MATEMATIČKI KLOKAN S
6 100 000 sudionika u 57 zemalja Europe, Amerike, Afrike i Azije
Četvrtak, 17. ožujka 2016. – Trajanje 75 minuta
Natjecanje za Student (IV. razred SŠ)

* Natjecanje je pojedinačno. **Računala su zabranjena**.
* **Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan**.
* Prvih osam pitanja donosi po 3 boda, drugih osam po 4 boda, a trećih osam po 5 bodova.
* Ako nijedan odgovor nije zaokružen ili su zaokružena dva ili više odgovora zadatak donosi 0 bodova.
* Ako je zaokruženi odgovor pogrešan, oduzima se četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.
* Svaki sudionik u natjecanju dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih nagradu.

Pitanja za 3 boda:

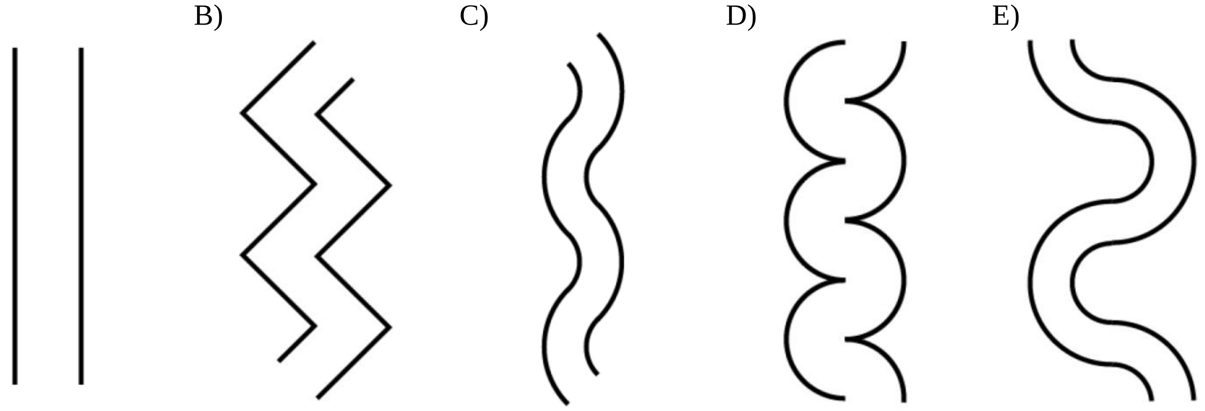
1. Zbroj godina Tome i Ivana je 23, zbroj godina Ivana i Aleksandra je 24 a zbroj godina Tome i Aleksandra je 25. Koliko godina ima najstariji od njih?

   A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

   Rješenje: D
   Označimo Tomine godine s t, Ivanove s i, a Aleksandrove s a. Tada imamo:
   $t + i = 23, i + a = 24, t + a = 25$. Zbrojimo li ove tri jednadžbe dobijemo: $2t + 2i + 2a = 7$. Dijeljenjem sa 2 imamo: $t + i + a = 36$. Kako nam trebaju godine najstarijeg među njima od posljednje sume oduzet ćemo najmanju od gornjih suma $(t + i + a) - (t + i) = 36 - 23 = 13$.

2. Marija želi sagraditi most preko rijeke i zna da je najkraći mogući most za bilo koju točku s jedne strane rijeke uvijek iste duljine. Koja od danih slika ne može biti slika njene rijeke?

   A) B) C) D) E)



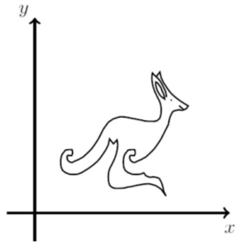
   Rješenje: B

3. Koliko je cijelih brojeva veće od $2015 \cdot 2017$ i manje od $2016 \cdot 2016$?

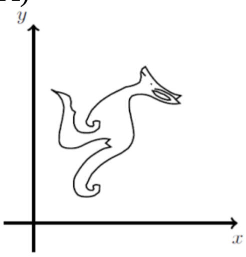
   A) 0 B) 1 C) 2015 D) 2016 E) 2017

   Rješenje: A
   $2015 \cdot 2017 = (2016 - 1)(2016 + 1) = 2016 \cdot 2016 - 1$. Dakle, ova dva broja su dva uzastopna cijela broja pa između njih nema cijelih brojeva.

