Na natjecanju Lucko 2016. godine, kolegica **Maja Zelčić** održala je predavanje za učitelje mentore pod nazivom Diofantske jednadžbe. Uz prezentaciju smo naknadno mailom dobili i ovaj materijal.

Najtoplije zahvaljujem kolegici Maji Zelčić na dozvoli da ovaj materijal objavim na svojim web stranicama.

Antonija Horvatek
Matematika na dlanu
http://www.antonija-horvatek.from.hr/

Metoda dijeljenja

U skupu cijelih brojeva riješi jednadžbe:

1. $xy + 2x = 7$

   Rješenje:

$$xy + 2x = 7 \quad \Rightarrow \quad xy = 7 - 2x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{7-2x}{x} \quad \Rightarrow \quad y = -2 + \frac{7}{x}$$

x	$\frac{7}{x}$	$y = -2 + \frac{7}{x}$
-7	-1	-3
-1	-7	-9
1	7	5
7	1	-1

$$(x,y) \in \{(-7,-3),(-1,-9),(1,5),(7,-1)\}$$

2. $xy = x + y$

   Rješenje:

$$xy = x + y \quad \Rightarrow \quad xy - y = x \quad \Rightarrow \quad y(x-1) = x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{x-1}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{x-1+1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{(x-1)+1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad y = 1 + \frac{1}{x-1}$$

x - 1	x	$\frac{1}{x-1}$	$y = 1 + \frac{1}{x-1}$
1	2	1	2
-1	0	-1	0

$$(x,y) \in \{(2,2),(0,0)\}$$

3. $xy + 3y - 5x = 18$

Rješenje:

$$xy+3y-5x=18 \Rightarrow xy+3y=5x+18 \Rightarrow y(x+3)=5x+18 \Rightarrow y=\frac{5x+18}{x+3}$$

$$\Rightarrow y=\frac{5x+15+3}{x+3} \Rightarrow y=\frac{5(x+3)+3}{x+3} \Rightarrow y=5+\frac{3}{x+3}$$

$x + 3$	x	$\frac{3}{x+3}$	$y=5+\frac{3}{x+3}$
3	0	1	6
1	-2	3	8
-1	-4	-3	2
-3	-6	-1	4

$$(x,y)\in\{(0,6),(-2,8),(-1,-2),(-6,4)\}$$

4. $7(x+y)=xy$

Rješenje:

$$xy=7(x+y) \Rightarrow xy-7y=7x \Rightarrow y(x-7)=7x \Rightarrow y=\frac{7x}{x-7}$$

$$\Rightarrow y=\frac{7x-49+49}{x-7} \Rightarrow y=\frac{7(x-7)+49}{x-7} \Rightarrow y=7+\frac{49}{x-7}$$

x - 7	x	$\frac{49}{x-7}$	$y=7+\frac{49}{x-7}$
1	8	49	56
-1	6	-49	-42
7	14	7	14
-7	0	-7	0
49	56	1	8
-49	-42	-1	6

$$(x,y)\in\{(8,56),(6,-42),(14,14),(0,0),(56,8),(-42,6)\}$$

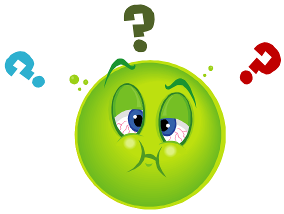
5. $xy+3y^2=11$

Rješenje:

$$xy=11-3y^2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-3y^2+11}{y} \quad \Rightarrow \quad x=-3y+\frac{11}{y}$$

y	-3y	$\frac{11}{y}$	$x=-3y+\frac{11}{y}$
1	-3	11	8
-1	3	-11	-8
11	-33	1	-32
-11	33	-1	32

$$(x,y)\in\{(8,1),(-8,-1),(-32,11),(32,-11)\}$$



Metoda posljednje znamenke

Dokaži da jednadžbe nemaju rješenja u skupu cijelih brojeva.

