MATEMATIČKI KLOKAN J
7 000 000 sudionika u 54 zemlje Europe, Amerike, Afrike i Azije
Četvrtak, 20. ožujka 2014. – Trajanje 75 minuta
Natjecanje za Junior (II. i III. razred SŠ)

* Natjecanje je pojedinačno. **Računala su zabranjena**.
* **Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan**.
* Prvih osam pitanja donosi po 3 boda, drugih osam po 4 boda, a trećih osam po 5 bodova.
* Ako nijedan odgovor nije zaokružen ili su zaokružena dva ili više odgovora zadatak donosi 0 bodova.
* Ako je zaokruženi odgovor pogrešan, oduzima se četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.
* Svaki sudionik u natjecanju dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih nagradu.

Pitanja za 3 boda:

1. Matematički klokan svake se godine održava trećeg četvrtka u ožujku. Kojeg se datuma najranije Klokan može održati?

A) 14 B) 15 C) 20 D) 21 E) 22

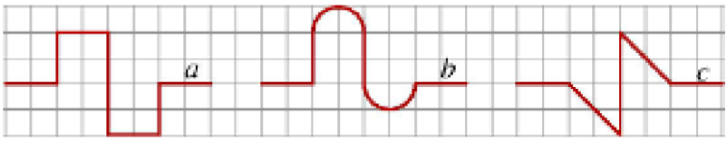
Rješenje: B

2. MSC Fabiola drži rekord kao najveći kontejnerski brod koji je ušao u Zaljev San Francisco. On nosi 12500 kontejnera koji bi kada bi se posložili u niz tvorili kompoziciju dugačku 75 km. Kolika je, ugrubo, duljina jednog kontejnera?

A) 6 m B) 16 m C) 60 m D) 160 m E) 600 m

Rješenje: A
75 km = 75 000 m, 75000 : 12500 = 6 m

3. Ako sa a, b i c označimo duljine linija na slici, što je od navedenog istinito?



A) $a < b < c$ B) $a < c < b$ C) $b < a < c$ D) $b < c < a$ E) $c < b < a$

Rješenje: E

4. Koji broj je na sredini između $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$?

A) $\frac{11}{15}$ B) $\frac{7}{8}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{6}{15}$ E) $\frac{5}{8}$

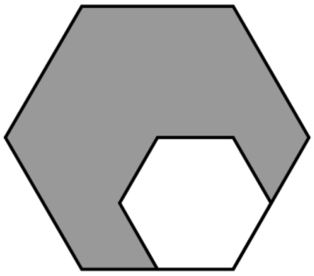
Rješenje: A
$\frac{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}{2} = \frac{11}{15}$

5. U broju 2014 posljednja znamenka veća je od zbroja preostale tri znamenke. Prije koliko godina se ovo zadnji put dogodilo?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 11

Rješenje: C
To se zadnji put dogodilo 2009.

6. Stranica velikog pravilnog šesterokuta dva puta je dulja od stranice malog pravilnog šesterokuta. Površina je malog šesterokuta 4 cm^2. Kolika je površina velikog šesterokuta?



A) 16 cm^2 B) 14 cm^2 C) 12 cm^2 D) 10 cm^2 E) 8 cm^2

Rješenje: A
Koeficijent sličnosti ova dva lika je $k = 2$. Njihove površine se onda odnose kao $k^2 = 4$, tj. površina velikog šesterokuta četiri je puta veća od površine malog šesterokuta, $4 \cdot 4 = 16$.

7. Toma je u koordinatnom sustavu nacrtao kvadrat. Jedna njegova dijagonala leži na osi *x*. Koordinate vrhova na osi *x* su $(-1,0)$ i $(5,0)$. Što su od navedenoga koordinate još jednog vrha tog kvadrata?