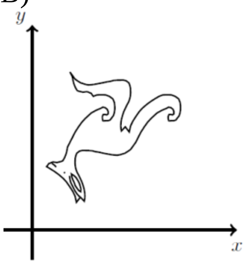
4. Skup točaka u xy-ravnini tvori sliku klokana, kao na slici. Ako zamijenimo x i y koordinatu za svaku točku koja će od danih slika prikazivati rezultat?



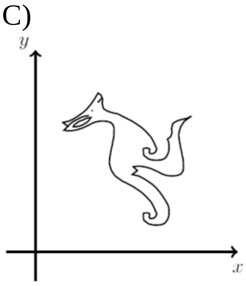
A)



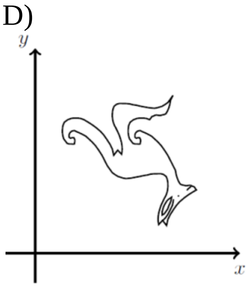
B)



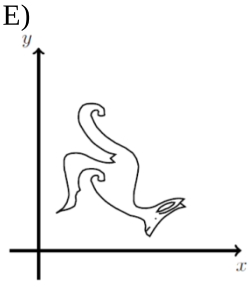
C)



D)

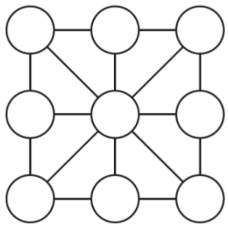


E)



Rješenje: A

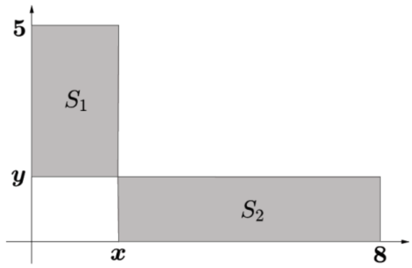
5. Dijana želi upisati devet prirodnih brojeva u krugove na dijagramu tako da sume brojeva u vrhovima svakog od osam malih trokuta koje tvore bridovi budu identične. Koji je najveći broj različitih prirodnih brojeva koje ona može koristiti?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 8

Rješenje: C
Ako u središnji krug upišemo broj x i u bilo koji od vanjskih krugova broj y onda u dva njemu susjedna kruga mora pisati isti broj z. Sada imamo trokute u čijim su vrhovima brojevi x i z pa, da bi suma bila u svakom trokutu jednaka, u trećem vrhu mora biti broj y. Popunjavajući dalje dijagram vidimo da u ostale krugove moramo upisati ili broj z ili broj y.

6. Pravokutnici S_1 i S_2 na slici imaju iste površine. Odredi omjer $\frac{x}{y}$.



A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{8}{5}$

Rješenje: E
Duljine stranica pravokutnika S_1 su x i $5-y$. Duljine stranica pravokutnika S_2 su y i $8-x$. Izjednačimo njihove površine: $x(5-y)=y(8-x)$. Iz ove jednakosti slijedi $\frac{x}{y}=\frac{8}{5}$.

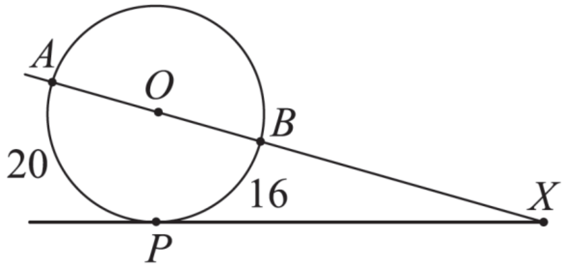
7. Ako je $x^2 - 4x + 2 = 0$, odredi $x + \frac{2}{x}$.

A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

Rješenje: E

Iz $x^2 - 4x + 2 = 0$ imamo $x^2 + 2 = 4x$. Stoga je $x + \frac{2}{x} = \frac{x^2+2}{x} = \frac{4x}{x} = 4$.

8. Duljine lukova AP i PB na slici su 20 i 16. Koliko iznosi mjera kuta $\angle PXA$?



A) 30° B) 24° C) 18° D)15° E)10°

Rješenje: E

Označimo s α kut $\angle BOP$. Tada je kut $\angle AOP$ jednak $180° - \alpha$. Sada iz formule za duljinu luka kružnice $l = \frac{r\pi\alpha}{180°}$ imamo dvije jednadžbe: $16 = \frac{r\pi\alpha}{180°}$, $20 = \frac{r\pi(180°-\alpha)}{180°}$. Iz tog sustava dobivamo $\alpha = 80°$. Kako je trokut PXO pravokutan traženi kut je $90° - 80° = 10°$.

