MATEMATIČKI KLOKAN J
6 100 000 sudionika u 57 zemalja Europe, Amerike, Afrike i Azije
Četvrtak, 17. ožujka 2016. – Trajanje 75 minuta
Natjecanje za Junior (II. i III. razred SŠ)

* Natjecanje je pojedinačno. **Računala su zabranjena**.
* **Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan**.
* Prvih osam pitanja donosi po 3 boda, drugih osam po 4 boda, a trećih osam po 5 bodova.
* Ako nijedan odgovor nije zaokružen ili su zaokružena dva ili više odgovora zadatak donosi 0 bodova.
* Ako je zaokruženi odgovor pogrešan, oduzima se četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.
* Svaki sudionik u natjecanju dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih nagradu.

Pitanja za 3 boda:

1. Aritmetička sredina četiri broja iznosi 9. Koji je četvrti broj ako su tri broja 5, 9 i 12?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 36

Rješenje: D
$9 = \frac{5+9+12+x}{4} \Rightarrow x = 10$

2. Koji je od danih brojeva najbliži rezultatu izraza $\frac{17 \cdot 0.3 \cdot 20.16}{999}$?

A) 0.01 B) 0.1 C) 1 D) 10 E) 100

Rješenje: B
Na primjer: $\frac{17 \cdot 0.3 \cdot 20.16}{999} \approx \frac{5 \cdot 20}{999} \approx \frac{100}{1000} = 0.1.$

3. Ruta je na ispitu koji se sastoji od 30 pitanja imala 50% više točnih odgovora nego je imala netočnih odgovora. Svaki njen odgovor bio je ili točan ili netočan. Koliko je točnih odgovora Ruta imala ako pretpostavimo da je odgovorila na sva pitanja?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

Rješenje: D
Označimo li s t broj točnih, a s n broj netočnih odgovora imamo redom:
$t + n = 30, t = 1.5n \Rightarrow 2.5n = 30 \Rightarrow n = 12 \Rightarrow t = 18.$

4. Četiri točke od pet ponuđenih predstavljaju vrhove kvadrata u pravokutnom koordinatnom sustavu. Koja točka nije vrh tog kvadrata?

A) $(-1,3)$ B) $(0,-4)$ C) $(-2,-1)$ D) $(1,1)$ E) $(3,-2)$

Rješenje: A

5. Podijelimo li prirodan broj x brojem 6 ostatak je 3. Koliki je ostatak ako broj $3x$ podijelimo brojem 6?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Rješenje: B
Znamo da je $x = 6k + 3$ za neki prirodan broj k. Onda je $3x = 3(6k + 3) = 18k + 9 = 6(3k + 1) + 3 = 6l + 3$, gdje je $l = 3k + 1$ očito prirodan broj. Vidimo da je ostatak pri dijeljenju $3x$ brojem 6 jednak 3.

6. Mali Luka osmislio je svoj način zapisivanja negativnih brojeva prije nego je naučio uobičajeni način (s minusom ispred broja). Brojeći unazad ovako bi on zapisao: $\dots, 3, 2, 1, 0, 00, 000, 0000, \dots$ Koji je rezultat izraza $000 + 0000$ u njegovoj notaciji?

A) 1 B) 00000 C) 000000 D) 0000000 E) 00000000

Rješenje: C
000 + 0000 predstavlja $-2 + (-3)$ što je -5. Luka bi to zapisao kao 000000.

7. Imam neobične igraće kocke: prikazani su brojevi od 1 do 6 na uobičajeni način uz iznimku da su neparni brojevi negativni ($-1, -3, -5$ su na mjestima brojeva $1, 3, 5$). Bacim li DVIJE takve igraće kocke koji se od danih zbrojeva ne može pojaviti?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 8

Rješenje: D
$3 = 4 + (-1);\ \ 4 = 2 + 2;\ 5 = 6 + (-1);\ 8 = 4 + 4$

8. Sven je na ploču napisao pet različitih jednoznamenkastih prirodnih brojeva. Otkrio je da suma nikoja dva broja nije 10. Koji je od danih brojeva Sven sigurno napisao na ploču?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: E
Inače bi zapisao 5 različitih brojeva iz skupa {1,2,3,4,6,7,8,9} pa bi jedan zbroj sigurno bio 10.