6. $10x + 20y + 30z = 2016$

Rješenje:

Brojevi $10x$, $20y$ i $30z$ su djeljivi s 10 pa im je zadnja znamenka 0. Njihov zbroj također završava na 0. Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 6, to zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

7. $x(x+2) = 2016$

Rješenje:

Pogledajmo sve mogućnosti zadnje znamenke umnoška $x\,(x + 2)$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x+2$	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
$x(x+2)$	0	4	8	5	4	5	8	3	0	9

Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 6, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

8. $x^2 + 10y = 1234567$

Rješenje:

Pogledajmo zadnje znamenke kvadrata cijelih brojeva:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Dakle, kvadrat cijelog broja može završavati jednom od znamenaka 0, 1, 4, 5, 6 ili 9. S obzirom da $10y$ završava znamenkom 0, zadnja znamenka od x^2+10y može biti 0, 1, 4, 5, 6 ili 9.

Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 7, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

9. $x^2 - 5y = 8642468$

Rješenje:

Jer je x cijeli broj njegov kvadrat može završavati jednom od znamenaka 0, 1, 4, 5, 6, 9, a $5y$ može završavati znamenkom 0 ili 5.

Pogledajmo sve mogućnosti zadnje znamenke razlike $x^2 – 5y$:

+	0	1	4	5	6	9
0	0	1	4	5	6	9
5	5	6	9	0	1	4

Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 8, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

10. $x^2\left(x^2-3\right)=2016$

Rješenje:

Jer je x cijeli broj njegov kvadrat može završavati jednom od znamenaka 0, 1, 4, 5, 6 ili 9.

Pogledajmo sve mogućnosti zadnje znamenke umnoška $x^2\,(x^2 - 3)$:

x^2	0	1	4	5	6	9
$x^2 - 3$	7	8	1	2	3	6
$x^2\left(x^2-3\right)$	0	8	4	0	8	4

Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 6, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

11. $x^4 + y^4 = 33...33$ (100 trojki)

Rješenje:

Jer je x cijeli broj njegov kvadrat može završavati jednom od znamenaka 0, 1, 4, 5, 6, 9, a x^4 može završavati znamenkom 0, 1, 6 ili 5.

Pogledajmo sve mogućnosti zadnje znamenke zbroja $x^4 + y^4$:

+	0	1	5	6
0	0	1	5	6
1	1	2	6	7
5	5	6	0	1
6	6	7	1	2

Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 3, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Metoda faktorizacije

12. Koliko ima pravokutnih trokuta čije su sve stranice cjelobrojne, a jedna kateta je 6 cm?

Rješenje:

Kateta a = 6 cm.

Vrijedi: $a^2+b^2=c^2 \quad \Rightarrow \quad 36+b^2=c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2-b^2=36 \quad \Rightarrow \quad (c-b)(c+b)=36$

Primijetimo da vrijedi:

- stranice cjelobrojne (prirodne)
- hipotenuza veća od katete, tj, $c-b>0$
- $c-b<c+b$,

pa je dovoljno promatrati ove slučajeve:

c - b	*c + b*	2*c*	*c*	*b*
1	36	37		
2	18	20	10	8
3	12	15		
4	9	13		

Postoji samo jedan pravokutan trokut čije su sve stranice cjelobrojne s katetom 6 cm.

Riješi u skupu cijelih brojeva jednadžbe:

13. $x^2-7=2xy$

Rješenje:

$x^2-7=2xy \quad \Rightarrow \quad x^2-2xy=7 \quad \Rightarrow \quad x(x-2y)=7$

x	*x* - 2*y*	-2*y*	*y*
1	7	6	-3
-1	-7	-6	3
7	1	-6	-3
-7	-1	6	3

$(x,y)\in\{(1,-3),(-1,3),(7,-3),(-7,3)\}$

14. $x^2 - y^2 = 2017$

Rješenje:

$x^2 - y^2 = 2017 \quad \Rightarrow \quad (x-y)(x+y) = 2017$

2017 je prost broj, pa promatramo slučajeve:

$x - y$	$x + y$	$2x$	x	y
1	2017	2018	1009	1008
-1	-2017	-2018	-1009	-1008
2017	1	2018	1009	-1008
-2017	-1	-2018	-1009	1008

$(x,y) \in \{(1009,1008),(1009,-1008),(-1009,1008),(-1009,-1008)\}$

15. $6x^2 - 13xy + 6y^2 = 4$

Rješenje:

$6x^2 - 13xy + 6y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 - 9xy - 4xy + 6y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 3x(2x-3y) - 2y(2x-3y) = 4$

