

Pojam funkcije – uvod

Jednom smo
na diskusijskoj listi nastavnika matematike
razgovarali o tome
kako mi u osnovnoj školi
uvodimo pojam funkcije –
da li govorimo samo o linearnoj funkciji
ili prvo uvodimo općenito pojam funkcije;
da li krećemo s konkretnim životnim primjerima
ili od apstraktne matematičke definicije;
koliko je to učenicima uopće jasno / blisko
(a pogotovo ako to radimo samo
na apstraktnom nivou ili
vezano samo uz linearnu funkciju)

...

U okviru te rasprave
opisala sam kako ja objašnjavam pojam funkcije –
kroz životne primjere,
postepeno uvodeći nove pojmove
i simbolički zapis vezan uz njih

...

Ovdje je sadržaj te moje poruke.
To je pisano oko 2005. godine.

Antonija Horvatek

Matematika na dlanu

<http://www.antonija-horvatek.from.hr/>

Ela Rac - Marinić - Kragić pita:

> Pitanje profesorima u osnovnoj - da li uvodite općenito pojam funkcije (npr.
> funkcija koja ucenicima 1.D razreda pridružuje ocjenu iz matematike na
> polugodistu, i sl...). Da li oni takve primjere ikada rade. Zatim da li
> prelaze na formalni zapis funkcije formulom. Da li im se to objašnjava?

Moj odgovor:

U udzbenicima takvih primjera, koliko sam ja vidjela, nema (mislim na ono da su do kraja lijepo razradjeni).
A ja funkciju uvodim upravo ovako kako si ti navela, a jedan mi se primjer (o cijenama proizvoda) poklapa bas sa Zeljkinim. :-)

Ne bih ja bila ja kad se sad ne bih raspisala o tome kako radim :-)

Naslov je "Pojam funkcije", a uvodna prica glasi ovako:

Funkcija je pravilo koje jednim velicinama pridružuje neke druge velicine (nemojte se sad uloviti za to da može pridruživati i te iste velicine, to sad zbilja nije bitno). Npr. svakom uceniku ovog razreda možemo pridružiti njegovu visinu. Dakle, mogla bih na papir u jedan stupac zapisati imena svih vas, zatim svakog od vas izmjeriti, i pored svakog imena napisati visinu. Time bih SVAKOM UCENIKU (tj. njegovom imenu) PRIDRUŽILA TOČNO JEDAN BROJ (koji predstavlja njegovu visinu). Dakle, to bi bila FUNKCIJA jer NECEMU (ucenicima) PRIDRUŽUJEMO NESTO (njihove visine).

Drugi primjer funkcije bio bi sljedeći: Zamislimo da odemo u trgovinu, na papir zapisemo SVE proizvode koji se prodaju u njoj, a zatim pored svakog proizvoda napisemo njegovu cijenu.
U tom bismo primjeru opet imali PRIDRUŽIVANJE tj. FUNKCIJU: svakom proizvodu bismo pridružili broj koji predstavlja njegovu cijenu.

Nadalje, mogli bismo svakom uceniku pridružiti njegovu tezinu, ocjenu s kojom je prošle godine prošao iz matematike, koliko godina ima, koliko braca ima, boju ociju..., svakom satu juceršnjeg dana mogli bismo pridružiti temperaturu koju smo izmjerili u tom satu, svakom datumu ovog mjeseca koji je dan u tjednu, svakoj godini broj stanovnika (kad bismo ga znali :-)), svakom covjeku u kojem je mjestu rođen ili datum rođenja...

U svim tim pridruživanjima, tj. funkcijama bitno je uociti TRI "STVARI" koje "ih cine", tj. s kojima su zadani:
Vratimo se na 1. primjer u kojem smo svima vama pridruživali visinu - u njemu zapravo imamo 3 bitne "stvari":

Prvo: imamo popis ucenika - tu se radi TOČNO O ONIM UCENICIMA KOJI CINE OVAJ RAZRED. Svi ti ucenici cine takozvanu DOMENU. Dakle, domenu cine SVI ONI KOJIMA NESTO PRIDRUŽUJEMO.

Drugo: Sto pridružujemo tim ucenicima, tj. vama? Visine. Dakle, tu je popis brojeva KOJE vam PRIDRUŽUJEMO. Ti brojevi tj. visine cine KODOMENU. Dakle, u kodomeni je ono STO SE PRIDRUŽUJE.

Trece: Dakle, imamo domenu (nju cine ucenici kojima pridruzujemo visine) i kodomenu (nju cine visine koje pridruzujemo ucenicima). A da li je SVEJEDNO kojem cu uceniku pridruziti KOJU visinu, tj. kraj kojeg cu imena zapisati koji broj? NIJE! E to je treca bitna stvar - PROPIS ili PRAVILO po kojem svakom uceniku s popisa pridruzujem TOCNO ODREDJENI BROJ, tj. BAS NJEGOVU VISINU!

Dakle, bitno je:

1. koje ucenike imam - oni cine domenu
2. sto im pridruzujem - visine - one cine kodomenu
3. PRAVILO KAKO pridruzujem - svakom uceniku BAS NJEGOVU visinu!

Dakle:

U ovom primjeru, funkcija je pravilo ili postupak po kojem svakom uceniku iz domene, tj. svakom elementu domene pridruzujemo točno njegovu visinu, tj. točno jedan element kodomene.

Istu pricu ispricam (skroz od pocetka) i u vezi proizvoda i njihovih cijena. Mnoge stvari ponovim vise puta, i pricam polako da bi mogli lakse pratiti o cemu ja to i kud nas to vodi...

Nakon toga kazem da cemo u sljedecoj definiciji domenu oznaciti s D , a kodomenu s K , pa zapisemo:

"Funkcija iz skupa D u skup K je pravilo ili postupak po kojem se SVAKOM elementu skupa D pridruzuje TOCNO JEDAN element skupa K .

