<u>Dodatna nastava - 8. razred</u>

Materijal za samoučenje

Ovo je materijal kojeg sam
prije nekoliko godina (više od desetak)
napravila za učenike osmog razreda
koji su se željeli pripremati za natjecanje
iako nismo imali dodatnu nastavu.
Dakle, trudila sam se pripremiti materijal
pomoću kojeg će **samostalno** moći naučiti rješavati
složenije zadatke od onih sa redovne nastave,
a kakvi se mogu pojaviti na natjecanju.
Zbog toga se tu osim samih zadataka
nalaze i mnoga objašnjenja i primjeri
pisani što jednostavnijim jezikom.

Pri izradi sam kao izvor zadataka i ideja
koristila zbirke zadataka za 1. razred srednje
i za 8. razred osnovne škole
(ne sjećam se više točno o kojim se zbirkama radi).

Nemam vremena za pretipkavanje zadataka,
pa sam skenirala i objavljujem u tom obliku.
Skenovi nisu najuredniji
(papiri koje sad imam su fotokopije
koje su uzastopnim kopiranjem izgubile
kvalitetu, oštrinu, urednost...),
a i danas bih mnoge stvari napravila drugačije...
No, možda će nekom materijali dobro doći,
a pogotovo u slučajevima kad se učenici
žele pripremati za natjecanje,
a nemaju dodatnu nastavu.

U ovom su materijalu obuhvaćena sljedeća područja:
faktorizacija algebarskih izraza (na razne načine),
Vietove formule,
skraćivanje algebarskih razlomaka,
potencije.

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate/

POD-178

AH

Osnovni pojmovi

Brojevni izrazi su izrazi u kojima se pojavljuju brojevi, te znakovi računskih operacija i zagrade (npr. $2+3$, $4-5\cdot\frac{3}{10}$, $-(2-6)+8\ldots$)

Algebarski izrazi su izrazi u kojima se pojavljuju brojevi i slova, te znakovi računskih operacija i zagrade (npr. $2x-3$, $5\cdot(a+7)\ldots$)

Monomi su jednočlani algebarski izrazi.
Npr. x, $2a$, $7b$, $\frac{1}{3}c$, $5xy$, $0.4a^2bc^3\ldots$
U njima nema zbrajanja niti oduzimanja.

Binomi su dvočlani algebarski izrazi.
Npr. $x+y$, $a+b$, $2x+3$, $3b-c^2$, $\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}y^2\ldots$
Dakle, binom je zbroj (razlika) dvaju monoma.

Trinomi su tročlani algebarski izrazi.
Npr. $x+y+z$, $2a+3b+c$, $\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}x^2-5\ldots$
Dakle, trinom je zbroj (razlika) triju monoma.

Općenito višečlani algebarski izraz je zbroj (razlika) dvaju ili više monoma. Npr. $3a-\frac{2}{3}ab+4c-\frac{1}{2}abc+b$.

Algebarski izrazi

1) Reduciraj:

a) $\frac{3}{7}ab+\frac{1}{2}cd-\frac{2}{3}ab-\frac{5}{6}cd+\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}cd=$

b) $(4a-9)-(8a+3)-(-2a-7)+(-3a+6)=$

c) $-(5ab+7a-8b)+(-2ab-3a+4b)-(-2ab+3a+4b)=$

d) $8a-\{2b+(3a+4b)-[2a-(7b+3a)]-4b\}=$

e) $-\{9x-[4y+(7-x)-(2+3y)]+(-9x-3)-8y\}$

f) $0.1x-\{0.01x+[0.03y-(0.02x-0.07y)+0.05y]\}=$

g) $-(0.1ab-2.5)-\{-(2.3ab-3.9)-[0.3ab-(ab-0.7)]\}=$

(Rj. a) $\frac{11}{42}ab+\frac{1}{3}cd$, b) $-5a+1$, c) $-5ab-13a+8b$,
d) $4a-9b$, e) $-x+9y+8$, f) $0.11x-0.15y$, g) $1.5ab-0.7$)

2) Za koju vrijednost od x će razlika razlomaka $\frac{18x+2}{x-4}$ i $\frac{15x+1}{x+5}$ biti jednaka 3 ?

(Rj. $x=-\frac{1}{2}$)

3) Postoji li y za koji će zbroj razlomaka $\frac{1}{y-3}$ i $\frac{4}{y+1}$ biti jednak njegovom umnošku?

(Rj. Rješavajući jednadžbu $\frac{1}{y-3}+\frac{4}{y+1}=\frac{1}{y-3}\cdot\frac{4}{y+1}$ dolazimo do rješenja $y=3$. Međutim, ako to rješenje uvstimo u prvi razlomak, u nazivniku dobivamo nulu, što ne može biti. Dakle, ne postoji traženi broj y.)

4) Odredi brojeve m i n tako da vrijedi:

a) $x^2-5x+6=(mx+n)\cdot(x+3)$

b) $x^2-5x+6=(mx+n)\cdot(x-3)$

c) $x^2-5x+6=(mx-2)\cdot(x+n)$

d) $x^2-5x+6=(mx-2)\cdot(x-n)$

(Rj. a) $m=1, n=2$, b) $m=1, n=-2$, c) $m=1, n=-3$, d) $m=1, n=3$)

5) Četvorica prijatelja rješavala su zadatak: „Razlomak $\frac{x^2+7x-25}{x-5}$ prikaži kao zbroj." Njihovi odgovori su bili:

1. $x+5+\frac{7x}{x-5}$
3. $x^2-x+\frac{2x-25}{x-5}$
2. $x+\frac{12x-25}{x-5}$
4. $x+12+\frac{35}{x-5}$

Koji je od njih točan?

(Rj. Točni su 1., 2. i 4. odgovor.)

6) Odredi brojeve a i b tako da vrijedi:

a) $2ax+b=(3+a)\cdot(x+5)$
b) $ax+b=(2b+3)\cdot(3x+5)$
c) $2x+3a=a\cdot(x+b)+bx$

(Rj. a) $a=3, b=30$; b) $a=-1, b=\frac{-5}{3}$; c) $a=-1, b=3$)
(Uputa: koeficijenti uz x na lijevoj i desnoj strani moraju biti jednaki i slobodni koeficijenti na lijevoj i desnoj strani moraju biti jednaki.)

7) Oduzmi:

a) x^2-3x-5 od $2x^2-6x-5$
b) $2y^2-6y+1$ od y^2-6y-1
c) x^2-2x od $2x^2-7x-5$
d) $2m+8$ od m^2-m-7

(Rj. a) x^2-3x; b) $-y^2-2$; c) x^2-5x-5; d) $m^2-3m-15$)

8) Oduzmi zbroj drugih dvaju algebarskih izraza od zbroja prvih dvaju: $2x^2-4xy+y^2$; $3xy-y^2$; $x^2-2xy-y^2$; $-x^2+3xy-2y^2$.

(Rj. $2x^2+3y^2-2xy$)

9) Umnožak izraza $x+y$ i $y-7x$ oduzmi od razlike izraza y^2-xy i $5xy+7x^2$.

(Rj. 0)

Faktorizirati neki izraz znači napisati ga u obliku umnoška (faktori su brojevi koji se množe).
Faktoriziranje se često izvodi izlučivanjem zajedničkog faktora.
Npr. u izrazu $5ab-10b^2$ zajednički faktor u oba pribrojnika je $5b$, pa njega pišemo ispred zagrade:
$5ab-10b^2=5b\cdot(a-2b)$.
Time smo izraz $5ab-10b^2$ faktorizirali jer smo ga napisali kao umnožak $5b$ i $(a-2b)$.
U sljedećem zadatku zajednički faktor je već izlučen, a ti odredi sadržaj zagrade.

10) Prepiši i ? zamijeni odgovarajućim izrazom:
a) $9x^2-6x=3x\cdot(\,?\,)$
b) $3m^2n-6mn^2=3mn\cdot(\,?\,)$
c) $-ab^2+3a^2b=-ab\cdot(\,?\,)$
d) $-6x^2y+8xy-10xy^2=2xy\cdot(\,?\,)$
e) $x^2a^2-3xa+4xa^2=-x\cdot(\,?\,)$

(Rj. a) $9x^2-6x=3x\cdot(3x-2)$; b) $3m^2n-6mn^2=3mn(m-2n)$;
c) $-ab^2+3a^2b=-ab\cdot(b-3a)$;
d) $-6x^2y+8xy-10xy^2=2xy\cdot(-3x+4-5y)$
e) $x^2a^2-3xa+4xa^2=-x\cdot(-xa^2+3a-4a^2)$)

U sljedećim zadacima sâm odredi zajednički faktor.

11) Faktoriziraj:
a) $14a^2-21b^2=$
b) $8mn+12n^2=$
c) $-4u^2v+16uv-20uv^2=$
d) $-10x^2y^2-x=$
e) $4ac-6bc+8dc=$
f) $0{,}2x^2-0{,}6x+0{,}8=$

g) $13x^2+52y^2+39 =$

h) $3a^2b + ab^2 =$

i) $6a^2b + 12ab^2+3ab =$

j) $-2x-4yx =$

k) $-mn - 2m^2n - 4n^2m =$

l) $15ab - ab =$

(Rj. a) $14a^2-21b^2 = 7\cdot(2a^2-3b^2)$; b) $8mn+12n^2 = 4n\cdot(2m+3n)$;
c) $-4u^2v+16uv-20uv^2 = -4uv\cdot(u-4+5v)$ ili $4uv\cdot(-u+4-5v)$;
d) $x\cdot(-10xy^2-1)$ ili $-x\cdot(10xy^2+1)$; e) $2c\cdot(2a-3b+4d)$;
f) $0{,}2\cdot(x^2-3x+4)$; g) $13\cdot(x^2+4y^2+3)$; h) $ab\cdot(3a+b)$;
i) $3ab\cdot(2a+4b+1)$; j) $-2x\cdot(1+2y)$ ili $2x\cdot(-1-2y)$
k) $-mn\cdot(1+2m+4n)$; l) $ab\cdot(15-1) = 14ab$)

Primjer: Da li u izrazu $4\cdot(a-b)+ab\cdot(a-b)$ možeš uočiti zajednički faktor?

Prvo uočimo pribrojnike: $4(a-b)$ i $ab(a-b)$. Sad vidimo što im je zajedničko – zagrada $(a-b)$. Dakle, to je zajednički faktor, pa njega izlučimo, a u drugoj zagradi pišemo što je preostalo od oba pribrojnika:

$$\underbrace{4(a-b)}_{\text{kad izlučimo }(a-b)\text{, od prvog člana preostane }4} + \underbrace{ab(a-b)}_{\text{kad izlučimo }(a-b)\text{, od drugog člana preostane }ab} = (a-b)\cdot(4+ab)$$

Time smo faktorizirali početni izraz (napisali smo ga kao umnožak dviju zagrada).

