MATEMATIČKI KLOKAN J
6 100 000 sudionika u 69 država Europe, Amerike, Afrike i Azije
Četvrtak, 22. ožujka 2018. – Trajanje 75 minuta
Natjecanje za Junior (II. i III. razred SŠ)

* Natjecanje je pojedinačno. **Računala su zabranjena**.
* **Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan**.
* Prvih osam pitanja donosi po 3 boda, drugih osam po 4 boda, a trećih osam po 5 bodova.
* Ako nijedan odgovor nije zaokružen ili su zaokružena dva ili više odgovora zadatak donosi 0 bodova.
* Ako je zaokruženi odgovor pogrešan, oduzima se četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.
* Svaki sudionik u natjecanju dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih nagradu.

Pitanja za 3 boda:

1. U mojoj obitelji svako dijete ima barem dva brata i barem jednu sestru. Koji je najmanji mogući broj djece u mojoj obitelji?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

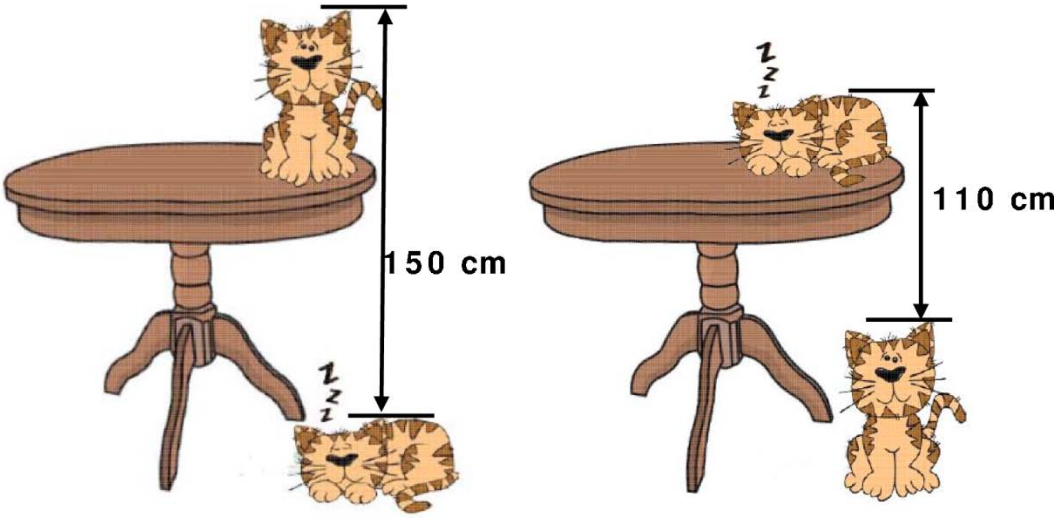
Rješenje: C
U obitelji moraju biti dvije sestre i tri brata.

2. Dvije su stranice trokuta duljine 5 i 2, a duljina treće stranice neparan je broj. Odredi duljinu treće stranice.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Rješenje: C
Označimo traženu duljinu s c. Prema nejednakosti trokuta mora vrijediti $5+2>c$, $5+c>2$ i $2+c>5$. Slijedi $3<c<7$. Kako se traži neparan broj jedini mogući odgovor je 5.

3. Udaljenost od vrha mačke koja spava na podu do vrha mačke koja sjedi na stolu iznosi 150 cm. Udaljenost od vrha mačke koja sjedi na podu do vrha mačke koja spava na stolu iznosi 110 cm. Koliko je visok stol?



A) 110 cm B) 120 cm C) 130 cm D) 140 cm E) 150 cm

Rješenje: C
Označimo s x visinu mačke dok spava, a s y visinu mačke dok sjedi.
Visina stola tada je $150-y+x=110-x+y$.
Iz te jednakosti slijedi $y-x=20$.
Dakle, visina stola je $150-(y-x)=130$ cm.

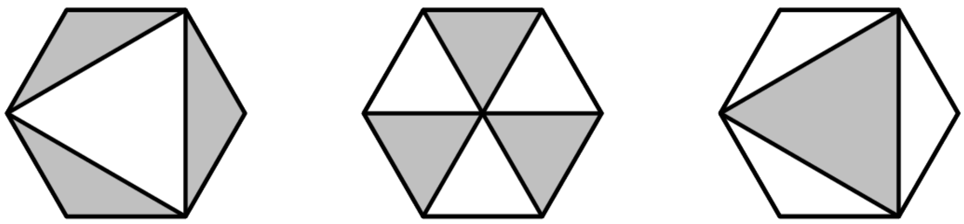
4. Zbroj pet uzastopnih cijelih brojeva iznosi 10^{2018}. Koji je broj u sredini?