A) $(2,0)$ B) $(2,3)$ C) $(2,-6)$ D) $(3,5)$ E) $(3,-1)$

Rješenje: B
Sjecište dijagonala ovog kvadrata polovište je dužine kojoj su krajnje točke $(-1,0)$ i $(5,0)$. To je točka $(2,0)$. Dijagonale kvadrata su međusobno okomite, jednake du duljine i raspolavljaju se. Stoga druga dijagonala prolazi točkom $(2,0)$ okomito na *x*-os, a svaki vrh kvadrata udaljen je za 3 od središta. Sada je jasno da su preostala dva vrha kvadrata točke $(2,3)$ i $(2,-3)$. Sve se lako vidi iz skice.

8. U jednom je selu omjer odraslih muškaraca i odraslih žena 2 : 3, a omjer odraslih žena i djece je 8 : 1. Koji je omjer odraslih (muškaraca i žena) i djece?

A) 5 : 1 B) 10 : 3 C) 13 : 1 D) 12 : 1 E) 40 : 3

Rješenje: E
Iz uvjeta zadatka imamo $\frac{m}{\check{z}} = \frac{2}{3}$ i $\frac{\check{z}}{d} = \frac{8}{1}$, tj. $m = \frac{2}{3}\check{z}$ i $d = \frac{1}{8}\check{z}$. Nas zanima omjer $\frac{m+\check{z}}{d} = \frac{\frac{2}{3}\check{z}+\check{z}}{\frac{1}{8}\check{z}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{8}} = \frac{40}{3}$.

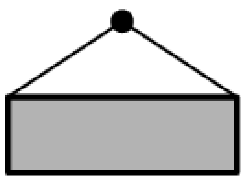
Pitanja za 4 boda:

9. Baka, njena kćer i njena unuka ove godine mogu reći da je zbroj njihovih godina 100. Koje je godine rođena unuka ako su sve njihove godine starosti potencije broja 2?

A) 1998 B) 2006 C) 2010 D) 2012 E) 2013

Rješenje: C
Potencije broja 2 između 0 i 100 su 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Zbroj 100 možemo dobiti samo kombinacijom 4 + 32 + 64 pa zaključujemo da je unuka rođena prije 4 godine.

10. Pavao je stavio pravokutne slike na zid. Za svaku sliku postavio je čavao na visini 2.5 m od poda i spojio je nit duljine 2 m na dva gornja ugla slike. Koja od sljedećih slika je najbliža podu (format slike: širina u cm × visina u cm)?



A) 60 × 40 B) 120 × 50 C) 120 × 90 D) 160 × 60 E) 160 × 100

Rješenje: C

Udaljenost slike od poda dobit ćemo tako da od 2.5 m oduzmemo udaljenost od čavla do slike i visinu slike. Udaljenost od čavla do slike dobijemo primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut kojem je hipotenuza polovica niti, a jedna kateta polovica širine slike. Označimo li format slike sa $a \times b$ (u metrima) udaljenost slike od poda dana je izrazom $2.5 - \left(\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} + b\right)$.

11. Šest djevojaka dijeli stan s dvije kupaonice koje koriste svako jutro počevši od 7:00 sati. Kupaonicu koriste jedna po jedna i zajedno doručkuju kada su sve spremne. Provode 9, 11, 13, 18, 22 i 23 minute u kupaonici redom. Ako se dobro organiziraju, kada najranije mogu zajedno doručkovati?

A) 7:48 B) 7:49 C) 7:50 D) 7:51 E) 8:03

Rješenje: B
Jedna kupaonica: 9 + 18 + 22 = 49, druga kupaonica: 11 + 13 + 23 = 47.

12. U Africi je otkrivena nova vrsta krokodila. Duljina njegova repa trećina je njegove cjelokupne duljine. Njegova glava duga je 93 cm što je četvrtina duljine krokodila bez repa. Kolika je duljina ovog krokodila u cm?

A) 558 B) 496 C) 490 D) 372 E) 186

Rješenje: A
Označimo s k duljinu cijelog krokodila, a sa r duljinu njegova repa. Znamo da je $r = \frac{1}{3}k$. Sada imamo $93 = \frac{1}{4}(k - r) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}k = \frac{1}{6}k$, tj. $k = 93 \cdot 6 = 558$ cm.