Na analogan način faktoriziraj sljedeće izraze:

12) Faktoriziraj:

a) $7x(a+1)+4(a+1) =$

b) $9m(3-x)-(3-x) =$

c) $x^2(x+y)+y^2(x+y) =$

d) $(a+1)+12a(a+1) =$

e) $(-a-b)+x(b+a)=$

f) $-(u+2v)+4a\cdot(u+2v)=$

g) $12\cdot(7-6x)-(7-6x)=$

h) $4a\cdot(y^2-3)+6a(y^2-3)=$

i) $2a(a-b)+5b(a-b)$

j) $(x+3)\cdot(2a-3b)+(x+3)(5a+b)=$

k) $(a+b)\cdot(2x-7)-(a+b)\cdot(x+1)=$

l) $(m+3n)\cdot(5x-4)-(2x+3)\cdot(m+3n)=$

m) $(4-v)\cdot(-2a+5)+(a-5)(4-v)=$

n) $(x+y)(2a+b)+(a+2b)\cdot(x+y)=$

o) $(7+3x)\cdot(a-b)-(7+3x)(a+b)=$

p) $a\cdot(x-y)+b(y-x)=$

r) $-2(3+v)+4\cdot(-3-v)=$

s) $(a+1)^2+3\cdot(a+1)=$

t) $7(x-y)^2-3a(x-y)=$

u) $5(x^2+y^2+6)-(x^2+y^2+6)=$

v) $4x(a+b)-a-b=$

z) $(a+3)^2-3(a+3)+2a(-a-3)=$

(Rj. a) $(a+1)\cdot(7x+4)$; b) $(3-x)(9m-1)$; c) $(x+y)(x^2+y^2)$;
d) $(a+1)\cdot(1+12a)$; e) Da bismo imali zajednički faktor, iz prve zagrade izlučimo –, tj. –1 : $(-a-b)+x(b+a)=-(a+b)+x\cdot(a+b)=(a+b)\cdot(-1+x)$;
f) $(u+2v)\cdot(-1+4a)$; g) $(7-6x)\cdot(12-1)=(7-6x)\cdot 11=11\cdot(7-6x)$; h) $10a\cdot(y^2-3)$;
i) $(a-b)(2a+5b)$; j) $\underbrace{(x+3)\cdot(2a-3b)}_{\text{kad izlučimo }(x+3)\text{, ostaje }(2a-3b)}+\underbrace{(x+3)(5a+b)}_{\text{kad izlučimo }(x+3)\text{, ostaje }(5a+b)}=$
$=(x+3)\cdot((2a-3b)+(5a+b))=(x+3)\cdot(2a-3b+5a+b)=(x+3)\cdot(7a-2b)$;
riješimo se unutarnjih zagrada

k) Pokušaj bez ovakvih unutrašnjih zagrada: $(a+b)\cdot(2x-7)-(a+b)\cdot(x+1)=$
$=(a+b)\cdot(\underbrace{2x-7}_{\text{ovo je iz 1. pribrojnika}}\underbrace{-x-1}_{\text{ovima su promijenjeni predznaci zbog ovog minusa}})=$
$=(a+b)\cdot(x-8)$; l) $(m+3n)(5x-4-2x-3)=(m+3n)\cdot(3x-7)$;
m) $(4-v)\cdot(-2a+\cancel{5}+a-\cancel{5})=(4-v)\cdot(-a)=-a\cdot(4-v)$; n) $(x+y)\cdot(2a+b+a+2b)=$
$=(x+y)\cdot(3a+3b)=(x+y)\cdot 3\cdot(a+b)=3(x+y)\cdot(a+b)$; o) $(7+3x)\cdot(\cancel{a}-b-\cancel{a}-b)=$
$=(7+3x)\cdot(-2b)=-2b\cdot(7+3x)$; p) Da bismo imali zajednički faktor, iz jedne zagrade izlučimo minus: $a(x-y)+b(y-x)=a(x-y)-b(-y+x)=a(x-y)-b(x-y)=$
$=(x-y)(a-b)$; r) $-2(3+v)-4(3+v)=(3+v)\cdot(-2-4)=-6(3+v)$;
s) Kvadrat $(a+1)^2$ napiši u obliku umnoška $(a+1)\cdot(a+1)$, a zatim nastavi uobičajeno:
$(a+1)^2+3(a+1)=(a+1)\cdot(a+1)+3(a+1)=(a+1)\cdot(a+1+3)=(a+1)\cdot(a+4)$;
t) $7(x-y)(x-y)-3a(x-y)=(x-y)\cdot(7x-7y-3a)$; u) $(x^2+y^2+6)\cdot(5-1)=4(x^2+y^2+6)$;
v) Iz $-a-b$ **izlučimo minus**: $4x(a+b)-(a+b)=(a+b)\cdot(4x-1)$; z)
z) $(a+3)\cdot(a+3)-3(a+3)-2a(a+3)=(a+3)\cdot(a+\cancel{3}-\cancel{3}-2a)=(a+3)\cdot(-a)=-a\cdot(a+3)$)

Nakon faktoriziranja provjeri da li se u rezultatu možda može faktorizirati još neki od faktora.

Npr. $2a(x-y)+4(x-y)=(x-y)\cdot(2a+4)=(x-y)\cdot 2(a+2)=2(x-y)(a+2)$

iz ove zagrade možemo još izlučiti 2

13) Faktoriziraj (do kraja):

a) $5x(7-3a)-(7-3a)\cdot xy=$

b) $x(y-1)^2-x^2(y-1)=$

c) $12a(x-y+3)-11(x-y+3)-x+y-3=$

d) $ab(u^2+v^2)-a^2(u^2+v^2)=$

e) $(a+b+c)\cdot(2x+3)+(a+b+c)\cdot(3x+2)=$

f) $(a-3+2b)\cdot(x-y)-(x-y)\cdot(a+1-8b)=$

g) $(2a+4b)(x+y)+(2x+6y)(a+2b)=$

h) $(3-u)(5-3x)-(u-3)(3x+5)=$

(Rj. a) $(7-3a)\cdot(5x-xy)=(7-3a)\cdot x\cdot(5-y)=x\cdot(7-3a)\cdot(5-y)$;

b) $x(y-1)\cdot(y-1)-x^2(y-1)=(y-1)\cdot(xy-x-x^2)=(y-1)\cdot x(y-1-x)=$
$=x(y-1)\cdot(y-1-x)$;

c) $12a(x-y+3)-11(x-y+3)-(x-y+3)=(x-y+3)\cdot(12a-11-1)=$
$=(x-y+3)\cdot(12a-12)=(x-y+3)\cdot 12(a-1)=12(x-y+3)(a-1)$;

d) $(u^2+v^2)\cdot(ab-a^2)=(u^2+v^2)\cdot a(b-a)=a(b-a)(u^2+v^2)$;

e) $(a+b+c)\cdot(2x+3+3x+2)=(a+b+c)\cdot(5x+5)=5(a+b+c)\cdot(x+1)$;

f) $(x-y)\cdot(a-3+2b-a-1+8b)=(x-y)(-4+10b)=2(x-y)\cdot(5b-2)$;

g) Da bismo dobili zajednički faktor, uočimo da u nekim zagradama možemo izlučiti: $(2a+4b)(x+y)+(2x+6y)(a+2b)=$

izlučimo 2   izlučimo 2

$=\underline{2}\cdot\underline{(a+2b)}\cdot(x+y)+\underline{2}(x+3y)\underline{(a+2b)}=2(a+2b)(x+y+x+3y)=$

zajednički faktor je $2(a+2b)$

$=2(a+2b)\cdot(2x+4y)=2(a+2b)\cdot 2(x+2y)=4(a+2b)(x+2y)$

h) $(3-u)(5-3x)+(3-u)(3x+5)=(3-u)(5-\cancel{3x}+\cancel{3x}+5)=10(3-u)$)

AH

DOD-MS 7

Do sad smo izraze faktorizirali izlučivanjem zajedničkog faktora. Međutim, faktorizaciju možemo vršiti i na druge načine. Jedan od njih je primjena formule za razliku kvadrata:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)}$$

Tom formulom faktoriziramo razliku kvadrata.

14) Faktoriziraj:

a) $x^2 - 9 =$

b) $25a^2 - 81b^2 =$

c) $\frac{1}{16} - \frac{49}{81}x^2 =$

d) $0{,}01a^2b^2 - 0.004 =$

e) $\frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{324} =$

f) $8x^2y^2 - 18a^2 =$

g) $75xa^2 - 3x =$

h) $\frac{a}{b^2} - 144a =$

i) $\frac{256m^2}{n} - \frac{289}{nm^2} =$

(Rj. a) $(x+3)(x-3)$ ili $(x-3)(x+3)$; b) $(5a+9b)(5a-9b)$;

c) $\left(\frac{1}{4} + \frac{7}{9}x\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{7}{9}x\right)$; d) $(0.1ab - 0.02)(0.1ab + 0.02)$;

e) $\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{18}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{18}\right)$; f) Zadani izraz očito nije razlika kvadrata (8 i 18 nisu kvadrati), ali možemo uočiti da ovdje možemo izlučiti zajednički faktor: $8x^2y^2 - 18a^2 =$
$= 2\cdot(4x^2y^2 - 9a^2) = 2\cdot(2xy - 3a)(2xy + 3a)$

Sad imamo razliku kvadrata!

g) Izlučimo $3x$: $75xa^2 - 3x = 3x\cdot(25a^2 - 1) = 3x(5a-1)(5a+1)$;

h) Izlučimo a: $\frac{a}{b^2} - 144a = a\cdot\left(\frac{1}{b^2} - 144\right) = a\left(\frac{1}{b} - 12\right)\left(\frac{1}{b} + 12\right)$;

i) $\frac{1}{n}\cdot\left(256m^2 - \frac{289}{m^2}\right) = \frac{1}{n}\cdot\left(16m - \frac{17}{m}\right)\cdot\left(16m + \frac{17}{m}\right)$)

Formulu $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ možemo primijeniti i u složenijim izrazima.

Primjer 1: Da li izraz $(2x+a)^2-b^2$ predstavlja razliku kvadrata?

Odgovor je potvrdan. Prema tome, na taj izraz možemo primijeniti formulu za razliku kvadrata:

$$\underbrace{(2x+a)^2}_{\text{kvadrat od } 2x+a} - \underbrace{b^2}_{\text{kvadrat od } b} = ((2x+a)+b)\cdot((2x+a)-b) = (2x+a+b)(2x+a-b)$$

Pr. 2: Faktoriziraj $(x+y)^2-(2a+b)^2$

$$\underbrace{(x+y)^2}_{\text{kvadrat od } x+y} - \underbrace{(2a+b)^2}_{\text{kvadrat od } 2a+b} = ((x+y)+(2a+b))\cdot((x+y)-(2a+b))$$

ovaj minus će suma u zagradi $(2a+b)$ promijeniti predznak

$$= (x+y+2a+b)\cdot(x+y-2a-b)$$

Pr. 3: Faktoriziraj $(m+3n)^2-(2m-n)^2$

$$\underbrace{(m+3n)^2}_{\text{kvadrat od } m+3n} - \underbrace{(2m-n)^2}_{\text{kv. od } 2m-n} = (m+3n+2m-n)\cdot(m+3n-2m+n)$$

odmah promijenjeni predznaci!

$$= (3m+2n)\cdot(-m+4n)$$

Pr. 4: Faktoriziraj $36a^2-(6a+b)^2$

$$\underbrace{36a^2}_{\text{kvadrat od } 6a} - \underbrace{(6a+b)^2}_{\text{kv. od } 6a+b} = (6a+6a+b)\cdot(6a-6a-b) = (12a+b)\cdot(-b) = -b(12a+b)$$

15) Faktoriziraj:

a) $(3x+2y)^2-4z^2=$

b) $(a+b)^2-c^2=$

c) $81z^2-(4x-5y)^2=$

d) $(3a-5b)^2-25b^2=$

e) $(1+a)^2-(b+c)^2=$

f) $(3+4a)^2-(2b-7c)^2=$

g) $(u+v)^2-(u-v)^2=$

(Rj. a) $(3x+2y+2z)\cdot(3x+2y-2z)$;
b) $(a+b+c)(a+b-c)$; c) $(9z+4x-5y)(9x-4x+5y)$;
d) $(3a-5b+5b)(3a-5b-5b)=3a(3a-10b)$;
e) $(1+a+b+c)(1+a-b-c)$; f) $(3+4a+2b-7c)(3+4a-2b+7c)$;
g) $(u+v+u-v)\cdot(u+v-u+v)=2u\cdot 2v=4uv$)

Podsjetimo se da je kvadriranje isto što i množenje broja sa samim sobom. Prema tom, ako neki izraz zapišemo u obliku kvadrata, mi ga time zapravo faktoriziramo (jer je kvadrat zapravo umnožak). Ako u formulama $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ i $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ zamijenimo lijevu i desnu stranu, dobit ćemo formule:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2+2ab+b^2 &= (a+b)^2 \\ a^2-2ab+b^2 &= (a-b)^2 \end{aligned}}$$

koje nam „govore" kako neke izraze možemo zapisati u obliku kvadrata (a time i faktorizirati).

