanje koji su ovo dijelovi kruga:  ili . A možete li mi odgovoriti na pitanje koji je ovo dio pravokutnika: ? Ili koji je ovo dio čokolade:

Zadatak $6 \cdot \frac{1}{2}$ smo vrlo jednostavno predočili s . Kako to izvesti s pravokutnicima (a da bude tako jednostavno i jasno)?

Dakle, upravo je krug (a time i *pizza*, torta i sl.) u nekim slučajevima izuzetno pogodan (pogodniji od ostalih likova) za vizualno predočavanje razlomaka i raznih operacija s njima! Ali, naravno, to ne znači da ga na satu crtamo! Pa što nedostaje **skiciranju**? Dječje ruke treba navikavati i na to da bez pribora što urednije **skiciraju**, a treba razviti i **procjenu** kako povući crte ako krug želimo podijeliti na trećine, četvrtine, šestine... Možda ćemo u pokojem (rijetkom) zadatku uzeti i šestar u ruke. No onda moramo i kutomjer jer, ako je bitna preciznost kod crtanja lika, onda je valjda bitna i u podjeli? A koja će nam onda brzina rada biti (a pogotovo što je riječ tek o petom, odnosno šestom razredu) i oko čega ćemo onda sve "petljati"? Dakle, u cjelinama o razlomcima (ali i decimalnim brojevima) treba puno **skicirati i skicirati**, i to ne samo kad je u pitanju krug, već i pravokutnik...