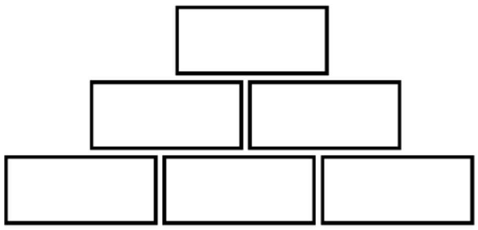
Pitanja za 4 boda:

9. Za prirodne brojeve a, b, c, d vrijedi $a + 2 = b - 2 = c \cdot 2 = d : 2$. Koji je od ovih brojeva najveći?

A) a B) b C) c D) d E) Nije moguće odrediti.

Rješenje: D

10. U ovoj piramidi brojeva svako gornje polje produkt je dvaju polja direktno ispod njega. Koji se od danih brojeva ne može pojaviti na vrhu piramide, ako se u donja tri polja nalaze prirodni brojevi veći od 1?



A) 56 B) 84 C) 90 D) 105 E) 220

Rješenje: D

Broj na vrhu piramide mora se moći prikazati kao produkt $x \cdot y \cdot y \cdot z$ gdje su x, y, z prirodni brojevi veći od 1 (x, y, z su brojevi upisani u donja tri polja). Od danih brojeva samo se 105 ne može tako zapisati ($105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$).

11. Ako je $x_1 = 2$ i $x_{n+1} = x_n^{x_n}$ za $n \geq 1$ koliko iznosi x_4?

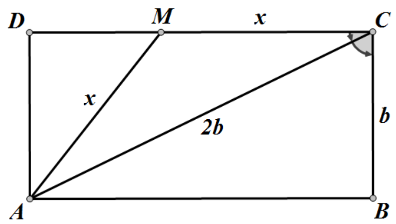
A) 2^{2^3} B) 2^{2^4} C) $2^{2^{11}}$ D) $2^{2^{16}}$ E) $2^{2^{768}}$

Rješenje: C
$x_2 = 2^2 = 4$, $x_3 = 4^4 = (2^2)^4 = 2^8$, $x_4 = (2^8)^{2^8} = 2^{8 \cdot 2^8} = 2^{2^3 \cdot 2^8} = 2^{2^{11}}$

12. U pravokutniku $ABCD$ duljina stranice $\overline{BC}$ jednaka je polovici duljine dijagonale $\overline{AC}$. Neka je M točka na stranici $\overline{CD}$ takva da je $|AM| = |MC|$. Kolika je mjera kuta $\angle CAM$?

A) 12.5° B) 15° C) 27.5° D) 42.5° E) Ništa od navedenog.

Rješenje: E



Iz trokuta ABC vidimo da je $\cos \angle BCA = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$ pa je $\angle BCA = 60°$. Onda je $\angle MCA = 90° - 60° = 30°$. Trokut ACM je jednakokračan pa je $\angle CAM = \angle MCA = 30°$.

13. Koliko postoji različitih pravokutnika površine 2016 koje je moguće razrezati na 56 jednakih kvadrata?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 0

Rješenje: B
Svaki kvadrat ima površinu $\frac{2016}{56} = 36$. Kako broj $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 1$ možemo dobiti kao četiri različita produkta $(1 \cdot 56, 2 \cdot 28, 4 \cdot 14, 7 \cdot 8)$ postoje četiri različita pravokutnika koje je moguće ovako razrezati.

14. Na otoku Viteza i Lupeža žive samo dva tipa ljudi: Vitezovi (koji uvijek govore istinu) i Lupeži (koji uvijek lažu). Na svom putovanju po otoku sretneš 7 ljudi koji sjede oko logorske vatre. Svaki od njih reče: "Sjedim između dva Lupeža!". Koliko Lupeža sjedi oko vatre?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) Nije moguće odrediti.

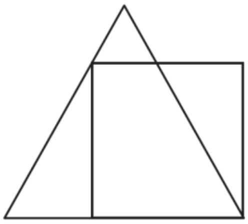
Rješenje: B

15. Jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$ i $x^2 + bx + a = 0$ imaju realna rješenja. Znamo da je zbroj kvadrata rješenja prve jednadžbe jednak zbroju kvadrata rješenja druge jednadžbe i da je $a \neq b$. Koliko tada iznosi $a + b$?

