

Zbrajanje (i oduzimanje) razlomaka

U 6. razredu učimo zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti razlomke. Oduzimanje možemo obraditi zajedno sa zbrajanjem (postupak je "gotovo isti"), dok množenje i dijeljenje zahtjevaju usvajanje „novih tehnika“. Na prvi pogled čovjek bi očekivao da će se na zbrajanje (pod zbrajanjem ću u daljnjem tekstu podrazumijevati i oduzimanje) potrošiti jednako mnogo ili **malo** više vremena nego na množenje i dijeljenje. Međutim, nije tako. Naime, osim što zbrajanje razlomaka ima nekoliko podslučajeva na koje se trebamo osvrnuti, ono je **prva** računaska operacija koju radimo, pa se vezano uz nju **prvi** put susrećemo i s pitanjem što ćemo sa zadatkom u kojem se osim razlomaka pojavljuje i mješoviti ili prirodni broj, kao i s potrebom sređivanja rezultata. Nakon što navedene slučajeve dobro razjasnimo i provježbamo vezano uz **zbrajanje**, kasnije kod množenja i dijeljenja na to se troši **puno manje** vremena.

Kratki pregled svega što vezano uz zbrajanje trebamo savladati:

1. Prvo usvajamo postupak svođenja na zajednički nazivnik (ako smo ga i ranije usvojili, sad to djeca drugačije doživljavaju jer se na drugačiji način zapisuje...); u vezi **pronalaženja najmanjeg** zajedničkog nazivnika imamo tri slučaja:
 - kad su nazivnici relativno prosti (npr. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$) – tu je najmanji zajednički nazivnik **umnožak** zadanih nazivnika
 - kad je jedan nazivnik višekratnik drugoga (npr. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$) – tu je najmanji zajednički nazivnik upravo **veći** nazivnik
 - nijedan od gornja dva slučaja (npr. $\frac{5}{6} - \frac{3}{8}$)
2. Nakon toga se trebamo naviknuti na to da nakon dobivanja rezultata razmislimo može li se on srediti, a to uključuje sljedeće (ako je moguće):
 - pretvoriti rezultat u mješoviti broj $\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{3} = \dots = \frac{25}{6} = 4 \frac{1}{6} \right)$
 - skratiti ga $\left(\frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \dots = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \right)$
 - i pretvoriti u mješoviti broj i skratiti $\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{6} = \dots = \frac{20}{6} = 3 \frac{2}{6} = 3 \frac{1}{3} \right)$
 - pretvoriti ga u prirodni broj $\left(\frac{16}{5} + \frac{8}{10} = \dots = \frac{40}{10} = 4 \right)$
3. naučiti što ćemo učiniti ako osim razlomka u zadatku imamo i prirodne i/ili mješovite brojeve (tj. podsjetiti se kako ih pretvaramo u razlomke)
4. naučiti zbrajati više razlomaka (sve možemo **odjednom** svesti na zajednički nazivnik)

5. uočiti da u nekim slučajevima do rezultata lako dolazimo napamet ako razumijemo pojam razlomka, mješovitog i prirodnog broja, te uvježbati takve račune (npr. $1 \pm \frac{4}{7}$, $5 \pm \frac{3}{8}$, $5 \frac{1}{4} \pm 3$, $10 \pm 7 \frac{1}{5}$, $6 \frac{5}{9} \pm \frac{4}{9}$, $4 \frac{3}{7} \pm 1 \frac{2}{7} \dots$)

Evo i zadataka za obradu i uvježbavanje (navodim ih onim redom kojim ih možemo rješavati na satu):

Zbrajanje i oduzimanje razlomaka

Primjer 1.: Izračunaj:

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$

b) $\frac{11}{5} - \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

Razlomke jednakih nazivnika zbrajamo (oduzimamo) tako da brojnike zbrojimo (oduzmemo), a nazivnik prepisemo.

c) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} - \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$

Primjer 2.: Izračunaj:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15} \quad \text{ili} \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$$

Kako biste vi ovo izračunali? Ima li tko kakvu ideju?...