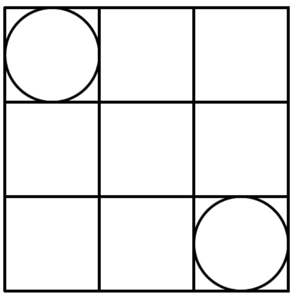
Pitanja za 4 boda:

9. Neka je $a + 5 = b^2 - 1 = c^2 + 3 = d - 4$. Koji je od brojeva a, b, c, d najveći?

A) a B) b C) c D) d E) Nije moguće odrediti.

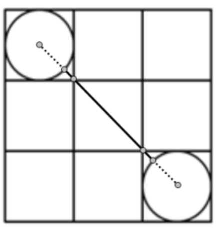
Rješenje: D

10. Tablica 3×3 sastoji se od 9 jediničnih kvadrata. Dvije kružnice upisane su u dva kvadrata kao na slici. Kolika je udaljenost između tih dviju kružnica?



A) $2\sqrt{2} - 1$ B) $\sqrt{2} + 1$ C) $2\sqrt{2}$ D) 2 E) 3

Rješenje: A



Vidimo na slici da traženu udaljenost možemo dobiti zbrajanjem dijagonale jediničnog kvadrata ($\sqrt{2}$) i dvaju manjih dijelova od vrha kvadrata do kružnice (x).
Vrijednost x dobit ćemo oduzimanjem radijusa kružnice ($1/2$) od polovice dijagonale kvadrata ($\sqrt{2}/2$).
Stoga imamo: $\sqrt{2} + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2} - 1$.

11. Na eliminacijskom teniskom turniru šest rezultata četvrtfinala, polufinala i finala (ne nužno u tom redoslijedu) je: Krasna je pobijedila Anu, Selena je pobijedila Danu, Tina je pobijedila Svetu, Tina je pobijedila Selenu, Selena je pobijedila Krasnu i Ema je pobijedila Saru. Koji rezultat nedostaje?

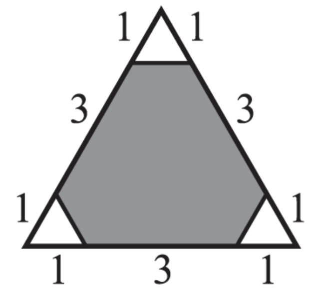
A) Tina je pobijedila Krasnu.
B) Selena je pobijedila Anu.
C) Ema je pobijedila Selenu.
D) Krasna je pobijedila Svetu.
E) Tina je pobijedila Emu.

Rješenje: E

Ovako je teklo natjecanje:

<table>
<tr><td>Krasna i Ana</td><td rowspan="2">Krasna
i
Selena</td><td rowspan="4">Selena
i
Tina</td></tr>
<tr><td>Selena i Dana</td></tr>
<tr><td>Tina i Sveta</td><td rowspan="2">Tina
i
Ema</td></tr>
<tr><td>Ema i Sara</td></tr>
</table>

12. Koliki postotak površine trokuta na slici je osjenčan?

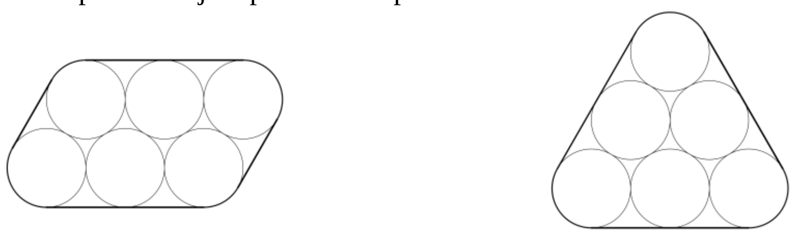


A) 80%
B) 85%
C) 88%
D) 90%
E) Nije moguće odrediti.