A) 0 B) -2 C) 4 D) -4 E) Nije moguće odrediti.

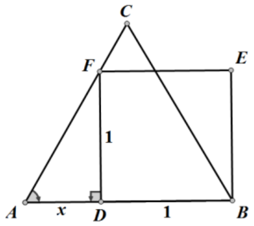
Rješenje: B
Vrijedi: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Iz Vieteovih formula zatim slijedi $(-a)^2 - 2b$ za prvu jednadžbu, a $(-b)^2 - 2a$. Izjednačimo li ove dvije jednakosti imamo redom:
$(-a)^2 - 2b = (-b)^2 - 2a \Longrightarrow a^2 - 2b = b^2 - 2a \Rightarrow a^2 - b^2 = -2a + 2b \Rightarrow$
$(a + b)(a - b) = -2(a - b) \Rightarrow a + b = -2.$

16. Ako je opseg kvadrata na slici jednak 4, koliki je opseg jednakostraničnog trokuta na slici?



A) 4 B) $3+\sqrt{3}$ C) 3 D) $3+\sqrt{2}$ E) $4+\sqrt{3}$

Rješenje: B



Iz jednakostraničnog trokuta ADF imamo: $\operatorname{tg}\angle FAD=\frac{1}{x}\Rightarrow \operatorname{tg}60^\circ=\frac{1}{x}\Rightarrow \sqrt{3}=\frac{1}{x}\Rightarrow$ $x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Stranica trokuta je zato duljine $\frac{\sqrt{3}}{3}+1$ pa je opseg $\sqrt{3}+3$.

Pitanja za 5 bodova:

17. Koliko različitih realnih rješenja ima jednadžba

$$(x^2-4x+5)^{x^2+x-30}=1?$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) beskonačno

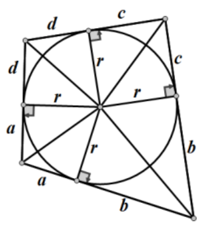
Rješenje: C

Moguća rješenja jednadžbe $a^b=1$ su: $(a=1)$ ili $(b=0$ i $a\neq 0)$ ili $(a=-1$ i b paran).
Prvi slučaj ima jedno rješenje, drugi dva, a treći slučaj nema rješenja.

18. Četverokutu je upisana kružnica (svaka stranica četverokuta tangenta je te kružnice). Omjer opsega čeverokuta i opsega kružnice iznosi $4:3$. Koliki je tada omjer površine četverokuta i površine kruga omeđenog tom kružnicom?

A) $4:\pi$ B) $3\sqrt{2}:\pi$ C) $16:9$ D) $\pi:3$ E) $4:3$

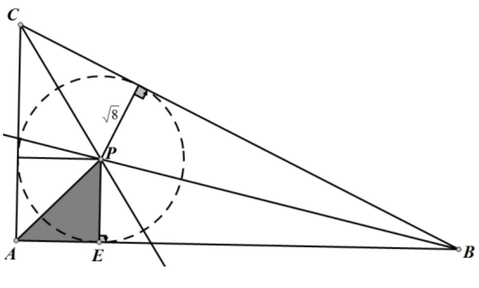
Rješenje: E



Omjer opsega ovih likova je $\frac{2(a+b+c+d)}{2r\pi}=\frac{a+b+c+d}{r\pi}=\frac{4}{3}$. Vidimo sa slike da je površina četverokuta $P=2\cdot\frac{ar}{2}+2\cdot\frac{br}{2}+2\cdot\frac{cr}{2}+2\cdot\frac{dr}{2}=(a+b+c+d)r$. Onda je omjer površina $\frac{(a+b+c+d)r}{r^2\pi}=\frac{a+b+c+d}{r\pi}=\frac{4}{3}$.

19. U pravokutnom se trokutu ABC (pravi kut je kod vrha A) simetrale šiljastih kutova sijeku u točki P. Ako je udaljenost točke P od hipotenuze $\sqrt{8}$, kolika je udaljenost točke P od vrha A?

A) 8 B) 3 C) $\sqrt{10}$ D) $\sqrt{12}$ E) 4



Rješenje: E

Sjecište simetrala kutova središte je upisane kružnice trokuta. Zato znamo da su duljine dužina $|AE|$ i $|EP|$ jednake radijusu upisane kružnice, tj. $\sqrt{8}$. Iz pravokutnog trokuta AEP tada slijedi da je $|AE|=\sqrt{8+8}=4$.

