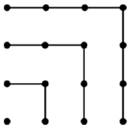
MATEMATIČKI KLOKAN S
RJEŠENJA

Pitanja za 3 boda:

1. Promatrajući sliku možemo zaključiti $1+3+5+7=4\times 4$.



Koja je vrijednost izraza $1+3+5+7+9+11+13+15+17$?

A) 14×14 B) 9×9 C) $4 \times 4 \times 4$ D) 16×16 E) 7×9.

B.

2. Ako oba retka imaju jednake sume, koliko iznosi * ?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	*

A) 1010 B) 1020 C) 1910 D) 1990 E) 2000

C.
Suma 1.retka je 2065, a suma poznatih članova 2.retka je 155. Umjesto * mora biti broj 1910.

3. Dvije prazne kocke imaju osnovice površina 1 dm^2 i 4 dm^2. Želimo napuniti veću kocku vodom koristeći manju kocku. Koliko puta ćemo je puniti?

A) 2 puta B) 4 puta C) 6 puta D) 8 puta E) 16 puta

D.
Volumen veće kocke je 8 dm^3, a manje 1 dm^3.

4. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva djeljivih s 5, a čije su sve znamenke neparne?

A) 900 B) 625 C) 250 D) 125 E) 100

D.

Četveroznamenkasti broj neparnih znamenaka djeljiv s 5 ima oblik $\overline{abc5}$. Znamenku a možemo izabrati na 5 načina, isto tako znamenke b i c. Takvih brojeva ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

5. Upravitelj jednog poduzeća je izjavio: ″ Svaki od naših zaposlenika ima najmanje 25 godina.″ Kasnije se ispostavilo da nije bio u pravu. Znači:

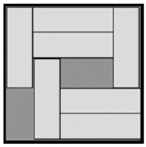
A) svi zaposlenici u poduzeću imaju točno 25 godina
B) svi zaposlenici u poduzeću imaju više od 26 godina
C) nijedan od zaposlenika u poduzeću nema još 25 godina
D) neki od zaposlenika u poduzeću ima manje od 25 godina
E) neki od zaposlenika u poduzeću ima točno 26 godina

D.

6. Koji od sljedećih brojeva može biti broj bridova neke prizme?

A) 100 B) 200 C) 2008 D) 2009 E) 2010

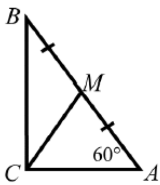
E.
Broj bridova svake prizme je djeljiv s 3, pa je taj broj 2010.



7. U kutiji je sedam pločica dimenzija 3 x 1. Želimo pomaknuti nekoliko pločica da bi oslobodili mjesto za još jednu pločicu. Koliko najmanje pločica moramo pomaknuti?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) nemoguće je

B.



7. U pravokutnom trokutu ABC točka M je polovište hipotenuze $\overline{AB}$ i $|\angle A| = 60°$. Kolika je veličina kuta

$\angle BMC$?

A) 105° B) 108° C) 110° D) 120° E) 125°

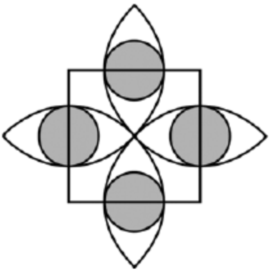
D.
ΔMAC je jednakostraničan jer je točka M središte pravokutnom trokutu opisane kružnice, pa su svi kutovi jednake veličine. Stoga je $|\angle BMC| = 120^\circ$.

Pitanja za 4 boda:

9. Koliko dvoznamenkastih brojeva $\overline{xy}$ ima svojstvo da za njegove znamenke x i y vrijedi $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$?

A) 1 B) 2 C) 6 D) 32 E) nijedan

A.
Samo broj 32.



10. Duljina stranice kvadrata na slici iznosi 2, polukružnice prolaze središtem kvadrata i središte im je u njegovim vrhovima. Osjenčani krugovi imaju središta u polovištima stranica kvadrata i dodiruju polukružnice iznutra. Kolika je ukupna površina osjenčanih krugova?

A) $\frac{1}{4}\pi$ B) $\sqrt{2}\pi$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$ D) π E) $4\left(3-2\sqrt{2}\right)\pi$

E.
Radijus polukružnice jednak je polovini duljine dijagonale kvadrata, tj. $r = \sqrt{2}$, a radijus osjenčanog kruga je $r_m = \sqrt{2} - 1$. Ukupna površina osjenčanih krugova je $P = 4 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 \cdot \pi = 4\left(3-2\sqrt{2}\right)\pi$.

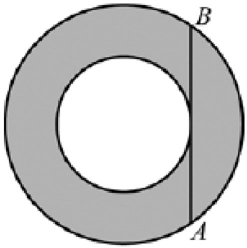
11. Brojevi $\sqrt{7}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[6]{7}$ su uzastopni članovi geometrijskog niza. Slijedeći član tog niza je:

A) 1 B) $\sqrt[5]{7}$ C) $\sqrt[9]{7}$ D) $\sqrt[10]{7}$ E) $\sqrt[12]{7}$

A.