$(2x-3y)(3x-2y) = 4$

$A =$ $2x - 3y$	$B =$ $3x - 2y$	$2A =$ $4x - 6y$	$-3B =$ $-9x + 6y$	$2A - 3B =$ $-5x$	x	$3x$	$3x - B =$ $2y$	y
1	4	2	-12	-10	2	6	2	1
2	2	4	-6	-2				
4	1	8	-3	5	-1	-3	-4	-2
-1	-4	-2	12	10	-2	-6	-2	-1
-2	-2	-4	6	2				
-4	-1	-8	3	-5	1	3	4	2

$(x,y) \in \{(2,1),(-1,-2),(-2,-1),(1,2)\}$

16. $x^2 - 5xy + 6y^2 = 3$

Rješenje:

$x^2 - 5xy + 6y^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3xy - 2xy + 6y^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x(x-3y) - 2y(x-3y) = 3$

$\Rightarrow \quad x(x-3y) - 2y(x-3y) = 3 \quad \Rightarrow \quad (x-3y)(x-2y) = 3$

$A =$ $x - 3y$	$B =$ $x - 2y$	$B - A =$ y	$2y$	$B + 2y =$ x
1	3	2	4	7
3	1	-2	-4	-3
-1	-3	-2	-4	-7
-3	-1	2	4	3

$(x, y) \in \{(7,2), (-3,-2), (-7,-2), (3,2)\}$

Riješi jednadžbe u skupu prirodnih brojeva:

17. $xyz + xy = x + xz + 3$

Rješenje:

$xyz + xy = x + xz + 3 \quad \Rightarrow \quad xy(z+1) = x(z+1) + 3 \quad \Rightarrow \quad xy(z+1) - x(z+1) = 3$

$x(y-1)(z+1) = 3$

x	$y - 1$	$z + 1$	y	z
1	1	3	2	2
1	3	1	4	0
3	1	1	2	0

$(x, y, z) \in \{(1,2,2), (1,4,0), (3,2,0)\}$

Metoda zbroja kvadrata

18. Koliko rješenja u skupu cijelih brojeva ima jednadžba $x^2 + y^2 + z^2 = 5$?

Rješenje:

$x^2 + y^2 + z^2 = 5$

Zbroj kvadrata tri cijela broja je 5 samo ako su to 4, 1 i 0.

x^2	y^2	z^2	x	y	z
0	1	4	0	1	2
			0	1	-2
			0	-1	2
			0	-1	-2
0	4	1	0	2	1
			0	-2	1
			0	2	-1
			0	-2	-1
1	0	4	1	0	2
			1	0	-2
			-1	0	2
			-1	0	-2
1	4	0	1	2	0
			1	-2	0
			-1	2	0
			-1	-2	0
4	0	1	2	0	1
			-2	0	1
			2	0	-1
			-2	0	-1
4	1	0	2	1	0
			-2	1	0
			2	-1	0
			-2	-1	0

Jednadžba ima 24 rješenja.

Riješi u skupu cijelih brojeva jednadžbe:

19. $n^2 - 4n + 3 + m^2 = 0$

Rješenje:

$$n^2 - 4n + 3 + m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad n^2 - 4n + 4 - 1 + m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (n-2)^2 + m^2 = 1$$

Zbroj kvadrata dva cijela broja je 1 samo ako su ti kvadrati 0 i 1.

$(n - 2)^2$	m^2	$n - 2$	m	n
0	1	0	1	2
		0	-1	2
1	0	1	0	3
		-1	0	1

$$(m,n) \in \{(1,2),(-1,2),(0,3),(0,1)\}$$

20. $x^2 + 6x + y^2 + 4y = 0$

Rješenje:

$$x^2 + 6x + y^2 + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 + 4y + 4 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+3)^2 + (y+2)^2 = 13$$

Zbroj kvadrata dva cijela broja je 13 samo ako su ti kvadrati 4 i 9.

$(x + 3)^2$	$(y + 2)^2$	$x + 3$	$y + 2$	x	y
4	9	2	3	-1	1
		2	-3	-1	-5
		-2	3	-5	1
		-2	-3	-5	-5
9	4	3	2	0	0
		3	-2	0	-4
		-3	2	-6	0
		-3	-2	-6	-4

$$(x,y) \in \{(-1,1),(-1,-5),(-5,1),(-5,-5),(0,0),(0,-4),(-6,0),(-6,-4)\}$$

21. $(2x+y)^2 = 5-(3x+2y)^2$

Rješenje:

$(2x+y)^2+(3x+2y)^2=5$

Zbroj kvadrata dva cijela broja je 5 samo ako su ti kvadrati 1 i 4.