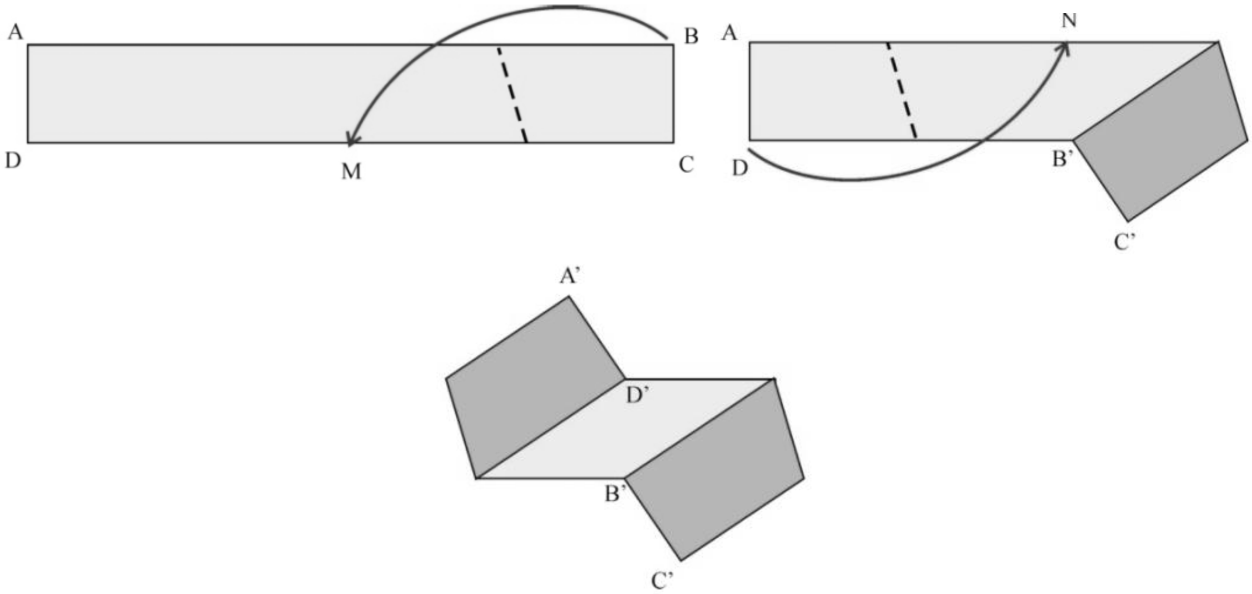
20. Kocka je razrezana na 6 piramida tako što smo danu točku unutar kocke povezali sa svakim vrhom kocke. Volumeni pet od tih pramida su 2, 5, 10, 11 i 14. Koliki je volumen šeste piramide?

A) 1 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

Rješenje: C

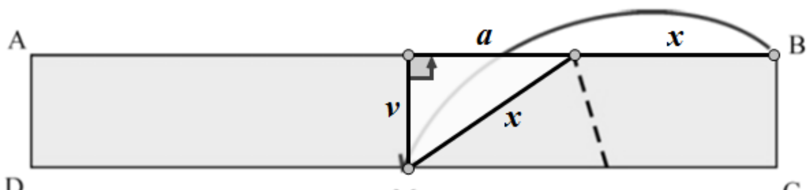
Neka je a duljina brida kocke. Volumen svake od piramida je $V = \frac{1}{3}a^2h$. Zbroj visina parova piramida kojima su baze nasuprotne strane kocke iznosi a. Dakle, zbroj volumena tih piramida bit će $\frac{1}{3}a^3$. Od danih brojeva jednake zbrojeve daju 2 i 14 te 5 i 11. To znači da šesta piramida treba imati volumen 6 kako bi zbroj s preostalim volumenom 10 također bio 16.

21. Pravokutna papirnata traka širine 5 cm i dužine 50 cm s jedne je strane svijetla, a s druge tamna. Kristina presavine traku tako da vrh B padne u polovište M stranice $\overline{CD}$. Zatim presavine traku tako da vrh D padne u polovište N stranice $\overline{AB}$. Kolika je površina (u cm^2) vidljivog svijetlog dijela na posljednjoj slici?