U tom geometrijskom nizu $q = \sqrt[6]{7^{-1}}$, a $a_4 = a_1 \cdot q^3 = 1$

12. Tetiva $\overline{AB}$ dodiruje koncentričnu kružnicu manjeg radijusa. Ako je $|AB| = 16$, kolika je površina kružnog vijenca?



A) 32π B) 63π C) 64π D) $32\pi^2$
E) ovisno o radijusima kružnica

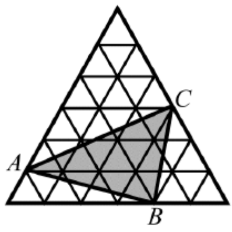
C.
Polovina jednakokračnog trokuta ΔSAB je pravokutni trokut s hipotenuzom duljine R (radijus veće kružnice) i katetama duljina 8 i r (radijus manje kružnice). U tom pravokutnom trokutu vrijedi $R^2 - r^2 = 64$. Površina kružnog vijenca se računa po formuli $P = (R^2 - r^2)\pi$, pa je $P = 64\pi$.

13. Cijeli brojevi x i y zadovoljavaju jednakost $2x = 5y$. Samo jedan od slijedećih brojeva može biti njihov zbroj x + y. Koji?

A) 2011 B) 2010 C) 2009 D) 2008 E) 2007

C.
Zbroj x + y mora biti djeljiv sa 7, a to je broj 2009.

14. Najveći jednakostranični trokut sastoji se od 36 manjih međusobno sukladnih jednakostraničnih trokuta površine 1 cm² . Nađi površinu trokuta ABC.



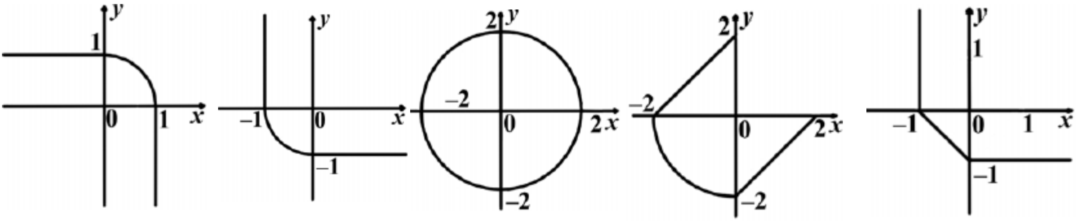
A) 11 cm² B) 12 cm² C) 13 cm²

D) 14 cm² E) 15 cm²

RJEŠENJE IZ CADETA (24.ZADATAK).

15. Koji je od slijedećih grafova rješenje jednadžbe

$$\left(x - |x|\right)^2 + \left(y - |y|\right)^2 = 4 \ ?$$



A) B) C) D) E)

B.

16. Koliko ima pravokutnih trokuta određenih vrhovima pravilnog 14-erokuta?

A) 42 B) 84 C) 88 D) 98 E) 168

B.

Neka je $A_1A_2A_3...A_{13}A_{14}$ pravilni 14-erokut. Nad promjerom $\overline{A_1A_8}$ imamo 12 pravokutnih trokuta (po Talesovom poučku o obodnom kutu), 6 s jedne i 6 s druge strane promjera. Promjera s različitim krajnjim točkama imamo 7 ($\overline{A_1A_8}$, $\overline{A_2A_9}$, ..., $\overline{A_7A_{14}}$), pa imamo ukupno $12 \cdot 7 = 84$ pravokutnih trokuta.

Pitanja za 5 bodova:

17. Svaka zvijezdica u izrazu $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10$ mora se zamijeniti s operatorom $''+''$ ili $''\cdot''$. Neka je N najveći mogući broj dobiven takvom zamjenom. Koji je najmanji prosti faktor od N?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) neki drugi

E.

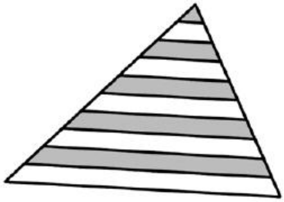
Najveći broj dobiven zamjenom je $N = 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10+1$.
Najmanji prosti faktor broja N je 11.

18. Duljine stranica trokuta su prirodni brojevi 13, x i y. Odredi opseg ako je $x \cdot y = 105$.

A) 35 B) 39 C) 51 D) 69 E) 119

A.
Jedini trokut koji zadovoljava zadane uvjete je trokut sa stranicama duljina 13, 7 i 15. Njegov opseg je 35.

19. Pravci usporedni s osnovicom trokuta dijele svaku od preostalih stranica na 10 sukladnih dužina. Koliki dio površine trokuta je obojan sivom bojom?