Primjer 1: Napiši u obliku kvadrata $a^2+8a+16$.

Da bismo zadani tročlani izraz napisali u obliku kvadrata, prvo trebamo uočiti dva pribrojnika koji su kvadrati (od nečega) i trebamo uočiti od čega su kvadrati:

$$a^2+8a+16 = (a+4)^2$$

kvadrat od a   kvadrat od 4

To od čega su kvadrati, stavimo u zagradu. Između njih stavimo plus jer su svi pribrojnici u početnom izrazu pozitivni. Zatvorimo zagradu i napišemo kvadrat.

Sad još trebamo provjeriti dobiveno (upitan je samo središnji član $8a$). Da bismo provjerili, krenimo od rezultata $(a+4)^2$ i kvadrirajmo ga (priča o „prvom i drugom"). Ako kvadriranjem dobijemo zadani izraz $a^2+8a+16$, onda smo točno riješili.

Pr. 2: $x^2-20xy+100y^2$ napiši u obliku kvadrata.

$$x^2-20xy+100y^2 = (x-10y)^2$$

kvadrat od x   kvadrat od 10y   tu je minus jer je i u središnjem članu $-20xy$

Provjeri rješenje, tj. iskvadriraj $(x-10y)^2$. (To možeš i napamet)

Pr. 3: Faktoriziraj $16a^2-24ab+9b^2$.

Uoči da tu piše faktoriziraj, a ne napiši u obliku kvadrata.
Stoga ćemo zadani izraz prvo napisati u obliku kvadrata, a onda faktorizirati.

$$\underbrace{16a^2}_{\text{kvadrat od } 4a}-24ab+\underbrace{9b^2}_{\text{od } 3b}=(4a-3b)^2=(4a-3b)\cdot(4a-3b)$$

ovo je umnožak, pa je time zadatak riješen

16) Napiši u obliku kvadrata:

a) $\frac{1}{9}a^2b^2-8abc+144c^2=$

b) $4a^2+4ab+b^2=$

c) $x^2+y^2-2xy=$

d) $0.09+3.6xy+36x^2y^2=$

e) $81a^2b^2+a^2+18a^2b=$

f) $9m^2+1-6m=$

g) $-4a^2-4ab-b^2=$

h) $-6x-x^2-9=$

i) $5a^2+10ab+5b^2=$

j) $3xy^2-6xy+3x=$

k) $49a-70ab+25ab^2=$

l) $-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}+x$

(Rj. a) $\left(\frac{1}{3}ab-12c\right)^2$; b) $(2a+b)^2$; c) Uoči da je izraz x^2+y^2-2xy jednak izrazu $x^2-2xy+y^2$, tj. nije bitan poredak pribrojnika. Stoga jednostavno uoči kvadrate, od čega su oni kvadrati i da li treći član ima + ili −. Rješenje: $(x-y)^2$; d) $(0,3+6xy)^2$;
e) $(9ab+a)^2$ ← Kad bismo to još trebali faktorizirati, trebali bismo još u zagradi izlučiti a, pa bismo imali: $(9ab+a)^2=[a\cdot(9b+1)]^2=a^2\cdot(9b+1)^2$;
f) $(3m-1)^2$; g) Izlučimo minus (tj. −1): $-4a^2-4ab-b^2=-(4a^2+4ab+b^2)=-(2a+b)^2$; h) $-(6x+x^2+9)=-(x+3)^2$; i) Ovdje niti jedan pribrojnik nije kvadrat, ali iz svih možemo izlučiti 5, a onda će neki postati kvadrati: $5a^2+10ab+5b^2=5\cdot(\underline{a^2}+2ab+\underline{b^2})=5\cdot(a+b)^2$;
j) Izlučimo što se može iz sva tri pribrojnika: $3x\cdot(y^2-2y+1)=3x\cdot(y-1)^2$;
k) Izlučimo a: $a\cdot(49-70b+25b^2)=a\cdot(7-5b)^2$; l) Da bismo od $\frac{-x^2}{2}$ i $\frac{-1}{2}$ učinili kvadrate, moramo izlučiti $-\frac{1}{2}$: $\frac{-x^2}{2}-\frac{1}{2}+x=\frac{-1}{2}\cdot(x^2+1-2x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2$)

Do sad smo vidjeli da algebarske izraze možemo faktorizirati na više načina:

- izlučivanjem zajedničkog faktora

Npr. $5ax + ab = a\cdot(5x+b)$

$9m + 3mn + 4m^2 + ma = m\cdot(9+3n+4m+a)$

$3(a+x) - b(a+x) = (a+x)\cdot(3-b)$

Uoči da se izlučivanje zajedničkog faktora može primijeniti **bez** obzira <u>koliko</u> pribrojnika imamo (2, 3, 4 ili više).

- formulom za razliku kvadrata

Npr. $a^2x^2 - 16 = (ax+4)(ax-4)$

Uoči da u ovakvim zadacima imamo točno 2 pribrojnika (tj. 2 broja koji se oduzimaju) i oba moraju biti kvadrati.

- formulom za kvadrat razlike ili zbroja

Npr. $25b^2 \pm 10ab + a^2 = (5b \pm a)^2$

Uoči da u ovakvim zadacima imamo točno 3 pribrojnika, od kojih su dva kvadrati.

Preostaje nam da uvježbamo još jedan način za faktoriziranje. Naime, često se javljaju algebarski izrazi koje ne možemo rastaviti na faktore izlučivanjem zajedničkog faktora svih članova izraza, niti primjenom formula, ali je moguće grupirati članove u više grupa tako da svaka grupa ima zajednički faktor. Kad se taj zajednički faktor izluči u svakoj grupi posebno, dobije se izraz koji znamo faktorizirati nekom od već poznatih metoda. Ovakvo faktoriziranje naziva se faktoriziranje grupiranjem članova.

<u>Primjer 1:</u> Faktoriziraj $ax + bx + 2a + 2b$.

Uočimo da u sva četiri pribrojnika nemamo zajednički faktor. Međutim, prva dva pribrojnika ax i bx imaju zajednički faktor x. Druga dva pribrojnika $2a$ i $2b$ imaju zajednički faktor 2. Izlučimo to:

$ax+bx+2a+2b = x\cdot(a+b)+2\cdot(a+b) \quad = (a+b)\cdot(x+2)$

Uočimo zajednički faktor $(a+b)$

Dakle, nakon grupiranja članova (ax sa bx i $2a$ sa $2b$) i izlučivanja zajedn. faktora u svakoj grupi posebno, dobili smo novi zajednički faktor $(a+b)$. Nakon njegovog izlučivanja, zadatak je riješen.

Uočimo da smo u izrazu $ax+bx+2a+2b$ članove mogli i drugačije grupirati. Naime, ax i $2a$ imaju zajednički faktor a, a bx i $2b$ zajednički faktor b. Dobivamo:

$$ax+bx+2a+2b = a\cdot(x+2)+b\cdot(x+2) \quad = (x+2)\cdot(a+b)$$

a b

Sad imamo zajednički faktor $(x+2)$

Rješenja su jednaka jer je $(a+b)\cdot(x+2)=(x+2)\cdot(a+b)$ – množenje je komutativno.

Pr. 2: Faktoriziraj $x^2+5xa+20a-16$

Pokušamo li grupirati prva dva člana i zadnja dva, dobivamo:

$x\cdot(x+5a)+4\cdot(a-5)$

U dobivenom izrazu nemamo zajednički faktor, pa takvo grupiranje ne vodi k rješenju zadatka.

Stoga pokušajmo drugačije grupirati članove! PRI GRUPIRANJU TREBA IMATI NA UMU I FORMULU ZA RAZLIKU KVADRATA I FORMULE ZA KVADRAT ZBROJA I RAZLIKE (TE FORMULE TAKOĐER KORISTIMO ZA FAKTORIZIRANJE).

Imajući na to na umu, možemo uočiti da je x^2-16 razlika kvadrata. Stoga pokušajmo zadatak riješiti grupirajući prvi i četvrti, te drugi i treći član. Dobivamo:

$x^2-16+5a\cdot(x+4) = (x+4)(x-4)+5a\cdot(x+4) = (x+4)\cdot(x-4+5a)$

Pr. 3: Faktoriziraj $x^2-10x+25-y^2$

Članove možemo grupirati na više načina (ali nas svi načini neće dovesti do rješenja.)

1. Izlučimo li iz prva dva pribrojnika x, a druga dva raspišemo kao razliku kvadrata, nećemo dobiti zajednički faktor, pa nećemo moći faktorizirati do kraja.
2. Možemo uočiti da prvi i zadnji član daju razliku kvadrata, pa dobivamo: $x^2-y^2-5\cdot(2x-5)=(x+y)(x-y)-5(2x-5)$, ali niti ovdje nemamo dalje zajedničkog faktora. Dakle, niti ovakvo grupiranje ne vodi k rješenju.
3. Pokušajmo još primjeniti formulu za kvadrat zbroja ili razlike. Možemo uočiti da su x^2 i 25 kvadrati (od x i od 5), a član $10x$ je zapravo „dvostruki prvi puta drugi". Dakle, grupirajmo prva tri člana:

$$(\underbrace{x^2}_{\text{kvadrat od } x}-10x+\underbrace{25}_{\text{od } 5})-y^2=\underbrace{(x-5)^2-y^2}_{\text{razlika kvadrata}}$$

$$=(x-5+y)\cdot(x-5-y)$$

Time smo izvršili faktorizaciju!

Pr. 4: Faktoriziraj $m^2a^2-x^2a^2-2m^2a+2x^2a+m^2-x^2$

1. način: Članove grupirajmo po dva, redom kako su navedeni:

$a^2\cdot(m^2-x^2)-2a(m^2-x^2)+(m^2-x^2)=$

Izlučimo zajednički faktor (m^2-x^2)

$=(m^2-x^2)\cdot(a^2-2a+1)$

U 1. zagradi uoči razliku kvadrata, a u drugoj kvadrat razlike!

$=(m+x)\cdot(m-x)\cdot(a-1)^2$

2. način: U tri člana se pojavljuje m^2, pa njega izlučimo; iz druga tri člana x^2:

$m^2\cdot(a^2-2a+1)-x^2\cdot(a^2-2a+1)=$

Izlučimo zajednički faktor (a^2-2a+1)

$=(a^2-2a+1)\cdot(m^2-x^2)$

$=(a-1)^2\cdot(m+x)(m-x)$

Oba načina daju isto rješenje!