A) 50 B) 60 C) 62.5 D) 100 E) 125

Rješenje: B



Dio čija se površina traži je paralelogram sa stranicama duljina a i x, visine $v = 5$ cm. Površina je onda $P = a \cdot v$. Sa slike vidimo da x možemo izraziti na dva načina: $25 - a$ i $\sqrt{a^2 + v^2}$. Izjednačimo te izraze: $25 - a = \sqrt{a^2 + 25}$, kvadriramo jednakost: $625 - 50a + a^2 = a^2 + 25 \Rightarrow 50a = 600 \Rightarrow a = 12$ cm. Sada je $P = 12 \cdot 5 = 60$ cm^2.

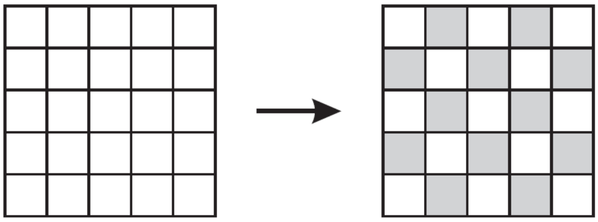
22. Ana je izabrala prirodan broj n i zapisala sumu svih prirodnih brojeva od 1 do n. Prost broj p djelitelj je te sume, ali nije djelitelj niti jednog sumanda. Koji bi od danih brojeva mogao biti $n + p$?

A) 217 B) 221 C) 229 D) 245 E) 269

Rješenje: A

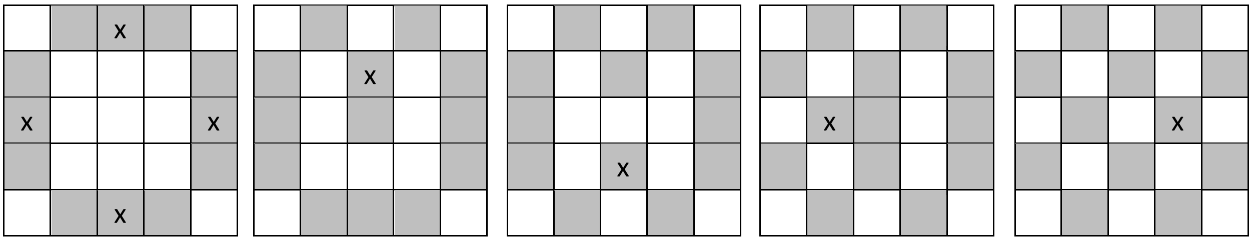
Suma prvih n prirodnih brojeva je $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Kako prost broj p ne dijeli ni jedan broj manji od n, a dijeli S_n zaključujemo da je $p = n + 1$. Onda je $n + p = 2n + 1$.
To znači da kada od danog broja oduzmemo 1 pa ga podijelimo s 2 pa mu dodamo 1 trebamo dobiti prost broj. To je slučaj samo kod broja 217.

23. Kvadrat (5×5) podijeljen je na 25 polja. Sva polja su na početku bijela. U svakom potezu je dozvoljeno promijeniti boju trima uzastopnim poljima u retku ili stupcu u suprotnu boju (bijela polja postaju crna, a crna bijela). Koliko nam najmanje poteza treba kako bi dobili šahovnicu kao na slici?



A) manje od 10 B) 10 C) 12 D) više od 12 E) To nije moguće.

Rješenje: A
Možemo to učiniti u 8 poteza.



24. Prirodan broj N ima točno šest različitih djelitelja uključujući 1 i N. Produkt pet od tih djelitelja je 648. Koji od danih brojeva je šesti djelitelj broja N?

A) 4 B) 8 C) 9 D) 12 E) 24

Rješenje: C
Rastavimo 648 na proste faktore: $648 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Sada vidimo da se može zapisati kao $648 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 18$. Sada je lako zaključiti da je najveći od njih $N = 18$ i da nedostaje njegov djelitelj 9.

Rješenja zadataka bit će objavljena 15. travnja 2016. godine na internet stranici HMD-a.
Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 2. svibnja 2016. godine na oglasnoj ploči škole i na internet stranici HMD-a.
Primjedbe i žalbe učenika primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 9. svibnja 2016. u 23:59.
Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se od 23. svibnja 2016. godine.
Obavijesti se mogu dobiti na Internetu - **http://www.matematika.hr/klokan/2016/**.