13. Na slici je posebna igraća kocka. Brojevi na nasuprotnim stranama uvijek daju isti zbroj. Brojevi koje na slici ne vidimo su prosti. Koji broj je nasuprot broja 14?

A) 11 B) 13 C) 17 D) 19 E) 23

Rješenje: E
Kako su brojevi 14 i 18 parni, a brojevi nasuprot njima prosti zaključujemo da zbroj na nasuprotnim stranama mora biti neparan. Zato nasuprot broja 35 mora biti jedini paran prost broj, 2. Sada znamo da zbroj na nasuprotnim stranama mora biti 37, pa je nasuprot broja 14 broj 23, a nasuprot broja 18 broj 19.

Zadatak se može riješiti i provjerom ponuđenih rješenja.

14. Ana je hodala 8 km brzinom 4 km/h. Sada će neko vrijeme trčati brzinom 8 km/h. Koliko dugo treba trčati kako bi njena prosječna brzina na cijelom putu bila 5 km/h?

A) 15 min B) 20 min C) 30 min D) 35 min E) 40 min

Rješenje: E
Ana je prvo hodala 2 sata i prešla 8 km. Trčeći brzinom od 8 km/h za x sati prijeći će $8x$ km. Ukupno utrošeno vrijeme je $2 + x$, a ukupan prijeđeni put je $8 + 8x$. Prosječna brzina je omjer puta i vremena, tj. imamo $5 = \frac{8+8x}{2+x}$ iz čega slijedi $x = \frac{2}{3}$ sata, tj. 40 minuta.

15. Šahist je odigrao 40 mečeva i osvojio 25 bodova (pobjeda nosi jedan bod, remi nosi pola boda, a poraz ne donosi bodove). Koliko je više mečeva dobio nego izgubio?

A) 5 B) 7 C) 10 D) 12 E) 15

Rješenje: C
Označimo sa p broj pobjeda, a sa r broj remija. Tada je broj poraza jednak $40 - p - r$. Zanima nas vrijednost izraza $p - (40 - p - r) = 2p + r - 40$. Znamo još i broj osvojenih bodova: $p + \frac{1}{2}r = 25$, iz čega slijedi $2p + r = 50$. Pa vidimo da je traženi broj $50 - 40 = 10$.

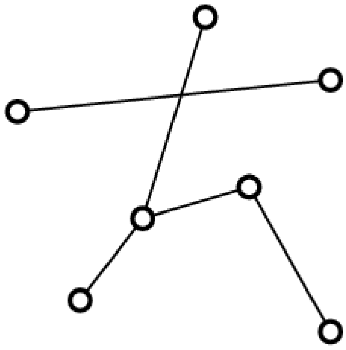
16. Trojke Jana, Daniela i Hana željele su kupiti identične šešire. No, Jani je nedostajala trećina cijene šešira, Danieli četvrtina, a Hani petina. Kada je šešir pojeftinio 9,40 € sestre su objedinile svoje ušteđevine i svakoj kupile šešir. Nije im ostao ni cent. Kolika je bila cijena šešira prije sniženja?

A) 12 € B) 16 € C) 28 € D) 36 € E) 112 €

Rješenje: D
Neka je x prvotna cijena šešira. Jana ima $\frac{2}{3}x$, Daniela $\frac{3}{4}x$, a Hana $\frac{4}{5}x$ eura. Cijena tri šešira nakon sniženja je $3(x - 9.4)$. Iz jednadžbe $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x = 3(x - 9.4)$ dobijemo $x = 36$.