17) Faktoriziraj:

a) $ax+ay+bx+by=$
b) $a-b-ac+bc=$
c) $ax+bx-a-b=$
d) $63x^2y-24yz-56xz+27xy^2=$
e) $18x^2+27xy+14xz+21yz=$
f) $3m-2xm-3+2x=$
g) $xz-xt+yz-yt$
h) $x^2y+3xy-x-3=$
i) $a^2bc-2abd-2cd+ac^2=$
j) $ax^2+cx^2-ax-cx+bx^2-bx=$
k) $ax^2+bx^2+ax+bx-a-b=$
l) $a^2+10ab-70b-49=$
m) $a^2-b^2-a-b=$
n) $4u^2-9v^2-2u+3v=$
o) $ax^2-bx^2+2ax-2bx+a-b=$
p) $a^2-6a+9-b^2=$
r) $a^2x^2-a^2x-a^2+b^2x^2-b^2x-b^2=$
s) $ax^2+bx^2-ax-bx-cx^2+cx=$
t) $3a^2b^2-6ab+3=$

(Rj. a) $a\cdot(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$; b) $(a-b)-c\cdot(a-b)=(a-b)\cdot(1-c)$; c) $x\cdot(a+b)-(a+b)\cdot(a+b)\cdot(x-1)$; d) Grupirajmo 1. i 4., te 2. i 3. član: $9xy\cdot(7x+3y)-8z\cdot(3y+7x)=(7x+3y)\cdot(9xy-8z)$; e) $9x\cdot(2x+3y)+7z\cdot(2x+3y)=$ $=(2x+3y)\cdot(9x+7z)$; f) $m\cdot(3-2x)-(3-2x)=(3-2x)\cdot(m-1)$; g) $(z-t)\cdot(x+y)$; h) $(x+3)\cdot(xy-1)$; i) $ab\cdot(ac-2d)+c\cdot(ac-2d)=(ac-2d)\cdot(ab+c)$; j) Grupiramo sve pribrojnike sa x^2, a u drugu grupu sve sa x: $x^2\cdot(a+c+b)-x\cdot(a+c+b)=(a+b+c)\cdot(x^2-x)=$ $=(a+b+c)\cdot x\cdot(x-1)=x(x-1)(a+b+c)$; k) Grupiramo po dva: $x^2(a+b)+x\cdot(a+b)-(a+b)=$ $=(a+b)\cdot(x^2+x-1)$; l) Ako pokušamo grupirati posebno prva dva, te posebno zadnja dva člana, nećemo uspjeti faktorizirati. Grupirajmo prvi i zadnji (razlika kvadrata), a iz 2. i 3. izlučimo: $a^2-49+10b\cdot(a-7)=(a+7)(a-7)+10b(a-7)=(a-7)\cdot(a+7+10b)$; m) Prva dva čine razliku kvadrata: $(a+b)\cdot(a-b)-(a+b)=(a+b)\cdot(a-b-1)$; n) Slično kao prošli zadatak: $(2u+3v)(2u-3v)-(2u-3v)=(2u-3v)(2u+3v-1)$; o) $x^2(a-b)+2x(a-b)+(a-b)=$ $=(a-b)\cdot(x^2+2x+1)=(a-b)\cdot(x+1)^2$; p) Prva tri člana čine kvadrat razlike: $(a^2-6a+9)-b^2=(a-3)^2-b^2=(a-3-b)\cdot(a-3+b)$; r) $a^2\cdot(x^2-x-1)+b^2\cdot(x^2-x-1)=$ $=(x^2-x-1)\cdot(a^2+b^2)$; s) $x^2\cdot(a+b-c)-x(a+b-c)=(a+b-c)\cdot(x^2-x)=(a+b-c)\cdot x(x-1)=$ $=x\cdot(x-1)\cdot(a+b-c)$; t) Sva tri člana imaju zajednički faktor 3: $3\cdot(a^2b^2-2ab+1)$)

ALGEBARSKI RAZLOMCI

Algebarski razlomci su razlomci u kojima se, osim brojeva, pojavljuju i slova.

Npr. $\frac{5a+3}{a^2-4}$, $\frac{3}{b^2-c}$, $\frac{5(x+y)}{7x-(y-3)}$ ...

Ponovimo ono što otprije znamo o razlomcima:

Ako razlomak skratimo, tj. i brojnik i nazivnik podijelimo istim brojem, vrijednost razlomka neće se promijeniti.

Npr. $\frac{\cancel{21}^{3}}{\cancel{35}_{5}} = \frac{3}{5}$

U ovom primjeru smo zapravo 21 i 35 faktorizirali, a zatim skratili zajednički faktor: $\frac{21}{35} = \frac{3 \cdot \cancel{7}}{5 \cdot \cancel{7}} = \frac{3}{5}$.

Ovakav postupak koristit ćemo i kod skraćivanja algebarske razlomke.

Dakle, brojnik i nazivnik treba faktorizirati, a nakon toga pokratiti zajedničke faktore brojnika i nazivnika.

> Zapamti!
> Kratiti možemo samo ako i u brojniku i u nazivniku imamo umnoške. Tada kratimo zajedničke faktore.

Zbog toga je bilo važno naučiti faktorizirati algebarske izraze.

Pr. 1: Skrati $\frac{abx^2}{a^2xc}$.

I u brojniku i u nazivniku već imamo umnoške, pa možemo kratiti. Jedino kvadrate možemo raspisati kao umnoške:

$$\frac{abx^2}{a^2xc} = \frac{\cancel{a}bx\cdot\cancel{x}}{\cancel{a}\cdot a\cancel{x}c} = \frac{bx}{ac}$$

Pr. 2: Skrati $\frac{a}{a^2}$.

a^2 napišimo kao umnožak: $\frac{a}{a^2} = \frac{\cancel{a}}{a\cdot\cancel{a}} = \frac{1}{a}$

Uoči: umjesto da a^2 raspisujemo kao umnožak, mogli smo ovako: $\frac{\cancel{a}}{a^{\cancel{2}}} = \frac{1}{a}$

Dakle: pošto oznaka ^{2} (od a^2) označava da tu imamo <u>dva</u> slova a, mi možemo prekrižiti tu dvojku i u brojniku a. Time nam u nazivniku ostaje samo a.

Pr. 3: Bez raspisivanja kvadrata skrati: $\frac{b}{b^2}$, $\frac{cd}{c^2}$, $\frac{3xy^2}{6x^2y}$, $\frac{m^2}{m}$.

$\frac{\cancel{b}}{b^{\cancel{2}}} = \frac{1}{b}$, $\frac{\cancel{c}d}{c^{\cancel{2}}} = \frac{d}{c}$, $\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cancel{x}y^{\cancel{2}}}{\underset{2}{\cancel{6}}x^{\cancel{2}}\cancel{y}} = \frac{y}{2x}$, $\frac{m^{\cancel{2}}}{\cancel{m}} = \frac{m}{1} = m$

Pr. 4: Skrati $\frac{3(x-2a)}{5b(x-2a)}$

Pošto se zagrada $(x-2a)$ pojavljuju kao faktor i u brojniku i u nazivniku, možemo je kratiti:

$$\frac{3\cancel{(x-2a)}}{5b\cancel{(x-2a)}} = \frac{3}{5b}$$

Pr. 5: Skrati: $\frac{(2-a)\cdot(3+b)}{(2+a)\cdot(3+b)\cdot x}$.

Zajednički faktor je $3+b$, pa imamo: $\frac{(2-a)\cancel{(3+b)}}{(2+a)\cancel{(3+b)}\cdot x} = \frac{2-a}{x(2+a)}$

Pr. 6: Skrati: $\frac{15a(b-c)}{21a^2(b-c)}$, $\frac{a^2(b+x)^2}{ab\cdot(b+x)}$, $\frac{(2-a)^2(3+x)}{(3+x)^2\cdot(2-a)}$, $\frac{72a^2(x+b)^2}{8a(x+b)}$

$\frac{\overset{5}{\cancel{15}}\cancel{a}\cancel{(b-c)}}{\underset{7}{\cancel{21}}a^{\cancel{2}}\cancel{(b-c)}} = \frac{5}{7a}$; $\frac{a^{\cancel{2}}(b+x)^{\cancel{2}}}{\cancel{a}b\cancel{(b+x)}} = \frac{a(b+x)}{b}$;

$\frac{(2-a)^{\cancel{2}}\cancel{(3+x)}}{(3+x)^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(2-a)}} = \frac{2-a}{3+x}$, $\frac{\overset{9}{\cancel{72}}a^{\cancel{2}}(x+b)^{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{8}}\cancel{a}\cancel{(x+b)}} = 9a(x+b)$.

Pr. 7: Skrati $\frac{ax^2}{bx^2}$. $\frac{a\cancel{x^2}}{b\cancel{x^2}} = \frac{a}{b}$ Uoči kad križamo cijeli x^2, a kad samo kvadrat!

18) Skrati razlomke:

a) $\frac{2x^2y}{8xyz}$ f) $\frac{12x^2(a-b)^2}{18x(a-b)}$ k) $\frac{56x^2(a+b)}{80x(a+b)^2}$

b) $\frac{25x}{45y}$ g) $\frac{10a^2b(x-z)^2}{100a^2b^2(x-z)}$ l) $\frac{(3-7x)^2(5+2a)}{(5+2a)\cdot(3-7x)^2}$

c) $\frac{xya}{xab}$ h) $\frac{27(x-y)^2\cdot a^2}{9(x+y)\cdot a^2}$ m) $\frac{36(2-5a)^2(x+y)}{18(2-5a)^2(x+y)^2}$

d) $\frac{24x^2}{16x^2y}$ i) $\frac{a(a-b)}{b(a-b)}$ n) $\frac{(2a-3x)^2}{2a-3x}$

e) $\frac{28a^2bc^2xy^2}{72ab^2cxy^2}$ j) $\frac{(x+3)(a-2)}{(x+3)^2(a-2)}$ o) $\frac{(4-u)^2(v-3)}{(v-3)^2\cdot(4-u)^2}$

(Rj. a) $\frac{x}{4z}$; b) $\frac{5x}{9y}$; c) $\frac{y}{b}$; d) $\frac{3}{2y}$; e) $\frac{4ac}{9b}$;
f) $\frac{2x(a-b)}{3}$; g) $\frac{x-z}{10b}$; h) $\frac{3(x-y)^2}{x+y}$; i) $\frac{a}{b}$;
j) $\frac{1}{x+3}$; k) $\frac{7x}{10(a+b)}$; l) 1 ; m) $\frac{2}{(x+y)}$;
n) $2a-3x$; o) $\frac{1}{v-3}$)

Ako u brojniku i nazivniku nemamo umnoške, onda ih prvo moramo „stvoriti", tj. faktorizirati brojnik i nazivnik, a tek onda kratiti.

Pri faktoriziranju brojnika i nazivnika koristit ćemo sve metode koje se mogu koristiti za faktoriziranje:

- izlučivanje zajedničkog faktora
- formula za razliku kvadrata $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
- formula za kvadrat zbroja i razlike $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$
- grupiranje članova

Pr. 1: Skrati $\frac{3a+3b}{7a+7b}$

U brojniku imamo zajednički faktor 3, a u nazivniku 7:

$$\frac{3a+3b}{7a+7b}=\frac{3\cancel{(a+b)}}{7\cancel{(a+b)}}=\frac{3}{7}$$

Pr. 2: Skrati: $\frac{x^2-16}{x+4}$

U brojniku imamo razliku kvadrata, pa je raspišemo:

$$\frac{x^2-16}{x+4}=\frac{(x-4)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=x-4$$

Pr. 3: Skrati $\frac{5a+15}{a^2-9}$

U brojniku izlučimo zajednički faktor 5, a u nazivniku raspišimo razliku kvadrata: $\frac{5a+15}{a^2-9}=\frac{5\cdot\cancel{(a+3)}}{(a-3)\cancel{(a+3)}}=\frac{5}{a-3}$

Pr. 4: Skrati $\frac{x-y}{y-x}$

Brojnik i nazivnik su očito suprotni, pa u jednom izlučimo minus.

$$\frac{x-y}{y-x}=\frac{\cancel{x-y}}{-\cancel{(x-y)}}=-1$$

Pr. 5: Skrati $\frac{m-n}{n^2-m^2}$.

$$\frac{m-n}{n^2-m^2}=\frac{m-n}{(n-m)\cdot(n+m)}=\frac{-\cancel{(n-m)}}{\cancel{(n-m)}\cdot(n+m)}=\frac{-1}{n+m}\quad\left(\text{ili } \frac{1}{-n-m}\right)$$

Pr. 6: Skrati $\frac{a^2+4a+4}{a+2}$

U brojniku je tročlani izraz, što nas podsjeća na kvadrat zbroja.

$$\frac{a^2+4a+4}{a+2}=\frac{(a+2)^2}{\cancel{a+2}}=a+2$$

Pr. 7: Skrati $\frac{xa+xb-ya-yb}{x^2-2xy+y^2}$

U brojniku pokušajmo grupirati članove, a u nazivniku treba prepoznati kvadrat razlike $(x-y)^2$.

$$\frac{xa+xb-ya-yb}{x^2-2xy+y^2} = \frac{x(a+b)-y(a+b)}{(x-y)^2} = \frac{(a+b)\cdot\cancel{(x-y)}}{(x-y)^{\cancel{2}}} = \frac{a+b}{x-y}$$

Pr. 8: Skrati $\frac{(x-y)^2}{(y-x)^2}$

Očito u jednoj zagradi moramo promijeniti predznake. Pitanje je:
KAKO PROMIJENITI PREDZNAKE U ZAGRADI KOJA SE KVADRIRA?