Gore smo vidjeli da je jednostavno zbrojiti razlomke koji imaju jednake nazivnike. Možemo li „nariktati“ da i ovi razlomci imaju jednake nazivnike?...

Da, prošlih smo sati učili **svoditi** razlomke na zajednički nazivnik. To ćemo učiniti i ovdje, samo će nam zapis biti malo drugačiji...

Koji bi tu bio zajednički nazivnik? 15.

Kako ono računamo pripadne brojnike?... S kojim brojem moramo pomnožiti 3 da dobijemo 15, s tim brojem moramo pomnožiti i 2 (pripadni brojnik) da dobijemo odgovarajući (novi) brojnik...

(Kasnije dolazimo do toga da možemo računati i kao $15 : 3 \cdot 2...$)

Razlomke različitih nazivnika zbrajamo (oduzimamo) tako da ih najprije svedemo na zajednički nazivnik, a zatim zbrojimo (oduzmemo) na gore opisani način.

Ovdje s vama (učiteljima) želim podijeliti i ideju kako **napamet** možemo pronalaziti **najmanji zajednički nazivnik** (odnosno najmanji zajednički višekratnik zadanih nazivnika) u slučajevima kad imamo (relativno) male brojeve:

1. uočimo koji je od zadanih brojeva (nazivnika) veći
2. redom nabrajamo njegove višekratnike i za svakog se pitajmo da li je on djeljiv i s drugim brojem (nazivnikom), tj. da li je on i njegov višekratnik

Prvi na kojeg tako *naidemo* je upravo **najmanji zajednički višekratnik/nazivnik** – broj kojeg tražimo !

Taj postupak učenici bi trebali dobro savladati prije nego što krenemo na zbrajanje razlomaka – još u 5. razredu kod pronalaženja najmanjeg zajedničkog višekratnika i u 6. razredu kod svođenja na zajednički nazivnik.

Bilo bi dobro istaknuti još i to da u slučaju kad su brojevi relativno prosti, NZV dobivamo množenjem. No, većina učenika ima problema sa razmišljanjem i pamćenjem toga kakvi su to relativno prosti brojevi... Ipak, zbog boljih učenika treba i to istaknuti...

Kroz sljedećih nekoliko zadataka cilj nam je postići sigurnost u pronalaženju najmanjeg zajedničkog nazivnika te izračunavanju odgovarajućih brojnika...

1.) Izračunaj:

a) $\frac{4}{7} + \frac{3}{2} = \frac{8+21}{14} = \frac{29}{14}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{4+1}{8} = \frac{5}{8}$

c) $\frac{11}{12} - \frac{1}{3} = \frac{11-4}{12} = \frac{7}{12}$

d) $\frac{1}{6} + \frac{5}{8} = \frac{4+15}{24} = \frac{19}{24}$

e) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{15+8}{20} = \frac{23}{20}$

f) $\frac{11}{9} - \frac{5}{6} = \frac{22-15}{18} = \frac{7}{18}$

g) $\frac{9}{10} - \frac{4}{15} = \frac{27-8}{30} = \frac{19}{30}$

h) $\frac{3}{8} + \frac{2}{9} = \frac{27+16}{72} = \frac{43}{72}$

i) $\frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \frac{8-1}{12} = \frac{7}{12}$

j) $\frac{5}{12} + \frac{3}{8} = \frac{10+9}{24} = \frac{19}{24}$

2.) Ivo je pojeo $\frac{5}{8}$, a Marica $\frac{1}{3}$ torte.

a) Jesu li zajedno pojeli cijelu tortu?

$$\frac{5}{8} + \frac{1}{3} = \frac{15+8}{24} = \frac{23}{24}$$

Ne, nisu pojeli cijelu tortu.

b) Koliko im je torte još preostalo?

c) Tko je pojeo više torte?

d) Za koliko?