Rješenje: C

Duljina stranice velikog trokuta je 5, a malih trokuta 1. Površina cijelog trokuta iznosi $\frac{25\sqrt{3}}{4}$, a površina malog $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Površina osjenčanog dijela je onda $\frac{25\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{22\sqrt{3}}{4}$. Traženi postotak je $\frac{\frac{22\sqrt{3}}{4}}{\frac{25\sqrt{3}}{4}} = \frac{22}{25} = 88\%$.

13. Rajko želi šest cijevi kružnog profila dijametra 2 cm obuhvatiti elastičnom vrpcom. Odlučuje se između dvije opcije prikazane na slici. Usporedi duljine potrebnih vrpci.



A) Vrpca na lijevoj slici je π cm kraća.
B) Vrpca na lijevoj slici je 4 cm kraća.
C) Vrpca na desnoj slici je π cm kraća.
D) Vrpca na desnoj slici je 4 cm kraća.
E) Obje su vrpce jednake duljine.

Rješenje: E

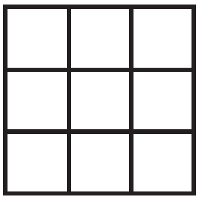
Označimo li s d dijametar cijevi obje vrpce duge su $6d + \pi d$ (6 promjera i jedan opseg kružnice).

14. U osam neoznačenih omotnica nalaze se brojevi: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Eva nasumično odabire nekoliko omotinica. Alisa uzima ostale omotnice. Obje zbroje brojeve koje su izvukle. Evina suma je za 31 veća od Alisine. Koliko je omotnica Eva uzela?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Rješenje: D
Eva je uzela omotinice u kojima su brojevi 1, 2, 4, 8, 128 (zbroj je 143), dok je Alisa dobila brojeve 16, 32, 64 (zbroj je 112).

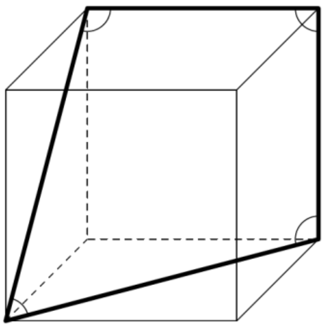
15. Petar želi ćelije 3×3 kvadrata obojiti tako da u svakom retku, stupcu i na obje dijagonale budu tri ćelije različitih boja. Koliko najmanje boja Petar može upotrijebiti?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Rješenje: C
Primjer bojanja po retcima: ABC BDA ECB.

16. Na slici je kocka i označena su četiri kuta. Koliki je zbroj tih kutova?

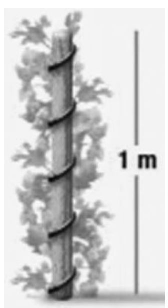


A) 315° B) 330° C) 345° D) 360° E) 375°

Rješenje: B
Radi se o kutovima mjera 60° (tri plošne dijagonale kocke tvore jednakostraničan trokut), 90° (dijagonalni presjek kocke je pravokutnik), 90° (strana kocke je kvadrat), 90° (dijagonalni presjek kocke je pravokutnik) pa je njihov zbroj 330°.

Pitanja za 5 bodova:

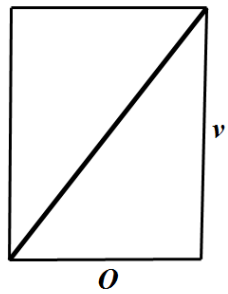
17. Biljka se zamotala točno pet puta oko stupa visine 1 m i opsega 15 cm, kao na slici. Kako se penjala visina joj se jednoliko povećavala. Kolika je duljina biljke?