Odgovor: $(x-y)^2 = (-x+y)^2$ ← bez izlučivanja minusa!

Obrazloženje: Suprotni brojevi imaju jednake kvadrate, npr.
$4^2 = (-4)^2$

Stoga je: $(x-y)^2 = \left(-(x-y)\right)^2 = (-x+y)^2 = (y-x)^2$

Kraće: $\boxed{(x-y)^2 = (y-x)^2}$

Dakle: Ako u zagradi koja se kvadrira, trebamo promijeniti predznake, nema izlučivanja minusa ispred zagrade!

Sad riješimo pr. 8: $\frac{(x-y)^2}{(y-x)^2} = \frac{\cancel{(y-x)^2}}{\cancel{(y-x)^2}} = 1$

Pr. 9: Skrati $\frac{a-b}{(b-a)^2}$.

Zadatak možemo riješiti na 2 načina:
- promjenom predznaka u brojniku
- promjenom predznaka u nazivniku

1. način: $\frac{a-b}{(b-a)^2} = \frac{-\cancel{(b-a)}}{(b-a)^{\cancel{2}}} = \frac{-1}{b-a} = \frac{1}{a-b}$

2. način: $\frac{a-b}{(b-a)^2} = \frac{\cancel{a-b}}{(a-b)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{a-b}$

Isto je rješenje dobiveno na oba načina!

19) Skrati razlomke:

a) $\dfrac{x^2-9y^2}{4x-12y}$ g) $\dfrac{(x-y)^2}{y-x}$ m) $\dfrac{a^2-2ab}{ab-2b^2}$

b) $\dfrac{x^2+2xy}{xy+2y^2}$ h) $\dfrac{xy}{x-xy}$ n) $\dfrac{a^2-6a+9}{a^2-9}$

c) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ i) $\dfrac{a^2x-b^2x}{ax+bx}$ o) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-a-b-b^2}$

d) $\dfrac{a-b}{b-a}$ j) $\dfrac{xz-yz}{z^2+3z}$ p) $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$

e) $\dfrac{x(m-n)}{y(n-m)}$ k) $\dfrac{a^2+a}{ax-ay}$ r) $\dfrac{(2a-3)(a-1)+(2a-3)}{(a+1)(2a-3)}$

f) $\dfrac{(4-7u)^2}{(7u-4)^2}$ l) $\dfrac{b^2+b^2}{mb-nb}$ s) $\dfrac{a^2-2a+1}{1-a^2}$

(Rj. a) U brojniku imamo razliku kvadrata, a u nazivniku izlučimo 4: $\dfrac{(x+3y)\cancel{(x-3y)}}{4\cancel{(x-3y)}}=\dfrac{x+3y}{4}$;

b) $\dfrac{x\cancel{(x+2y)}}{y\cancel{(x+2y)}}=\dfrac{x}{y}$; c) $\dfrac{(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\dfrac{x-2}{x+2}$; d) $\dfrac{a-b}{b-a}=\dfrac{-\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}}=-1$;

e) $\dfrac{-x\cancel{(n-m)}}{y\cancel{(n-m)}}=\dfrac{-x}{y}$; f) $\dfrac{(4-7u)^2}{(7u-4)^2}=\dfrac{\cancel{(7u-4)^2}}{\cancel{(7u-4)^2}}=1$; g) $\dfrac{(y-x)^{\cancel{2}}}{\cancel{y-x}}=y-x$;

h) $\dfrac{\cancel{x}y}{\cancel{x}(1-y)}=\dfrac{y}{1-y}$; i) $\dfrac{\cancel{x}(a^2-b^2)}{\cancel{x}(a+b)}=\dfrac{(a-b)\cancel{(a+b)}}{\cancel{a+b}}=a-b$; j) $\dfrac{\cancel{z}(x-y)}{\cancel{z}(z+3)}=\dfrac{x-y}{z+3}$;

k) $\dfrac{\cancel{a}(a+1)}{\cancel{a}(x-y)}=\dfrac{a+1}{x-y}$; l) $\dfrac{2b^{\cancel{2}}}{\cancel{b}(m-n)}=\dfrac{2b}{m-n}$; m) $\dfrac{a\cancel{(a-2b)}}{b\cancel{(a-2b)}}=\dfrac{a}{b}$;

n) $\dfrac{(a-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(a-3)}(a+3)}=\dfrac{a-3}{a+3}$; o) Nazivnik ćemo faktorizirati grupiranjem prvog i posljednjeg člana (razlika kvadrata): $\dfrac{a^2-b^2}{(a^2-b^2)-(a+b)}=\dfrac{(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)-(a+b)}=\dfrac{(a-b)\cancel{(a+b)}}{\cancel{(a+b)}(a-b-1)}=$ $=\dfrac{a-b}{a-b-1}$; p) U brojniku na $2ab$ podsjeća na „dvostruki prvi puta drugi", što znači da ćemo grupirati $a^2+2ab+b^2$. U nazivniku na sličan način zaključujemo da treba grupirati $a^2+2ac+c^2$, pa dobivamo: $\dfrac{(a^2+2ab+b^2)-c^2}{(a^2+2ac+c^2)-b^2}=\dfrac{(a+b)^2-c^2}{(a+c)^2-b^2}=$ $=\dfrac{\cancel{(a+b+c)}(a+b-c)}{\cancel{(a+c+b)}(a+c-b)}=\dfrac{a+b-c}{a-b+c}$; r) U brojniku imamo zajednički faktor $2a-3$, a nazivnik je već faktoriziran: $\dfrac{\cancel{(2a-3)}\cdot(a\cancel{-1+1})}{(a+1)\cancel{(2a-3)}}=\dfrac{a}{a+1}$;

s) $\dfrac{(a-1)^2}{(1-a)(1+a)}=\dfrac{(1-a)^{\cancel{2}}}{\cancel{(1-a)}(1+a)}=\dfrac{1-a}{1+a}$)

Vieteove formule

Množenjem zagrada: $(x+3)\cdot(x-7)$
$(x-4)\cdot(x-2)$
$(x+8)\cdot(x+6)$
...

dobivamo izraze u kojima se pojavljuju x^2, x i slobodni član.

Npr. $(x+3)\cdot(x-7) = x^2 - 7x + 3x - 21$
$= x^2 - 4x - 21$

x^2 x slobodni član

Proučimo kako nastaju dobiveni koeficijenti (uz x^2, uz x i slobodni član), tj. u gornjem primjeru brojevi 1, -4 i -21.

Zamislimo da u prošlom primjeru umjesto 3 i -7 imamo bilo koja dva broja a i b. Tada dobivamo:

$$\boxed{\begin{aligned}(x+a)\cdot(x+b) &= x^2 + bx + ax + ab \\ &= x^2 + (a+b)x + ab\end{aligned}}$$

Zaključujemo:

1. koeficijent uz x^2 je 1 (jer su i u zagradama koje smo množili uz x bili koeficijenti 1, pa smo njihovim množenjem dobili 1)
2. koeficijent uz x jednak je zbroju $a+b$ brojeva a i b koji se pojavljuju u početnim zagradama
3. slobodni član jednak je umnošku $a\cdot b$ brojeva a i b koji se pojavljuju u početnim zagradama

Vieteove formule

Upravo izrečene zaključke primijenit ćemo prilikom rješavanja sljedećih primjera..

Pr. 1: Faktoriziraj x^2+5x+6

Traženi algebarski izraz x^2+5x+6 možemo pokušati faktorizirati već naučenim metodama (izlučivanjem zajedničkog faktora, primjenom formula za razliku kvadrata ili kvadrat zbroja ili kvadrat razlike), ali ćemo uočiti da se nijedna od tih metoda ovdje ne može primijeniti.

Ipak, pošto se u izrazu x^2+5x+6 pojavljuju x^2, x i slobodni član, naslućujemo da se on možda može prikazati kao umnožak dviju zagrada:

$$x^2+5x+6 = (x \underset{+\text{ ili }-}{\uparrow} \underset{\text{neki broj}}{\uparrow})\cdot(x \underset{+\text{ ili }-}{\uparrow} \underset{\text{neki broj}}{\uparrow})$$

Da bismo pronašli brojeve koji nedostaju u zagradi, primijenimo gore uokvireni zaključak: koeficijent uz x (broj 5) jednak je zbroju traženih brojeva, a slobodni član (broj 6) jednak je umnošku traženih brojeva.

Krenimo od umnoška – koji sve brojevi imaju umnožak 6?

To su: 1 i 6, 2 i 3, a također i -1 i -6, -2 i -3.

Sad još ispitajmo za koji od tih parova vrijedi da je zbroj 5.

To vrijedi za brojeve 2 i 3.

Dakle, u zagradi treba upisati $+2$ i $+3$.

$$x^2+5x+6 = (x+2)\cdot(x+3)$$

Time smo zadani izraz faktorizirali.

Provjeri to množenjem zagrada!

Pr. 2: Faktoriziraj $x^2-4x-12$

Primijenimo isti postupak: $x^2-4x-12=(x \quad)\cdot(x \quad)$

tražimo dva broja

Traženi brojevi moraju biti takvi da im umnožak bude -12, a zbroj -4.

Nabrojimo parove čiji je umnožak -12: -1 i 12, 1 i -12, -2 i 6, 2 i -6, -3 i 4, 3 i -4.

Kojem od tih parova je zbroj -4? To su brojevi -6 i 2.

Upišimo te brojeve u zagradu: $x^2-4x-12=(x-6)\cdot(x+2)$

Provjeri to množenjem zagrada!

Pr. 3: Faktoriziraj x^2+x-20

$x^2+x-20=(x \quad)(x \quad)$

Koji brojevi daju umnožak -20? 1 i -20, -20 i 1 ...

Koji od njih imaju zbroj 1? 5 i -4.

Dakle, $x^2+x-20=(x+5)\cdot(x-4)$.

Provjeri to množenjem zagrada!

Pr. 4: Faktoriziraj: $x^2-10x+25$

$x^2-10x+25=(x \quad)(x \quad)$

Koji brojevi imaju umnožak 25? 1 i 25, ...

Koji od njih imaju zbroj -10? -5 i -5.

Dakle, $x^2-10x+25=(x-5)\cdot(x-5)$.

To znači: $x^2-10x+25=(x-5)^2$

No, mi smo to znali i od prije jer u izrazu $x^2-10x+25$ imamo dva kvadrata (x^2 i 25). Oni su kvadrati od x i od 5, pa imamo $x^2-10x+25=(x-5)^2$ (prema formuli za kvadrat razlike).

20.) Faktoriziraj:

a) x^2+3x+2 e) $y^2+7y+10$ i) $x^2-2x-99$

b) a^2-a-6 f) $z^2-11z+24$ j) x^2-x-56

c) $b^2-9b+20$ g) $d^2-2d-15$ k) a^2-6a+8

d) a^2+a-6 h) $x^2+2x-35$ l) $b^2+2b-63$

(Rj. a) $(x+2)(x+1)$; b) $(a-3)(a+2)$; c) $(b-5)(b-4)$; d) $(a+3)(a-2)$;
e) $(y+5)(y+2)$; f) $(z-8)(z-3)$; g) $(d-5)(d+3)$; h) $(x+7)(x-5)$;
i) $(x-11)(x+9)$; j) $(x-8)(x+7)$; k) $(a-4)(a-2)$; l) $(b+9)(b-7)$)

U svim dosadašnjim zadacima koeficijent uz x^2 bio je 1. Ako je on različit od 1, onda prvo izlučimo zajednički faktor, pa tek onda dalje faktoriziramo.