Pitanja za 5 bodova:

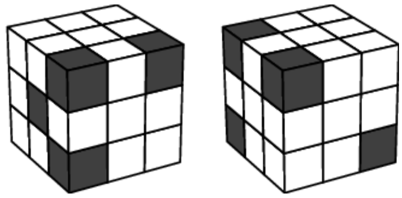
17. Na donjoj slici Karlo želi dodati dužine tako da svaka od sedam točaka ima isti broj veza s drugim točkama. Koji je najmanji broj dužina koje Karlo treba nacrtati?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 9 E) 10

Rješenje: D
Najveći broj dužina koji izlazi iz jedne točke je 3. Kada bi željeli da iz svakog vrha izlaze 3 dužine trebalo bi nam još $\frac{11}{2}$ dužina, no to nije cijeli broj. Kada bi iz svakog vrha izlazile 4 dužine trebalo bi nam još $\frac{18}{2} = 9$ dužina.

18. Na slici vidimo dva različita pogleda na istu kocku. Ona se sastoji od 27 kockica od kojih su neke bijele a neke crne. Koji je najveći broj crnih kockica koje bi se tu mogle nalaziti?



A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Rješenje: D
Možemo prebrojati koliko kockica mora biti bijele boje: 15 ih vidimo na lijevoj slici i još 3 (nove) na desnoj. To znači da crnih kockica može biti najviše $27 - 18 = 9$.

19. Na jednom otoku žabe su uvijek ili zelene ili plave. Broj plavih žaba povećao se za 60% dok je broj zelenih žaba opao za 60%. Ispostavilo se da je novi omjer plavih i zelenih žaba isti kao prethodni omjer u suprotnom poretku (zelene žabe naprema plavih žaba). Za koliki postotak se ukupan broj žaba na otoku promijenio?

A) 0% B) 20% C) 30% D) 40% E) 50%

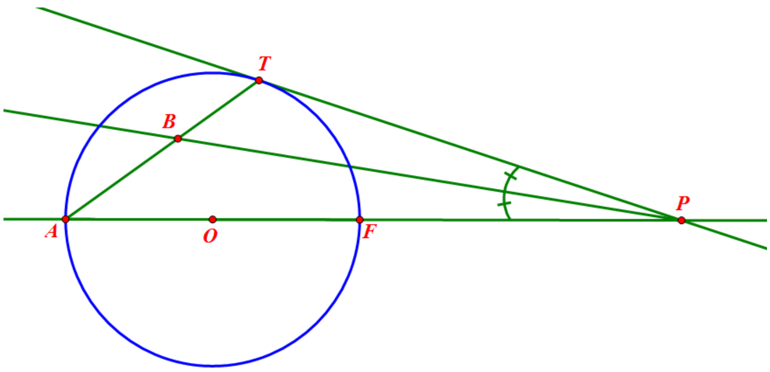
Rješenje: B
Ako sa p označimo stari broj plavih žaba, onda je novi broj plavih žaba $1.6p$. Ako sa z označimo stari broj zelenih žaba, onda je novi broj zelenih žaba $0.4z$. Iz jednakosti $\frac{1.6p}{0.4z} = \frac{z}{p}$ slijedi $z = 2p$. Nas zanima omjer $\frac{1.6p+0.4z}{p+z} = \frac{2.4p}{3p} = 0.8$ iz čega zaključujemo da je na otoku sada 20% manje žaba.

20. Tin je zapisao nekoliko različitih prirodnih brojeva, ne većih od 100. Njihov umnožak nije bio djeljiv s 18. Koliko je najviše brojeva mogao zapisati?

A) 5 B) 17 C) 68 D) 69 E) 90

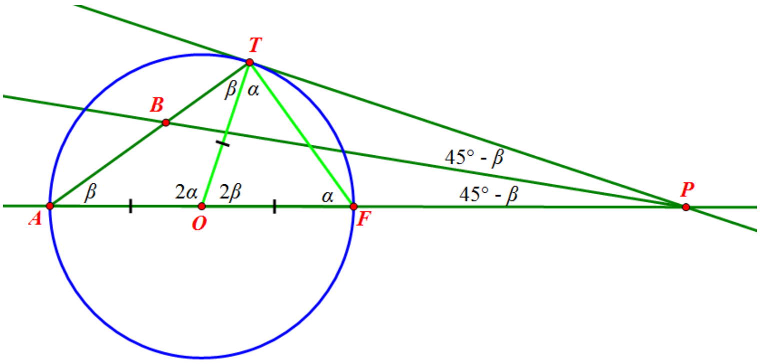
Rješenje: C
$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Među zapisanim brojevima ne smiju se naći dva broja djeljiva sa 3. Izbacimo li sve brojeve djeljive sa 3, osim jednog, između 1 i 100 ostane nam 68 brojeva.