U 1. zadatku smo uvježbali postupak zbrajanja i oduzimanja razlomaka. No, tad uopće nismo obraćali pažnju na to kakav nam je rezultat ni da li bi se on možda mogao napisati u nekom jasnijem (boljem) obliku. Npr. bi li se rezultat $\frac{23}{20}$ mogao jasnije zapisati? Kako?... A ako bismo dobili rezultat $\frac{8}{2}$?... A ako bismo dobili $\frac{6}{8}$?... U idućem ćemo zadatku osim zbrajanja i oduzimanja vježbati i sređivanje rezultata:

3.) Izračunaj i ako je moguće dobiveni rezultat pretvori u mješoviti broj, odnosno skрати:

$$a) \frac{5}{2} + \frac{7}{3} = \frac{15+14}{6} = \frac{29}{6} = 4 \frac{5}{6}$$

$$g) \frac{5}{2} + \frac{5}{6} = \frac{15+5}{6} = \frac{20}{6} = 3 \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{3}} = 3 \frac{1}{3}$$

$$b) \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \frac{7-3}{12} = \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{12}_3} = \frac{1}{3}$$

2. način rješavanja istog zadatka:

$$c) \frac{10}{7} - \frac{1}{3} = \frac{30-7}{21} = \frac{23}{21} = 1 \frac{2}{21}$$

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{6} = \frac{15+5}{6} = \frac{\cancel{20}^{10}}{\cancel{6}_3} = \frac{10}{3} = 3 \frac{1}{3}$$

$$d) \frac{5}{6} - \frac{1}{18} = \frac{15-1}{18} = \frac{\cancel{14}^7}{\cancel{18}_9} = \frac{7}{9}$$

$$e) \frac{7}{9} + \frac{4}{18} = \frac{14+4}{18} = \frac{18}{18} = 1$$

Uočimo da ponekad možemo i pretvoriti u mješoviti broj i kratiti! Pritom je svejedno koje ćemo od toga prije napraviti – u oba slučaja rezultat je isti!!!

Uočimo: Ako se brojnik može podijeliti s nazivnikom bez ostatka, rezultat je prirodan broj. A ako kod dijeljenja imamo ostatak, rezultat je mješoviti broj! (Naravno, oboje vrijedi ako je brojnik veći ili jednak nazivniku.)

$$h) \frac{10}{3} - \frac{11}{6} = \frac{20-11}{6} = \frac{9}{6} = 1 \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{2}} = 1 \frac{1}{2}$$

$$i) \frac{24}{5} - \frac{8}{10} = \frac{48-8}{10} = \frac{40}{10} = 4$$

$$f) \frac{11}{4} + \frac{2}{8} = \frac{22+2}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

$$j) \frac{17}{56} + \frac{1}{8} = \frac{17+7}{56} = \frac{\cancel{24}^3}{\cancel{56}_7} = \frac{3}{7}$$

Zapamtimo!

Ako je brojnik **veći** ili jednak nazivniku, taj se razlomak može pretvoriti u mješoviti ili u prirodni broj (ovisi imamo li ili nemamo ostatak kod dijeljenja).

$$k) \frac{9}{4} + \frac{8}{5} = \frac{45+32}{20} = \frac{77}{20} = 3 \frac{17}{20}$$

$$l) \frac{8}{15} + \frac{2}{3} = \frac{8+10}{15} = \frac{18}{15} = 1 \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{15}_5} = 1 \frac{1}{5}$$

Kad god se može, rezultat treba srediti, što znači:

- skratiti ga
- pretvoriti ga u mješoviti broj
- i pretvoriti ga u mješoviti broj i skratiti
- pretvoriti ga u prirodni broj
(ovisno o tome što se može).

Slijede zadaci u kojima se osim razlomaka pojavljuju i još neki brojevi...
Što ćemo s njima?...