Pr. 5: Faktoriziraj $3a^2-21a+30$

U zadanom izrazu očito možemo izlučiti 3:

$$3a^2-21a+30 = 3\cdot(a^2-7a+10)$$
$$= 3\cdot(a-5)(a-2)$$

21.) Faktoriziraj:

a) $2x^2-22x+60$ d) $4b^2+8b-32$

b) $5u^2-20u-160$

c) $3a^2-6a+3$

(Rj. a) $2\cdot(x^2-11x+30)=2\cdot(x-6)(x-5)$; b) $5\cdot(u^2-4u-32)=5(u-8)(u+4)$;
c) $3(a^2-2a+1)=3(a-1)^2$; d) $4(b^2+2b-8)=4(b+4)(b-2)$)

Međutim, ponekad je koeficijent uz x^2 različit od 1, a ne možemo ga izlučiti (npr. $3x^2+13x-10$). Tada ćemo primijeniti sljedeći postupak:

Središnji član trinoma ax^2+bx+c napišemo kao zbroj dvaju članova (koji sadrže x) takvih da je umnožak njihovih koeficijenata jednak umnošku $a \cdot c$. Nakon toga grupiranjem prvih dvaju članova i drugih dvaju članova taj trinom rastavimo na faktore.

Pr. 6 : Faktoriziraj $3x^2+13x-10$.

Prilikom faktoriziranja izraza $3x^2+13x-10$ na umu trebamo imati dvije stvari:

1. Središnji član, tj. $13x$ trebamo napisati u obliku zbroja. (npr. $8x+5x$, $10x+3x$, $15x-2x$, $14x-x$ itd.) To možemo učiniti na beskonačno mnogo načina, a koji ćemo način odabrati ovisi o sljedećem:
2. Izračunajmo umnožak koeficijenta uz x^2 i slobodnog člana, $3\cdot(-10)=-30$. Dobiveni broj -30 nam je bitan jer i umnožak brojeva u rastavu središnjeg člana mora biti -30.

Iz 1. i 2. zaključujemo da se traže dva broja čiji je zbroj 13, a umnožak -30. To su brojevi 15 i -2.
Te brojeve koristimo za rastav središnjeg člana:

$$3x^2+\underset{15x-2x}{13x}-10 = 3x^2+15x-2x-10$$

Sad grupiramo po dva i izlučujemo zajednički faktor!

$$= 3x\cdot(x+5)-2\cdot(x+5)$$
$$= (x+5)\cdot(3x-2)$$

Time smo faktorizirali zadani izraz.
Rješenje provjeri množenjem zagrada!

Pr. 7: Faktoriziraj $2x^2-5x-12$

Da bismo „rastavili" središnji član, traže se dva broja čiji je zbroj -5, a umnožak $2\cdot(-12)=-24$. To su brojevi -8 i 3. Dakle, središnji član $-5x$ ću zapisati kao $-8x+3x$.

$$\begin{aligned}2x^2-5x-12 &= \underbrace{2x^2-8x}+\underbrace{3x-12}\\ &= 2x\cdot(x-4)+3\cdot(x-4)\\ &= (x-4)\cdot(2x+3)\end{aligned}$$

Pr. 8: Faktoriziraj $6a^2+a-2$

Da bismo „rastavili" središnji član, traže se dva broja čiji je zbroj 1, a umnožak -12 (tj. $6\cdot(-2)$). To su brojevi 4 i -3. Dakle, umjesto a možemo pisati $4a-3a$.

$$\begin{aligned}6a^2+a-2 &= 6a^2+4a-3a-2\\ &= 2a\cdot(3a+2)-(3a+2)\\ &= (3a+2)\cdot(2a-1)\end{aligned}$$

Provjeri to množenjem zagrada!

22) Faktoriziraj:

a) $2y^2+5y+2$ d) $3x^2-11x-4$ g) $2x^2+25x+12$
b) $6a^2+7a+2$ e) $2a^2-3a-5$ h) $4u^2-23u+15$
c) $2x^2-7x+3$ f) $3b^2+26b-9$ i) $-5m^2+11m-2$

(Rj. a) $(y+2)(2y+1)$; b) $(3a+2)(2a+1)$; c) $(x-3)(2x-1)$; d) $(x-4)(3x+1)$; e) $(2a-5)(a+1)$; f) $(b+9)(3b-1)$; g) $(x+12)(2x+1)$; h) $(u-5)(4u-3)$; i) $(m-2)(1-5m)$)

Upravo naučene metode faktoriziranja trebamo koristiti i kod skraćivanja algebarskih razlomaka..

Pr. 9. : Skrati razlomak $\frac{2x^2-x-15}{4x+10}$

Za faktoriziranje brojnika koristimo upravo naučenu metodu, a u nazivniku izlučimo 2 :

$$\frac{2x^2-x-15}{4x+10} = \frac{2x^2-6x+5x-15}{4x+10} = \frac{2x\cdot(x-3)+5\cdot(x-3)}{2(2x+5)} =$$

$$= \frac{(x-3)\cdot\cancel{(2x+5)}}{2\cdot\cancel{(2x+5)}} = \frac{x-3}{2}$$

Pr. 10 : Skrati razlomak $\frac{4a^2-1}{2a^2-7a+3}$

U brojniku imamo razliku kvadrata, a u nazivniku rastavljamo središnji član :

$$\frac{4a^2-1}{2a^2-7a+3} = \frac{(2a+1)(2a-1)}{2a^2-6a-a+3} = \frac{(2a+1)(2a-1)}{2a(a-3)-(a-3)} = \frac{(2a+1)\cancel{(2a-1)}}{(a-3)\cancel{(2a-1)}} = \frac{2a+1}{a-3}$$

23.) Skrati razlomke :

a) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$ c) $\frac{b^2-4}{b^2+b-6}$ e) $\frac{6c^2-5c-4}{9c^2-24c+16}$

b) $\frac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}$ d) $\frac{a^2+3a-10}{3a^2-4a-4}$ f) $\frac{(2a+3)^2-16}{-4a^2-12a+7}$

(Rj. a) $\frac{(x+3)\cancel{(x+2)}}{(x+2)^{\cancel{2}}} = \frac{x+3}{x+2}$; b) $\frac{(a+2)\cancel{(a+1)}}{(a+5)\cancel{(a+1)}} = \frac{a+2}{a+5}$; c) $\frac{\cancel{(b-2)}(b+2)}{(b+3)\cancel{(b-2)}} = \frac{b+2}{b+3}$;

d) $\frac{(a+5)\cancel{(a-2)}}{\cancel{(a-2)}(3a+2)} = \frac{a+5}{3a+2}$; e) $\frac{\cancel{(3c-4)}(2c+1)}{(3c-4)^{\cancel{2}}} = \frac{2c+1}{3c-4}$;

f) $\frac{(2a+3+4)(2a+3-4)}{-4a^2-14a+2a+7} = \frac{(2a+7)(2a-1)}{-2a(2a+7)+(2a+7)} = \frac{\cancel{(2a+7)}(2a-1)}{\cancel{(2a+7)}(1-2a)} = \frac{-\cancel{(1-2a)}}{\cancel{1-2a}} = -1$)

Formula $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ nam ponekad olakšava računanje.

Pr. 1. : Na lakši način izračunaj $540^2 + 2 \cdot 540 \cdot 460 + 460^2$.

Umjesto da računamo točno tako kako piše, primijenimo formulu za kvadrat zbroja (kao što smo je primjenjivali u 16. zadatku):

$$\underbrace{540^2}_{\text{kvadrat od } 540} + 2 \cdot 540 \cdot 460 + \underbrace{460^2}_{\text{kvadrat od } 460} = (540+460)^2 = 1000^2 = 1\,000\,000$$

24) Izračunaj na lakši način:

a) $312^2 - 2 \cdot 312 \cdot 112 + 112^2 =$

b) $752^2 - 2 \cdot 752 \cdot 452 + 452^2 =$

c) $964^2 + 2 \cdot 964 \cdot 36 + 36^2 =$

(Rj. a) $200^2 = 40\,000$; b) $300^2 = 90\,000$; c) $1000^2 = 1\,000\,000$)

U sljedećem zadatku koristi formulu za razliku kvadrata $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

25.) Izračunaj na lakši način:

a) $519^2 - 419^2 =$

b) $111^2 - 11^2 =$

c) $4258^2 - 3258^2 =$

d) $862^2 - 62^2 =$

(Rj. Primijeni formulu za razliku kvadrata: a) $519^2 - 419^2 = (519-419) \cdot (519+419) = 100 \cdot 938 = 93\,800$; b) $111^2 - 11^2 = 100 \cdot 122 = 12\,200$; c) $1000 \cdot 7516 = 7\,516\,000$; d) $800 \cdot 924 = 739\,200$)

DOD-MY
30 AH

Potencije

Svojstva potencija:

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktora}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktora}}}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$ ← recipročna vrijednost broja a

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$ ← recipr. vrijednost broja $\frac{a}{b}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ faktora}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ faktora}}}$$

Potenciranjem na minus prvu dobivamo recipročnu vrijednost zadanog broja (baze).

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{\overbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}^{n \text{ faktora}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktora}}}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

$$a^n : a^m = a^{n-m} \qquad a^{n-m} = a^n : a^m$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n \qquad (a : b)^n = a^n : b^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad a^{n \cdot m} = (a^n)^m = (a^m)^n$$

Pr. 1: Broj 16 napiši u obliku potencije:

a) broja 2

Dakle, broj 2 trebamo množiti sa samim sobom dok ne „stignemo" do 16:

$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

$16 = 2^4$

b) broja 4

Dakle, broj 4 trebamo množiti sa samim sobom.

$16 = 4 \cdot 4 = 4^2$

$16 = 4^2$

c) broja 16

$16 = 16^1$

d) broja $\frac{1}{16}$

$16 = \left(\frac{1}{16}\right)^{-1}$

e) broja $\frac{1}{2}$

Znamo da 16 možemo prikazati kao potenciju broja 2:

$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

f) broja $\frac{1}{4}$

Prvo 16 napišemo kao potenciju broja 4:

$16 = 4 \cdot 4 = 4^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

Pr. 2: a) Broj 81 napiši kao potenciju broja $\frac{1}{3}$.

$81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

b) Broj $\frac{256}{625}$ napiši kao potenciju broja $\frac{5}{4}$.

$\frac{256}{625} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^{-4}$

1) Prvi od zadanih brojeva napiši kao potenciju drugoga:

a) $289, 17$
b) $324, \frac{1}{18}$
c) $\frac{144}{361}, \frac{19}{12}$
d) $\frac{1}{196}, 14$
e) $625, \frac{1}{5}$
f) $\frac{1}{343}, 7$
g) $\frac{512}{729}, \frac{9}{8}$
h) $243, \frac{1}{3}$
i) $\frac{1}{729}, \frac{1}{3}$
j) $\frac{8}{27}, \frac{2}{3}$
k) $\frac{125}{64}, \frac{4}{5}$
l) $1, \frac{2}{7}$

(Rj. a) $289 = 17^2$; b) $324 = 18^2 = \left(\frac{1}{18}\right)^{-2}$; c) $\frac{144}{361} = \left(\frac{19}{12}\right)^{-2}$;
d) $\frac{1}{196} = \frac{1}{14^2} = 14^{-2}$; e) $625 = 5^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$; f) $\frac{1}{343} = \frac{1}{7^3} = 7^{-3}$
g) $\frac{512}{729} = \frac{8\cdot 8\cdot 8}{9\cdot 9\cdot 9} = \left(\frac{8}{9}\right)^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^{-3}$; h) $243 = 3^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$;
i) $\frac{1}{729} = \frac{1}{3^6} = \left(\frac{1}{3}\right)^6$; j) $\frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$; k) $\frac{125}{64} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$; l) $1 = \left(\frac{2}{7}\right)^0$)

Pr. 3: Napiši u obliku potencije:

a) $4 \cdot 2^9$

Uočimo da je zadani izraz umnožak. Drugi faktor je potencija broja 2, pa pokušajmo i prvoga zapisati kao potenciju broja 2:

$\underbrace{4}_{2\cdot 2} \cdot 2^9 = 2^2 \cdot 2^9 = \underline{2^{11}}$

b) $81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7$

81 zapišimo kao potenciju broja $\frac{1}{3}$: $81 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

Primijenimo to na zadani izraz:

$81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$

2. način:

Oba faktora možemo prikazati kao potenciju broja 3, pa imamo:

$\underbrace{81}_{3^4} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^7}_{3^{-7}} = 3^4 \cdot 3^{-7} = 3^{-3}$

Dobili smo jednako rješenje jer je $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3^{-3}$.

c) $3^5 \cdot 2^5$

Primijenimo jednakost $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$:

$3^5 \cdot 2^5 = 6^5$

d) $64 \cdot 3^2$

Drugi faktor je potencija broja 3. Međutim, prvi faktor ne možemo napisati kao potenciju broja 3.
Stoga obratimo pažnju na eksponent – u drugom faktoru eksponent je 2. Možemo li i prvi faktor napisati kao potenciju sa eksponentom 2 ? Možemo, $64 = 8^2$.