D - domena funkcije

K - kodomena funkcije

$f : D \rightarrow K$ citamo: funkcija f ide sa skupa D u skup K

f, g, h, \dots - ime funkcije (moze biti bilo koje slovo)"

Nakon toga nastavljam filozofiranje :-):

(ja sarigam po ploci, a ucenici nista ne zapisuju)

Eh, matematicari ne bi bili matematicari kad bi se zadržali na funkcijama koje ucenicima pridruzuju njihove visine, proizvodima njihove cijene itd.

Matematicari vole brojeve!

Pa tako vole jednim brojevima pridruzivati druge brojeve!

Npr. SVAKOM broju mozemo pridruziti DVOSTRUKI broj. Takvo

pridruzivanje bi broju 5 pridruzilo broj - ?

Ucenici: 10

A broju 7? ... A broju 3?...

Nakon prva dva primjera (za 5 i 7) ovaj treci zapisem i na ploču, tj. napisem

3 i kraj njega onu strelicu s uspravnom crticom na pocetku,

pa 6. Isto tako za jos dva primjera.

A onda kazem:

Nekako bismo trebali i zapisati sto ova funkcija radi, tj. to da ona svakom broju pridruzuje DVOSTRUKI broj. Mogli bismo rijecima napisati npr. "Ova funkcija svakom broju pridruzuje dvostruki broj.". Ali to je neprakticno, matematicari su smislili PUUUNO kraci zapis, evo ga (iznad napisanih primjera zapisem):

" $f(x) = 2 \cdot x$ "

Promotrimo malo ovaj zapis. Uočimo prvo ovaj x u zagradi: on nam predstavlja bilo koji broj s kojim nešto trebamo napraviti. A ono IZA ZNAKA "=" nam govori STO s njime trebamo napraviti, pomnožiti ga s 2. Nadalje, f je ime funkcije, a mogla bi se zvati i g i h ili bilo kako (ja sam u ovom primjeru izabrala $bas\ f$), a iza f se u zagradi uvijek zapisuje ovaj x koji predstavlja bilo koji broj s kojim nešto trebamo napraviti (a trebamo napraviti ono što piše iza jednako). I to je to!

Tu pričam pričam POLAKO (jer je sve to novo i jako apstraktno), i ispričam je DVA puta (iz istog razloga). Učenici pri tom ništa ne pišu, samo prate što pričam. A onda nastavljamo:

Naravno, funkcija ne mora bas uvijek brojevima pridruživati bas njihove dvostruke vrijednosti! Npr. neka druga funkcija bi mogla svakom broju pridružiti taj broj UMANJEN ZA 3. Što bi ona pridružila broju 5? A broju 10? A broju 1? A broju -4 ?...
(Ponovo zapisujem na ploči ponovo strelice, nakon čega dodjemo do zapisa $g(x)=x-3$, na isti način kao i kod $f(x)=2x$.)

A onda kažem:

Nismo li nešto zaboravili?

Sa čime je zadana funkcija osim s pravilom? Što ono čini domenu? - Svi brojevi kojima nešto pridružujemo. - A kodomenu? - Svi oni koje pridružujemo. - Ali o tome ništa nismo rekli u vezi ovih naših funkcija f i g ! Ajmo i to iskristalizirati! :-)

Funkcija f brojevima pridružuje dvostruke brojeve. Recimo da MENE zanima SAMO PRVIH DESET BROJEVA, tj. brojevi od 1 do 10. Dakle, od čega se sastoji moja domena?... A kodomena?... E, to ćemo zapisati ovako (iznad $f(x)=2 \cdot x$ zapisem):

$f : \{1, 2, 3, \dots, 10\} \rightarrow \mathbb{N}$

Pa objasnimo svaki detalj, i to da se za kodomenu može uzeti "siri" skup od onoga kojeg čine pridružene vrijednosti.

A za funkciju g zapisem:

$g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

pa i to razjasnimo.

A onda krenemo na primjere i zadatke koje zapisujemo i na ploču i u bilježnice (gornje primjere samo samo ja na ploču):

Primjer 1:

Odredi sve vrijednosti koje poprima funkcija f ako je ona zadana s:

$f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{N}$

$f(x) = 5x$

Svaki detalj gornjeg zapisa razjasnimo i ta objašnjenja zapisemo u bilježnice/na ploču. Npr. crveno zaokružimo " f " i iznad njega napisemo "IME FUNKCIJE", pa zaokružimo " $\{1, 2, 3\}$ " i zapisemo "DOMENA", pa " \mathbb{N} " - "KODOMENA", pa " $f(x)=5x$ " - "PRAVILO ILI PROPIS po kojem svakom elementu domene (tj. brojevima 1, 2, 3) pridružujemo neki element iz kodomene (iz \mathbb{N})"

A nakon toga krenemo računati:

$f(1) = 5 \cdot 1 = 5$

$f(2) = 5 \cdot 2 = 10$

...

U sljedećim primjerima imamo funkcije:

$$f : \{-3, -1, 5\} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$f(x) = -2x - 4$$

$$g : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$g(x) = 2x + 1$$

...

$$f(x) = -x - 6$$

...
pa ubacim zavrzlake s predznacima, s razlomcima, pa nakon jednostavnijih funkcija zadam i:

$$h(x) = x^2 - 3x - 5,$$

$$k(x) = \frac{3}{x} - x$$

...

Ode mi na to 2-3 sata.

Rezultate prikazujemo i tablicno. Ne bi bilo lose ni graficki, ali otkud da si uzmem vrijeme jos i za to? :-)

A onda tek krenemo na linearne funkcije.

Antonija