2.) Izračunaj:

$$\text{a) } \frac{2}{5} + \frac{3}{1} = \frac{2+15}{5} = \frac{17}{5} = 3 \frac{2}{5}$$

Prirodni broj pretvorimo u razlomak, pa dalje računamo kako smo dosad naučili i uvježbali...
Kako se prirodan broj pretvara u razlomak?

$$\text{b) } \frac{4}{1} + \frac{9}{7} = \frac{28+9}{7} = \frac{37}{7} = 5 \frac{2}{7}$$

Uočimo zadane brojeve u **a)** zadatku i rezultat. Uočavate li vezu? (Jesmo li do rezultata mogli odmah doći, bez posebnog računskog postupka)?
Je li tako i u **b)** zadatku? Možete li dokučiti **zašto nije**?
Dakle, u kojim slučajevima **odmah** možemo zaključiti koji je rezultat?...
Da vidimo što je s oduzimanjem...

$$\text{c) } \frac{5}{2} - \frac{2}{1} = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \frac{18}{12} - \frac{1}{1} = \frac{18-12}{12} = \frac{\cancel{6}^1}{\cancel{12}_2} = \frac{1}{2}$$

3.) Izračunaj:

$$a) 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{10} = \frac{9}{4} + \frac{31}{10} = \frac{45 + 62}{20} = \frac{107}{20} = 5\frac{7}{20}$$

$$b) 2\frac{2}{3} - 1\frac{5}{12} = \frac{8}{3} - \frac{17}{12} = \frac{32 - 17}{12} = \frac{15}{12} = 1\frac{1}{4}$$

$$c) 1\frac{4}{5} - \frac{5}{6} = \frac{9}{5} - \frac{5}{6} = \frac{54 - 25}{30} = \frac{29}{30}$$

$$d) \frac{4}{14} + 1\frac{5}{7} = \frac{4}{14} + \frac{12}{7} = \frac{4 + 24}{14} = \frac{28}{14} = 2$$

$$e) 2\frac{1}{7} - \frac{13}{42} = \frac{15}{7} - \frac{13}{42} = \frac{90 - 13}{42} = \frac{77}{42} = 1\frac{5}{6}$$

$$f) 10\frac{8}{9} - 3\frac{4}{9} = \frac{98}{9} - \frac{31}{9} = \frac{67}{9} = 7\frac{4}{9}$$

4.) Izračunaj:

$$a) 3 + 2\frac{1}{7} = \frac{3}{1} + \frac{15}{7} = \frac{21 + 15}{7} = \frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}$$

$$b) 5\frac{2}{9} + 6 = \frac{47}{9} + \frac{6}{1} = \frac{47 + 54}{9} = \frac{101}{9} = 11\frac{2}{9}$$

$$c) 4 - 2\frac{1}{7} = \frac{4}{1} - \frac{15}{7} = \frac{28 - 15}{7} = \frac{13}{7} = 1\frac{6}{7}$$

$$d) 8\frac{2}{5} - 1 = \frac{42}{5} - \frac{1}{1} = \frac{42 - 5}{5} = \frac{37}{5} = 7\frac{2}{5}$$

Prije nego što nastavimo rješavati ovakve zadatke (u kojima imamo prirodan i mješoviti broj), uočimo da u **nekima** od njih do rezultata možemo doći odmah napamet! U kojima?
Ako razumiješ račun napamet, možeš ga koristiti i u sljedećim zadacima (u kojima se on može koristiti)...
(Ali ako nisi siguran, radije uvijek koristi dulji postupak.)

$$e) 2 + 7\frac{1}{3} = 9\frac{1}{3}$$

$$f) 4\frac{3}{11} + 8 = 12\frac{3}{11}$$

$$g) 5\frac{3}{8} - 4 = 1\frac{3}{8}$$

$$h) 8 - 2\frac{5}{6} = \frac{8}{1} - \frac{17}{6} = \frac{48 - 17}{6} = \frac{31}{6} = 5\frac{1}{6}$$