$64 \cdot 3^2 = 8^2 \cdot 3^2 = 24^2$

e) $(5^2)^3$

Zadani izraz je potencija, pa tu zapravo niti ništa ne moramo uraditi. Jedino možemo komentirati da se taj izraz može napisati i u obliku još nekih potencija :

$(5^2)^3 = 5^6 = (5^3)^2$

f) $9^8 \cdot 3^7$

Ovdje ni baze ni eksponenti nisu jednaki. Međutim, broj 9 možemo napisati kao potenciju broja 3, pa dobivamo :

$9^8 \cdot 3^7 = (3^2)^8 \cdot 3^7 = 3^{16} \cdot 3^7 = 3^{23}$

g) $125^{-3} \cdot 25^4$

125 i 25 su potencije broja 5 :

$125^{-3} \cdot 25^4 = (5^3)^{-3} \cdot (5^2)^4 = 5^{-9} \cdot 5^8 = 5^{-1}$

h) $(4^7)^2 \cdot 5^{-14}$

$(4^7)^2 \cdot 5^{-14} = 4^{14} \cdot 5^{-14} = 4^{14} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{14} = \left(\frac{4}{5}\right)^{14}$

2) Napiši u obliku potencije:

a) $289 \cdot 17^5$
b) $16 \cdot 16^8 \cdot 256$
c) $\frac{1}{9} \cdot 3^{10}$
d) $\frac{81}{16} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{-6}$
e) $7^{-2} \cdot \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{7}$
f) $4^{16} \cdot 16$
g) $8^{25} \cdot 7^{25}$
h) $6^{30} \cdot 3^{-30}$
i) $7^{10} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{20}$
j) $64^5 \cdot 4^{-7}$
k) $\left(\frac{1}{27}\right)^{14} \cdot 3^{-14}$
l) $17^{-1} \cdot (289)^{-2} \cdot \frac{1}{17}$

(Rj. a) 17^7 ; b) 16^{11} ; c) 3^8 ; d) $\left(\frac{9}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^6 = \left(\frac{9}{4}\right)^8$ ili $\left(\frac{4}{9}\right)^{-8}$;
e) 7^{-5} ili $\left(\frac{1}{7}\right)^5$; f) 4^{18} ; g) 56^{25} ; h) $6^{30} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{30} = \left(\frac{6^2}{3}\right)^{30} = 2^{30}$;
i) 7^{-10} ili $\left(\frac{1}{7}\right)^{10}$; j) $(4^3)^5 \cdot 4^{-7} = 4^{15} \cdot 4^{-7} = 4^8$;
k) $(3^{-3})^{14} \cdot 3^{-14} = 3^{-42} \cdot 3^{-14} = 3^{-56}$ ili $\left(\frac{1}{3}\right)^{56}$; l) 17^{-6})

Proučimo kako se zbrajaju jednake potencije. Podsjetimo se nekih činjenica koje znamo otprije:

$$2a + 7a = 9a$$
$$2b + 7b = 9b$$
$$2a^2 + 7a^2 = 9a^2$$

Odatle slijedi i:

$$2 \cdot 4^8 + 7 \cdot 4^8 = 9 \cdot 4^8$$
$$2 \cdot 3^{10} + 7 \cdot 3^{10} = 9 \cdot 3^{10}$$

(Uoči brojeve 2, 7 i 9 koji se pojavljuju i gore.)

Prouči i sljedeće jednakosti:

$$6 \cdot 5^{13} - 2 \cdot 5^{13} = 4 \cdot 5^{13}$$
$$4 \cdot 9^6 + 9^6 = 5 \cdot 9^6$$
$$19 \cdot 9^6 - 9 \cdot 9^6 + 9^6 = 11 \cdot 9^6$$

Pr. 4: Napiši u obliku potencije:

a) $3 \cdot 2^5 + 5 \cdot 2^5$

Iz prethodnih jednakosti znamo da je:

$3 \cdot 2^5 + 5 \cdot 2^5 = 8 \cdot 2^5$

Međutim, dobiveni izraz nije potencija (već umnožak). Da bismo ga napisali kao potenciju, broj 8 moramo napisati kao potenciju broja 2, pa dobivamo:

$2^3 \cdot 2^5 = \underline{2^8}$

↑ Rješenje zadanog izraza.

b) $4 \cdot 3^8 - 3^8$

$4 \cdot 3^8 - 3^8 = 3 \cdot 3^8 = 3^9$

c) $5 \cdot 18^2 + 11 \cdot 18^2$

$5 \cdot 18^2 + 11 \cdot 18^2 = 16 \cdot 18^2 = 4^2 \cdot 18^2 = 72^2$

d) $3^6 - \frac{2}{3} \cdot 3^6$

$3^6 - \frac{2}{3} \cdot 3^6 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot 3^6 = \frac{1}{3} \cdot 3^6 = 3^{-1} \cdot 3^6 = 3^5$

3) Napiši u obliku potencije:

a) $5^{-9} + 4 \cdot 5^{-9}$

b) $8^{12} + 30 \cdot 8^{12} + 33 \cdot 8^{12}$

c) $144 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 - 44 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3$

d) $16 \cdot 8^7 - 8 \cdot 8^7$

e) $21 \cdot 81^5 + 6 \cdot 81^5$

f) $6^{30} - \frac{35}{36} \cdot 6^{30}$

g) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{12} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{12}$

(Rj. a) $5 \cdot 5^{-9} = 5^{-8}$; b) 8^{14}; c) $100 \cdot 10^{-3} = 10^2 \cdot 10^{-3} = 10^{-1}$ ili $\left(\frac{1}{10}\right)^1$;
d) 8^8; e) $27 \cdot 81^5 = 3^3 \cdot (3^4)^5 = 3^3 \cdot 3^{20} = 3^{23}$; f) 6^{29};
g) $\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{12} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{12} = \left(\frac{6}{5}\right)^{11}$ ili $\left(\frac{5}{6}\right)^{-11}$)

Pr. 5 : Dopiši potenciju koja nedostaje :

a) $5^8 = \_\_\_ \cdot 5^6$

Na praznoj crti očito treba biti potencija broja 5, a eksponent takav da zbrojen sa 6 daje 8 (koristimo jednakost $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$)

$5^8 = \underline{5^2} \cdot 5^6$

b) $3^{30} = \_\_\_ \cdot 3^{16}$

Očito je: $3^{30} = \underline{3^{14}} \cdot 3^{16}$

c) $27^8 = \_\_\_ \cdot 3^3$

Prvo 27^8 napišimo kao potenciju broja 3: $27^8 = (3^3)^8 = 3^{24}$.

Dakle, sad zadatak možemo ovako zapisati

$3^{24} = \_\_\_ \cdot 3^3$

Sad je očito:

$3^{24} = \underline{3^{21}} \cdot 3^3$, tj. $27^8 = \underline{3^{21}} \cdot 3^3$.

d) $21^5 = \_\_\_ \cdot 7^5$

21 ne možemo napisati kao potenciju broja 7. Proučimo eksponente i primijenimo jednakost $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$:

$21^5 = \underline{3^5} \cdot 7^5$

e) $32^8 = \_\_\_ \cdot 4^7$

I 32 i 4 su potencije broja 2: $32^8 = (2^5)^8 = 2^{40}$, $4^7 = (2^2)^7 = 2^{14}$.

Dakle:

$2^{40} = \underline{2^{26}} \cdot 2^{14}$, tj. $32^8 = \underline{2^{26}} \cdot 4^7$

Pr. 6 : Dopiši broj koji nedostaje:

a) $5^{13} = \_\_\_ \cdot 5^{10}$

Očito je $5^{13} = \underline{5^3} \cdot 5^{10}$. Sad još izračunajmo 5^3 (to je 125), pa dobivamo rješenje:

$5^{13} = \underline{125} \cdot 5^{10}$

b) $32^8 = \_\_\_ \cdot 2^{34}$

Napišimo 32^8 kao potenciju broja 2: $32^8 = (2^5)^8 = 2^{40}$

$2^{40} = \underline{2^6} \cdot 2^{34}$

$2^6 = 64$

$2^{40} = \underline{64} \cdot 2^{34}$

c) $56^9 = \_\_\_ \cdot 28^9$

Očito je $56^9 = \underline{2^9} \cdot 28^9$, tj. $56^9 = \underline{512} \cdot 28^9$.

$2^9 = 512$

4) Napiši broj koji nedostaje:

a) $7^{20} = \_\_\_ \cdot 7^{18}$

b) $2^{10} = \_\_\_ \cdot 4^4$

c) $6^{14} = \_\_\_ \cdot 6^{13}$

d) $8^{20} = \_\_\_ \cdot 8^{22}$

e) $18^6 = \_\_\_ \cdot 9^6$

f) $4^3 = \_\_\_ \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

(Rj. a) 49 ; b) 4 ; c) 6 ; d) $\frac{1}{64}$ (8^{-2}) ;
e) 64 (2^6) ; f) $2^6 = \_\_\_ \cdot 2^{-3}$, $2^6 = \underline{2^9} \cdot 2^{-3}$, $2^6 = \underline{512} \cdot 2^{-3}$)

Pr. 7: Izračunaj i rezultat napiši u obliku potencije

a) $6 \cdot 3^9 + 3^{10}$

Uočimo da potencije nisu iste!
Ipak, baze potencija su iste, pa možemo „namjestiti" da i eksponenti budu jednaki. Pokušajmo iz 3^{10} dobiti 3^9.
To zapravo znači da se pitamo koji broj treba dopisati na crtu: $3^{10} = \_\_\_ \cdot 3^9$. Iz prijašnjeg zadatka znamo da treba dopisati broj 3, pa imamo:

$$
\begin{aligned}
6 \cdot 3^9 + 3^{10} &= 6 \cdot 3^9 + 3 \cdot 3^9 \\
&= 9 \cdot 3^9 \\
&= 3^2 \cdot 3^9 \\
&= 3^{11}
\end{aligned}
$$

← Rezultat još trebamo napisati u obliku potencije!

b) $9\cdot 3^9 + 2\cdot 3^{11}$

Potenciju sa većim eksponentom svodimo na potenciju sa manjim:

$$9\cdot 3^9 + 2\cdot \underset{3^2\cdot 3^9}{3^{11}} = 9\cdot 3^9 + 2\cdot 9\cdot 3^9$$
$$= 9\cdot 3^9 + 18\cdot 3^9$$
$$= 27\cdot 3^9$$
$$= 3^3\cdot 3^9$$
$$= 3^{12}$$

5) Napiši u obliku potencije:

a) $3\cdot 2^6 + 10\cdot 2^5$
b) $2\cdot 4^8 + 32\cdot 4^6$
c) $8\cdot 2^5 - 16\cdot 2^3$
d) $15^{10} - 15^9 - 195\cdot 15^8$
e) $4^{100} - 3\cdot 4^{99}$
f) $7^{100} - 7^{99} - 35\cdot 7^{98}$
g) $5^4 + 3\cdot 5^3$
h) $2\cdot 8^6 - 12\cdot 8^5$
i) $14^6 + 18\cdot 14^5$

(Rj. a) 2^9; b) 4^9; c) 2^7; d) 15^9; e) 4^{99}; f) 7^{99};
g) $8\cdot 5^3 = 2^3\cdot 5^3 = 10^3$; h) $4\cdot 8^5 = 2^2\cdot (2^3)^5 = 2^2\cdot 2^{15} = 2^{17}$;
i) $32\cdot 14^5 = 2^5\cdot 14^5 = 28^5$)

Riješi zadatke:

ZZ 28 / 210, 211, 215, 216

6) Izračunaj:

a) $24300 + 2^3\cdot \{2^4 - 2^2\cdot [3^6 - 2\cdot (4^3 - 3^4)]\} - 13$
b) $(-1)^6 + 3\cdot(-1)^5 - 4\cdot(-1)^4 - 5\cdot(-1)^3 + 6\cdot(-1)^2 - (-11) + (-2)^3$
c) vrijednost izraza $a^4 - a^3b + ab^3 + b^4$ za $a = -3$, $b = -2$

(Rj. a) -1; b) 8; c) 67)

7) Koliko je puta potencija 7^5 veća od potencije 7^3?