A) 0.75 m B) 1 m C) 1.25 m D) 1.5 m E) 1.75 m

Rješenje: C

Odmotamo li jednu petinu biljke dobit ćemo pravokutnik (plašt valjka) kojem su stranice duljine $O = 15$ cm i $v = \frac{1}{5}$ m $= 20$ cm. Sada je jasno da je duljina biljke $5 \cdot \sqrt{O^2 + v^2} = 5 \cdot 25 = 125$ cm $= 1.25$ m.



18. Put glisera nizvodno od mjesta X do mjesta Y traje 4 sata. Uzvodno, od Y do X, put traje 6 sati. Koliko bi sati bilo potrebno da struja odnese kladu od mjesta X do mjesta Y (ako pretpostavimo da klada nesmetano putuje)?

A) 5 B) 10 C) 12 D) 20 E) 24

Rješenje: E

Kada gliser putuje nizvodno njegovoj brzini v_g dodaje se brzina toka rijeke v_r pa iz formule $v = \frac{s}{t}$ tj. $t = \frac{s}{v}$ imamo $4 = \frac{s}{v_g + v_r}$. Kada gliser putuje uzvodno od njegove se brzine oduzima brzina toka rijeke pa imamo $6 = \frac{s}{v_g - v_r}$. Nas zanima koliko iznosi $\frac{s}{v_r}$ - vijeme potrebno kladi da nošena strujom prijeđe isti put s kao i gliser.

$$\begin{cases} 4 = \frac{s}{v_g + v_r} \\ 6 = \frac{s}{v_g - v_r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} = \frac{v_g}{s} + \frac{v_r}{s} \\ \frac{1}{6} = \frac{v_g}{s} - \frac{v_r}{s} \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot \frac{v_r}{s} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{s}{v_r} = 24.$$

19. U Republici Klokanova svaki mjesec ima 40 dana. Dani su numerirani od 1 do 40. Svi dani čiji je broj djeljiv sa 6 je blagdan. Svaki dan čiji broj je prost je blagdan. Koliko se puta mjesečno pojavi samo jedan radni dan između dva blagdana?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: A

20. Dvije visine u trokutu imaju duljine 10 cm i 11 cm. Koji od danih brojeva ne može biti duljina treće visine?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 10 E) 100

Rješenje: A

Površina trokuta može se izračunati kao $P = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2}$ iz čega je $a = \frac{2P}{v_a}, b = \frac{2P}{v_b}, c = \frac{2P}{v_c}$. Znamo da u trokutu mora vrijediti $c < a + b$ pa imamo $\frac{2P}{v_c} < \frac{2P}{v_a} + \frac{2P}{v_b}$, odnosno $\frac{1}{v_c} < \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b}$. U našem slučaju mora vrijediti $\frac{1}{v_c} < \frac{1}{10} + \frac{1}{11} \Rightarrow v_c > \frac{110}{21} > 5$.

21. Jakov je zapisao četiri uzastopna prirodna broja. Zatim je izračunao 4 moguća zbroja uzimajući po tri od tih brojeva. Niti jedan od tih zbrojeva nije bio prost broj. Koji je najmanji broj kojeg je Jakov mogao zapisati?

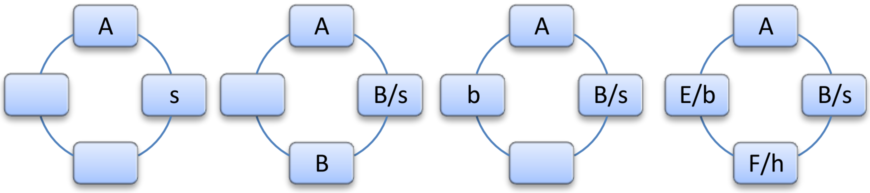
A) 12 B) 10 C) 7 D) 6 E) 3

Rješenje: C

22. Četvero sportaša i sportašica - skijaš, brzi klizač, hokejaš i snowboarder - večera za okruglim stolom. Skijaš sjedi Andreji slijeva. Brzi klizač sjedi nasuprot Borne. Eva i Filip sjede jedno do drugog. Žena sjedi hokejašu slijeva. Kojim se sportom bavi Eva?