21. Na slici je pravac PT tangenta kružnice sa središtem u točki O, a pravac PB simetrala je kuta TPA. Odredi kut TBP.



A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) Ovisi o položaju točke P.

Rješenje: B
Iz Talesovog poučka slijedi da je kut ATF pravi. Tangenta kružnice okomita je na radijus te kružnice u diralištu pa je i kut OTP pravi kut. Koristeći poučak o obodnom i središnjem kutu i činjenicu da su trokuti AOT i OFT jednakokračni dobivamo odnose među kutovima kao na slici.



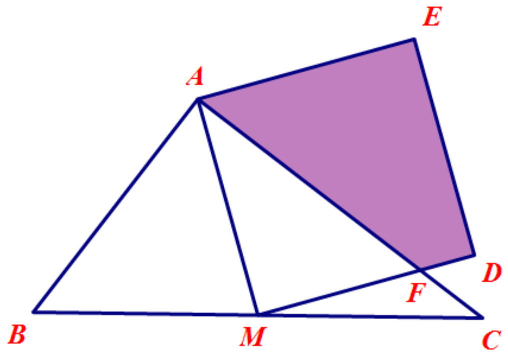
Sada iz trokuta BPT imamo $\angle TBP + (45° - \beta) + (90° + \beta) = 180°$, tj. $\angle TBP = 45°$.

22. Uzmimo skup 7-znamenkastih brojeva sastavljenih od znamenki 1, 2, 3, ..., 7 takvih da su u svakom broju sve znamenke iskorištene. Naniži brojeve ovog skupa u rastućem poretku i podijeli niz točno na sredini na dva jednakobrojna dijela. Koji je posljednji broj prve polovice niza?

A) 1234567 B) 3765421 C) 4123567 D) 4352617 E) 4376521

Rješenje: E

23. Neka je ABC trokut takav da je $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 8$ cm i $|BC| = 10$ cm. Neka je M polovište stranice $\overline{BC}$. $AMDE$ je kvadrat i $\overline{MD}$ siječe $\overline{AC}$ u točki F. Odredi površinu četverokuta $AFDE$ u cm^2.



A) $\frac{124}{8}$ B) $\frac{125}{8}$ C) $\frac{126}{8}$ D) $\frac{127}{8}$ E) $\frac{128}{8}$

Rješenje: B

Po obratu Pitagorinog poučka trokut ABC je pravokutan, s pravim kutom kod vrha A. Onda je M središte opisane kružnice tog trokuta, tj. vrijedi $|MB| = |MA| = |MC| = 5$ cm te $\angle ABM = \angle MAB$ i $\angle MAC = \angle ACM$. Po KK poučku trokuti ABC i AMF slični su, pa možemo odrediti duljinu stranice $\overline{MF}$. Površina traženog četverokuta razlika je površina kvadrata $AMDE$ i trokuta AMF, tj. $5^2 - \frac{5 \cdot \frac{15}{4}}{2} = \frac{125}{8}$ cm^2.

24. U vrsti je 2014 osoba. Svaka od njih je ili lažov (koji uvijek laže) ili vitez (koji uvijek govori istinu). Svaka osoba kaže "Ima više lažova s moje lijeve strane nego vitezova s moje desne strane." Koliko lažova se nalazi u ovoj vrsti?

A) 0 B) 1 C) 1007 D) 1008 E) 2014

Rješenje: C

Moraju biti poredani tako da su svi lažovi jedan do drugog, lijevo od vitezova, i svi vitezovi jedan do drugog, desno od lažova. Treba biti jednak broj lažova i vitezova.