(Rj. 49 puta (7^2).)

8) Reduciraj:

a) $2x^3+3x^3+4x^3$

b) $8a^4-9a^4$

c) $2b^3+3b^2-5b^3$

d) $5a^3-[2a^2+(6a^4-4a^3)]-(3a+2)$

e) $a^3+\frac{3}{8}a^2b+\frac{3}{8}ab^2+\frac{1}{8}b^3-\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{4}a^2b-\frac{3}{8}ab^2-\frac{1}{2}b^3$

(Rj- a) $9x^3$; b) $-a^4$; c) $-3b^3+3b^2$; d) $-6a^4+9a^3-2a^2-3a-2$;
e) $\frac{7}{8}a^3+\frac{1}{8}a^2b-\frac{3}{8}b^3$)

Primjenivši jednakost $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ dobivamo:

$x^3 \cdot x^5 = x^8$

$a^7 \cdot a \cdot a^4 = a^{12}$

$3a^2 \cdot 5a^4 = 15a^6$

$a^2b \cdot 8a^3b^2 = 8a^5b^3$

$a^2bc^4 \cdot a^3b^6c = a^5b^7c^5$

9) Pomnoži (i reduciraj):

a) $7ab^5 \cdot 3a^2b^3$

b) $4x^2y \cdot 5y \cdot 6x^7y^3$

c) $a^2b^3+3ab \cdot ab^2-5a^2 \cdot 4b^3$

d) $3^a \cdot 3^{5a} \cdot 3^{2a}$

e) $2^x \cdot 2^{4x} \cdot 2^{1-3x}$

f) $\frac{2a^3b^4}{3x^2y} \cdot \frac{4a^2b^3}{8xy^4}$

(Rj- a) $21a^3b^8$; b) $120x^9y^5$; c) $-16a^2b^3$; d) $3^{a+5a+2a}=3^{8a}$;
e) $2^{x+4x+1-3x}=2^{2x+1}$; f) $\frac{a^5b^7}{3x^3y^5}$)

Uoči da nam jednakost $a^n : a^m = a^{n-m}$ govori kako ćemo u razlomcima kratiti potencije.

Pr. 8: Skrati $\frac{a^5}{a^8}$

Kratimo sa a^5. U brojniku ostaje 1, a u nazivniku računamo $a^8 : a^5 = a^3$, pa ostaje a^3.

Dakle, $\frac{\cancel{a^5}^{1}}{\cancel{a^8}a^3} = \frac{1}{a^3}$

Pr. 9: Skrati $\frac{15x^7y^3z}{18x^4y^9z^2}$

Kratimo redom: prvo 15 i 18, zatim x-eve ...

$$\frac{\overset{5}{\cancel{15}}\overset{x^3}{\cancel{x^7}}\cancel{y^3}\cancel{z}}{\underset{6}{\cancel{18}}\cancel{x^4}\underset{y^6}{\cancel{y^9}}z^{\cancel{2}}} = \frac{5x^3}{6y^6z}$$

10) Skrati:

a) $\frac{8a^3b^2}{7a^2b^2}$ c) $\frac{6x^8y^{12}}{3x^7y^3}$

b) $\frac{30m^5n}{12m^9n^3}$ d) $\frac{12x}{24x^5}$

(Rj. a) $\frac{8a}{7}$; b) $\frac{5}{2m^4n^2}$; c) $2xy^9$ d) $\frac{1}{2x^4}$)

11) Podijeli:

a) $a^{17} : a^9$

b) $(ab)^4 : (ab)^3$

c) $(-b)^{11} : (-b)^6$

d) $(a-b)^9 : (a-b)^2 : (a-b)^6$

e) $30a^7b^3 : 15a^5b^2$

f) $(-4x^3y^5z^6) : (-2xy^3z^5)$

g) $[45(a-b)^7] : [-15(a-b)^6]$

h) $1024 : 16$

(Rj. a) a^8 ; b) ab ; c) $(-b)^5 = -b^5$; d) $a-b$; e) $2a^2b$;
f) $2x^2y^2z$; g) $-3(a-b) = -3a+3b$; h) $2^{10} : 2^4 = 2^6 = 64$)

Primjenjujući jednakosti $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ i $a^n : b^n = (a:b)^n$ možemo pomnožiti-podijeliti sljedeće izraze:

$$2^x \cdot 3^x \cdot 4^x \cdot 5^x = (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)^x = 120^x$$

$$8^m : 4^m = (8:4)^m = 2^m$$

12) Pomnoži, odnosno podijeli:

a) $\left(\frac{4}{3}\right)^p \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^p \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^p$

b) $a^x \cdot b^x$

c) $24^a : 8^a$

d) $x^{a-b} : y^{a-b}$

e) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^3 \cdot \left(\frac{3a}{4b}\right)^3 : \left(-\frac{5a}{2b}\right)^3$

(Rj. a) $\left(\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{-\cancel{3}}{\cancel{2}}\right)^p = (-1)^p$; b) $(a \cdot b)^x$; c) 3^a ; d) $(x:y)^{a-b}$ ili $\left(\frac{x}{y}\right)^{a-b}$; e) $\left(\frac{\cancel{2}a}{\cancel{3}b} \cdot \frac{\cancel{3}a}{\cancel{4}_2 b} : \frac{-5a}{2b}\right)^3 = \left(\frac{a^2}{2b^2} \cdot \frac{-2b}{5a}\right)^3 = \left(\frac{-a}{5b}\right)^3$)

Jednakost $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ nam omogućuje da potenciramo sljedeće izraze:

$$(x^3)^4 = x^{12}$$
$$(y^2)^4 = y^8$$
$$(2x^3y^2)^4 = 16x^{12}y^8$$
$$(3a^5bc^3)^4 = 81a^{20}b^4c^{12}$$

13) Izvrši naznačene operacije:

a) $(3x^5y^2)^3$

b) $(4a^nb^3)^2$

c) $\left(\frac{2x^8y^2}{z^7}\right)^5 \cdot \left(\frac{z^9y^3}{4x^{10}}\right)^4$

d) $(2a^4)^7 + 4 \cdot (a^2)^{14} - (4a^{14})^2$

e) $\left(\frac{-2x^2y^3}{ab}\right)^3 : \left(\frac{4xy^2z}{a^2b}\right)^2$

f) $\left(\frac{3a+b}{a-b}\right)^2 \cdot [(3a+b)\cdot(a-b)]^2$

g) $(x-a)^3 \cdot (a-x)^5$

(Rj. a) $27x^{15}y^6$; b) $16a^{2n}b^6$; c) $\frac{\cancel{32}\cancel{x^{40}}y^{10}}{\cancel{z^{35}}} \cdot \frac{\cancel{z^{36}} \cdot y^{12}}{\cancel{256}_8\cancel{x^{40}}} = \frac{y^{22}z}{8}$;

d) $128a^{28} + 4a^{28} - 16a^{28} = 116a^{28}$; e) $\frac{-\cancel{8}x^{6}y^{9}}{a^3b^3} \cdot \frac{a^4b^2}{\cancel{16}_2 x^2y^4z^2} = \frac{-ax^4y^5}{2bz^2}$;

f) $\frac{(3a+b)^2}{\cancel{(a-b)^2}} \cdot (3a+b)^2 \cdot \cancel{(a-b)^2} = (3a+b)^4$; g) $x-a$ i $a-x$ su suprotni, pa u jednoj zagradi izlučimo minus. Pošto je eksponent neparan, minus će „preživjeti" potenciranje: $-(a-x)^3 \cdot (a-x)^5 = -(a-x)^8$.
Da smo iz druge zagrade izlučili minus, dobili bismo $-(x-a)^8$, a to je isto!)

Pr. 10: Izvrši naznačene operacije i riješi se negativnog eksponenta:

a) x^{-2}, y^{-7}, $\left(\frac{1}{a}\right)^{-8}$, b^{-x}

$x^{-2}=\frac{1}{x^2}$, $y^{-7}=\frac{1}{y^7}$, $\left(\frac{1}{a}\right)^{-8}=a^8$, $b^{-x}=\frac{1}{b^x}$

b) $\left(\frac{2x}{a^2y^3}\right)^{-4}=\frac{a^8y^{12}}{16x^4}$

c) $\frac{x^{-3}y^2}{7a^6b^{-5}}$

Negativan eksponent „šalje" potenciju iz brojnika u nazivnik, odnosno iz nazivnika u brojnik.
U ovom će primjeru x^{-3} „otići" u nazivnik i tamo postati x^3. b^{-5} će „otići" u brojnik i tamo postati b^5.

$$\frac{x^{-3}y^2}{7a^6b^{-5}}=\frac{y^2b^5}{7a^6x^3}$$

c) $(2a+b)^{-1}=\frac{1}{2a+b}$

d) $\left(-\frac{2}{b}\right)^{-3}=\left(-\frac{b}{2}\right)^3=\frac{-b^3}{8}$

e) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{-2}$

Zagradu u ovom obliku ne možemo potencirati na -2. Prvo zbrojimo ono što je u njoj, zatim ćemo zamijeniti brojnik i nazivnik (zbog minusa u eksponentu) i na kraju kvadrirati.

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{-2}=\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)^{-2}=\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^2=\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4}$$

f) $\left(\frac{5a^{-4}b^2}{2^{-2}x^3b^{-1}}\right)^{-2}$

Prvo sredimo izraz u zagradi, a onda zagradu potencirajmo:

$$\left(\frac{5a^{-4}b^2}{2^{-2}x^3b^{-1}}\right)^{-2}=\left(\frac{\overset{20}{5\cdot 4}b^3}{a^4x^3}\right)^{-2}=\left(\frac{a^4x^3}{20b^3}\right)^2=\frac{a^8x^6}{400b^6}$$

OCD-113
43
AH

14) Izvrši naznačene operacije (i riješi se negativnih eksponenata):

a) $\frac{1}{(a-b)^{-2}}$

b) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-1}$

c) $\frac{2ab^{-2}c}{c^{-3}d^2e^4}$

d) $\left(\frac{2^{-1}x^3y^{-2}}{a^5b^{-4}}\right)^{-1}$

e) $\left(\frac{x^{-1}a^2}{y^{-3}b^3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{a^{-3}x}{yb^{-2}}\right)^{-3}$

(Rj: a) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; b) $\frac{a-b}{a+b}$; c) $\frac{2ac^4}{b^2d^2e^4}$;

d) $\left(\frac{x^3b^4}{2a^5y^2}\right)^{-1}=\frac{2a^2y^5}{x^3b^4}$; e) $\left(\frac{a^2y^3}{xb^3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{xb^2}{a^3y}\right)^{-3}=$

$=\left(\frac{xb^3}{a^2y^3}\right)^2\cdot\left(\frac{a^3y}{xb^2}\right)^3=\frac{\cancel{x^2}\cancel{b^6}}{\cancel{a^4}\cancel{y^6}y^3}\cdot\frac{\overset{a^5}{\cancel{a^9}}\cancel{y^3}}{x^{\cancel{3}}\cancel{b^6}}=\frac{a^5}{xy^3}$)