A) brzim klizanjem B) skijanjem C) hokejom D) snowboardingom E) Nije moguće odrediti.

Rješenje: A
Označimo sportaše početnim slovima njihovog imena (A, B, E, F) i sportove također (s, b, h, sb). Skijaš sjedi Andreji slijeva (1. slika). Brzi klizač sjedi nasuprot Borne: zaključujemo da Borna može sjediti na dva mjesta (2. slika). No ako Borna sjedi nasuprot Andreje onda Eva i Filip ne mogu sjediti jedno do drugog pa imamo situaciju kao na 3. slici. Sada iz podatka da hokejašu slijeva sjedi žena lako rasporedimo Evu i Filipa i dobijemo 4. sliku. Vidimo da se Eva bavi brzim klizanjem.



23. Datumi se mogu zapisati u obliku DD.MM.GGGG. Primjerice, današnji datum je 17.03.2016. Datum nazivamo "iznenađujućim" ako je svih 8 znamenki u ovom obliku zapisa različito. U kojem će se mjesecu u budućnosti pojaviti prvi "iznenađujući" datum?

A) U ožujku. B) U lipnju. C) U srpnju. D) U kolovozu. E) U prosincu.

Rješenje: B
Ako je godina oblika 20xx, tada mjeseci ne mogu biti oblika 0x, nego samo 10, 11 ili 12, a oni svi otpadaju jer ili imaju 0 ili 2 ili imaju jednake znamenke.
Ako je godina oblika 21xx, tada na mjestu mjeseci treba biti 0x, ali onda dani imaju oblik 3x, a tu su samo dvije mogućnosti: 30 - otpada zbog 0 u mjesecima, 31 - otpada zbog 1 u godini.
Godina ne može biti oblika 22xx jer su dvije znamenke jednake.
Ako je godina oblika 23xx, tada su mjeseci ili oblika 0x ili 10 (02, 03, 11 i 12 ne mogu biti). Dani onda moraju biti oblika 1x (2 i 3 su već potrošene u godini, a 0 u mjesecima). Najranija godina uz ove uvjete je 2345. Najraniji mogući mjesec je onda 06 (2,3,4 i 5 su iskorišteni u godini, a 1 nam treba za dane). Najraniji dan je 17.
To će se dogoditi 17.06.2345.

24. Na jednoj konferenciji je 2016 sudionika registrirano od S1 do S2016. Svaki od sudionika S1 do S2015 rukovao se sa točno onoliko sudionika koliki je njihov registracijski broj. S koliko se sudionika rukovao sudionik S2016?

A)1 B) 504 C) 672 D) 1008 E) 2015

Rješenje: D
Sudionik S2015 rukovao se sa svim ostalim sudionicima (njih 2015). Zaključujemo da se sudionik S1 onda rukovao samo sa S2015.
Sudionik S2014 rukovao se sa svima osim S1. Zaključujemo da se sudionik S2 onda rukovao samo sa S2015 i S2014.
Sudionik S2013 rukovao se sa svima osim S1 i S2. Zaključujemo da se sudionik S3 onda rukovao samo sa S2015, S2014 i S2013.
...
Lako sada vidimo da se sudionik S2016 rukovao sa polovicom svih sudionika, njih 1008 (S1008 - S2015).

Rješenja zadataka bit će objavljena 15. travnja 2016. godine na internet stranici HMD-a.
Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 2. svibnja 2016. godine na oglasnoj ploči škole i na internet stranici HMD-a.
Primjedbe i žalbe učenika primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 9. svibnja 2016. u 23:59.
Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se od 23. svibnja 2016. godine.
Obavijesti se mogu dobiti na Internetu - **http://www.matematika.hr/klokan/2016/.**