5.) Izračunaj (možeš i na lakši način):

$$\begin{aligned} a) 25\frac{1}{3} + 36\frac{4}{5} &= (25 + 36) + \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) = \\ &= 61 + \frac{5 + 12}{15} = \\ &= 61 + \frac{17}{15} = \\ &= 61 + 1\frac{2}{15} = \\ &= 62\frac{2}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) 12\frac{3}{8} + 11\frac{1}{6} &= (12 + 11) + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{6}\right) = \\ &= 23 + \frac{9 + 4}{24} = \\ &= 23 + \frac{13}{24} = \\ &= 23\frac{13}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) 15\frac{2}{3} + 6\frac{2}{6} &= (15 + 6) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{6}\right) = \\ &= 21 + \frac{4 + 2}{6} = \\ &= 21 + \frac{6}{6} = \\ &= 21 + 1 \\ &= 22 \end{aligned}$$

6.) Izračunaj:

$$a) \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{6 + 10 + 9}{12} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$$

$$b) \frac{3}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{18 - 5 + 15}{30} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Uočimo da u svim ovim zadacima (u 5. a, b i c) imamo **zbrajanje!**

Ako bismo **oduzimali** dva mješovita broja, tada bi najsigurnije bilo računati kao što smo računali u 3. zadatku (pretvoriti mješovite brojeve u razlomke...), jer je tada račun sparivanjem (cijelih sa cijelim dijelom, a razlomka sa razlomkom) složeniji...

$$c) \frac{2}{3} + 2 + \frac{5}{2} - \frac{11}{6} = \frac{4 + 12 + 15 - 11}{6} = \frac{20}{6} = 3 \frac{2}{3} = 3 \frac{1}{3}$$

$$d) 1 \frac{9}{10} - \frac{2}{3} - 1 - \frac{1}{15} = \frac{19}{10} - \frac{2}{3} - \frac{1}{15} = \frac{57 - 20 - 30 - 2}{30} = \frac{1}{30} = \frac{1}{30}$$

$$e) \frac{5}{9} + \frac{3}{10} - \frac{77}{90} + 2 = \frac{50 + 27 - 77 + 180}{90} = \frac{180}{90} = 2$$

7.) Vlado je pojeo $\frac{3}{16}$, Ivica $\frac{1}{4}$, a Mario $\frac{3}{8}$ bombonijere. Koji dio bombonijere je preostao za njihovu sestricu?

$$\frac{3}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{3 + 4 + 6}{16} = \frac{13}{16}$$

Pojeli su $\frac{13}{16}$ bombonijere, pa su za njihovu sestricu ostale $\frac{3}{16}$ bombonijere.

8.) Slavko je ubrao $12 \frac{3}{4}$ kg, Marko $16 \frac{1}{2}$ kg, Josip $20 \frac{3}{10}$ kg, a Nikola 17 kg jabuka.

Koliko su kilograma jabuka zajedno ubrali?

$$\begin{aligned} 12 \frac{3}{4} + 16 \frac{1}{2} + 20 \frac{3}{10} + 17 &= (12 + 16 + 20 + 17) + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \right) = \\ &= 65 + \frac{15 + 10 + 6}{20} = \\ &= 65 + \frac{31}{20} = \\ &= 65 + 1 \frac{11}{20} = \\ &= 66 \frac{11}{20} \end{aligned}$$

Zajedno su ubrali $66 \frac{11}{20}$ kg jabuka.

Nakon uvježbavanja navedenih pismenih postupaka možemo neko vrijeme posvetiti i uočavanju u kojim (još) slučajevima možemo računati napamet, te kako tada računamo. U tu svrhu možemo (pomoću projektor) iskoristiti i Sketchpad datoteku "Razlomci-racunanje napamet.gsp" koja slikovito prikazuje što se u takvim zadacima događa, tj. kako u njima trebamo razmišljati (a možete je naći na <http://public.carnet.hr/~ahorvate>).