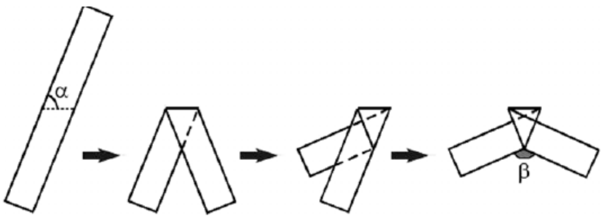
A) 42.5% B) 45% C) 46%

D) 47.5% E) 50%

B.
Duljine dužina usporednih s osnovicom (duljine a) čine aritmetički niz:
$a_1 = \frac{1}{10}a$, $d = \frac{1}{10}a$. Površine sivih dijelova trokuta (trokutić i trapezi) također čine aritmetički niz:
$a_1 = \frac{1}{200}a \cdot v$, $d = \frac{1}{50}a \cdot v$, gdje je v duljina visine trokuta.
Ukupna površina sivih dijelova trokuta je

$$P = \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{40} + \frac{9}{200} + \frac{13}{200} + \frac{17}{200} \right) av = \frac{45}{200} av = \frac{45}{100} \cdot \frac{av}{2} = 45\% \frac{av}{2}.$$

20. Traka od papira presavija se tri puta kao na slici. Nađi veličinu kuta β ako je $\alpha = 70^\circ$.



A) 140° B) 130° C) 120° D) 110° E) 100°

C.

21. Koliko troznamenkastih brojeva ima svojstvo da je srednja znamenka aritmetička sredina ostale dvije znamenke?

A) 9 B) 12 C) 16 D) 25 E) 45

E.

22. Bar-kod na slici sastavljen je od crnih i bijelih pruga, uvijek počinje i završava s crnom prugom. Svaka pruga (bijela ili crna) široka je 1mm ili 2mm, a ukupna širina bar-koda je 12 mm. Koliko različitih kodova je moguće realizirati, uvijek čitajući slijeva u desno ?

A) 24 B) 132 C) 66 D) 12 E) 116

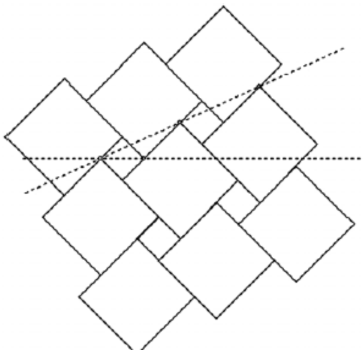
E.

Raspored crnih i bijelih pruga može biti sljedeći:

1. 5 crnih i 4 bijele (kao na slici)
2. 4 crne i 3 bijele
3. 6 crnih i 5 bijelih.

U 1. slučaju imamo 84 mogućnosti različitih razmještaja s obzirom na širinu pruga (40 + 10 + 30 + 4). U 2. slučaju imamo 21 mogućnost različitih razmještaja s obzirom na širinu pruga (3 + 12 + 6). U 3. slučaju imamo 11 mogućnosti različitih razmještaja s obzirom na širinu pruga (5 + 6). Ukupno 116.

23. Zid je popločen kvadratima dviju veličina, kao na slici. Veći kvadrat ima stranice duljine *a*, a manji duljine *b*. Iscrtkane ravne linije zatvaraju kut od 30˚. Odredi omjer *a : b*.



A) $\left(2\sqrt{3}\right):1$ B) $\left(2+\sqrt{3}\right):1$

C) $\left(3+\sqrt{2}\right):1$ D) $\left(3\sqrt{2}\right):1$ E) $2:1$

B.

U trokutu ΔABC s kutovima 30° i 105°, nasuprotne stranice imaju duljine x i $b\sqrt{2}$. Pomoću sinusovog poučka dobivamo $x = \dfrac{2b}{\sqrt{3}+1}$.

U jednakokračnom pravokutnom trokutu ΔBDE katete imaju duljine $a - b$, pa je duljina hipotenuze jednaka $c = \sqrt{2} \cdot (a-b)$.

Iz sličnosti trokuta ΔABC i ΔAED slijedi $x : (a-b) = b\sqrt{2} : a\sqrt{2}$, odn.

$b = a\left(2-\sqrt{3}\right)$.

$a : b = 1 : \left(2-\sqrt{3}\right) = \left(2+\sqrt{3}\right) : 1$

24. Prirodni brojevi od 1 do 10 napisani su svaki po 10 puta na ploči. Učenici u razredu igraju sljedeću igru: učenik obriše dva broja i umjesto njih zapisuje njihov zbroj umanjen za 1, sljedeći učenik ponavlja postupak, itd. Igra je završena kada na ploči ostane samo jedan broj. Broj koji će ostati je:

A) manji od 440 B) 451 C) 460 D) 488 E) veći od 500

B.