$(2x+y)^2$	$(3x+2y)^2$	$A =$ $2x+y$	$B =$ $3x+2y$	$-2A =$ $-4x-2y$	$-2A+B=$ $-x$	x	$A-2x=$ y
1	4	1	2	-2	0	0	1
		1	-2	-2	-4	4	-7
		-1	2	2	4	-4	7
		-1	-2	2	0	0	-1
4	1	2	1	-4	-3	3	-4
		2	-1	-4	-5	5	-8
		-2	1	4	5	-5	8
		-2	-1	4	3	-3	4

$(x,y)\in\{(0,1),(4,-7),(-4,7),(0,-1),(3,-4),(5,-8),(-5,8),(-3,4),\}$

22. Riješi u skupu prirodnih brojeva jednadžbu $x^2+y^2+z^2=8x-2z-8$.

Rješenje:

$x^2+y^2+z^2=8x-2z-8 \quad \Rightarrow \quad x^2-8x+y^2+z^2+2z=-8$

$x^2-8x+16+y^2+z^2+2z+1=-8+17 \quad \Rightarrow \quad (x-4)^2+y^2+(z+1)^2=9$

Zbroj kvadrata tri cijela broja je 9 ako su ti kvadrati 0, 0, 9 ili 1,4,4.

$(x-4)^2$	y^2	$(z+1)^2$	$x-4$	y	$z+1$	x	z
0	0	9	0	0	3	4	2
0	9	0	0	3	0	4	-1
9	0	0	3	0	0	7	-1
1	4	4	1	2	2	5	1
4	1	4	2	1	2	6	1
4	4	1	2	2	1	6	0

$(x,y,z)\in\{(4,0,2),(5,2,1),(6,1,1)\}$

Primjena diofantskih jednadžbi

23. Odredi dvoznamenkasti broj koji je jednak dvostrukom umnošku svojih znamenki.

Rješenje:

$\overline{xy} = 2xy$, x i y znamenke, $x \neq 0$

$$10x + y = 2xy \quad \Rightarrow \quad 2xy - y = 10x \quad \Rightarrow \quad y(2x-1) = 10x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{10x}{2x-1}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{10x-5+5}{2x-1} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5(2x-1)+5}{2x-1} \quad \Rightarrow \quad y = 5 + \frac{5}{2x-1}$$

$2x$ - 1	$2x$	x	$\frac{5}{2x-1}$	$y = 5 + \frac{5}{2x-1}$
1	2	1	5	10
-1	0	0		
5	6	3	1	6
-5	-4	-2		

$\overline{xy} = 36$

24. Odredi sve parove cijelih brojeva x i y čiji je umnožak pet puta veći od njihova zbroja.

Rješenje:

$$xy = 5(x+y) \quad \Rightarrow \quad xy - 5y = 5x \quad \Rightarrow \quad y(x-5) = 5x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5x}{x-5}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{5x-25+25}{x-5} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5(x-5)+25}{x-5} \quad \Rightarrow \quad y = 5 + \frac{25}{x-5}$$

x - 5	x	$\frac{25}{x-5}$	$y = 5 + \frac{25}{x-5}$
1	6	25	30
-1	4	-25	-20
5	10	5	10
-5	0	-5	0
25	30	1	6
-25	-20	-1	4

$(x, y) \in \{(6,30), (4,-20), (10,10), (0,0), (30,6), (-20,4)\}$

25. Ako zbroju godina dvoje djece dodamo umnožak njihovih godina, dobiva se 34. Koliko godina ima svako dijete?

Rješenje:

$$x+y+xy=34 \quad \Rightarrow \quad x+xy+y+1=34+1 \quad \Rightarrow \quad x(y+1)+(y+1)=35 \quad \Rightarrow \quad (y+1)(x+1)=35$$

$x+1$	$y+1$	x	y
1	35	0	34
5	7	4	6
7	5	6	4
35	1	34	0

Djeca imaju 4 i 6 godina.