A) 10^{2013} B) 5^{2017} C) 10^{2017} D) 2^{2018} E) $2 \cdot 10^{2017}$

Rješenje: E

Iz $(n-2)+(n-1)+n+(n-1)+(n+2)=10^{2018}$ slijedi $5n=10^{2018}$, tj. $n=\frac{10 \cdot 10^{2017}}{5}=2 \cdot 10^{2017}$ i to je traženi broj.

5. Dana su tri sukladna pravilna šesterokuta. Označimo X, Y i Z ukupnu osjenčanu površinu unutar svakog šesterokuta. Koja je od navedenih izjava točna?



A) $X=Y=Z$ B) $Y=Z \neq X$ C) $X=Z \neq Y$ D) $X=Y \neq Z$ E) $X \neq Y \neq Z$

Rješenje: A

Svaka osjenčana površina je polovina površine cijelog šesterokuta.

6. Mare je sakupila 42 jabuke, 60 marelica i 90 trešanja. Želi svo voće podijeliti na identične hrpe te po košaricu voća dati svakom od svojih prijatelja. Koji je najveći broj košarica koje može pripremiti?

A) 3 B) 6 C) 10 D) 14 E) 42

Rješenje: B

Tražimo najveći zajednički djelitelj zadanih brojeva: $D(42,60,90)=6$.

7. Neke znamenke u donjem točnom računu zamijenjene su slovima P, Q, R i S. Koliko iznosi $P+Q+R+S$?

$$\begin{array}{r} P\,4\,5 \\ +\,Q\,R\,S \\ \hline 6\,5\,4 \end{array}$$

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 24

Rješenje: B

Iz zadnjeg stupca vidimo da mora vrijediti $5+S=4$ pa je $S=9$ i 1 prenosimo. Iz srednjeg stupca vidimo da mora vrijediti $1+4+R=5$ pa je $R=0$. Iz prvog stupca vidimo da vrijedi $P+Q=6$. Sada imamo $P+Q+R+S=6+0+9=15$.

8. Odredi zbroj 25% od 2018 i 2018% od 25.

A) 1009 B) 2016 C) 2018 D) 3027 E) 5045

Rješenje: A

$\frac{25}{100} \cdot 2018+\frac{2018}{100} \cdot 25=2 \cdot \frac{25 \cdot 2018}{100}=1009.$

Pitanja za 4 boda:

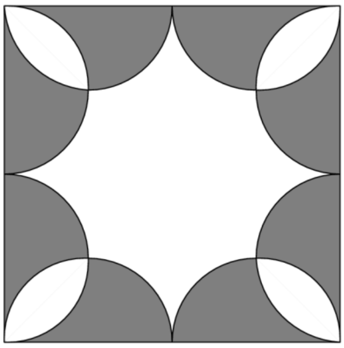
9. Zapisano je redom 105 brojeva: 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,... (broj n zapisan je n puta). Koliko zapisanih brojeva je djeljivo brojem 3?

A) 4 B) 12 C) 21 D) 30 E) 45

Rješenje: D

Zapisano je $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=105$ brojeva. Slijedi da je $n=14$. Prirodni brojevi brojevi do 14 koji su djeljivi s tri su 3, 6, 9 i 12. Zapisano je, dakle, $3+6+9+12=30$ višekratnika broja 3.

10. Unutar kvadrata duljine stranice 4 upisano je osam sukladnih polukrugova kao na slici. Odredi površinu dijela kvadrata koji nije osjenčan.



A) 2π B) 8 C) $6+\pi$ D) $3\pi-2$ E) 3π

Rješenje: B

Ucrtamo li plave dužine kao na slici zaključujemo da se bijele "latice" kada se prepolove podudaraju sa sivim dijelom koji je označen strelicom. Neosjenčani dio je sada kvadrat stranice duljine $2\sqrt{2}$. Njegova je površina 8.

11. U jednom danu 40 je vlakova putovalo između dvaju od gradova M, N, O, P, Q. Za 10 je vlakova mjesto dolaska ili mjesto polaska bio grad M. Za 10 je vlakova mjesto dolaska ili mjesto polaska bio grad N. Za 10 je vlakova mjesto dolaska ili mjesto polaska bio grad O. Za 10 je vlakova mjesto dolaska ili mjesto polaska bio grad P. Za koliko je vlakova mjesto dolaska ili mjesto polaska bio grad Q?

A) 0 B) 10 C) 20 D) 30 E) 40

Rješenje: E

Svaki vlak ima polaznu i dolaznu postaju. Vrijedi $\frac{10\cdot 4+Q}{2}=40$ pa je $Q=40$.

12. Na Humanističkom Sveučilištu mogu se studirati jezici, povijest i filozofija. Engleski jezik studira 35% studenata koji studiraju jezike. Jezik koji nije engleski studira 13% studenata na ovom sveučilištu. Niti jedan student ne studira više od jednog jezika. Koliki postotak studenata ovog sveučilišta studira jezike?

A) 13% B) 20% C) 22% D) 48% E) 65%

Rješenje: B

Jezik koji nije engleski studira 65% studenata koji studiraju jezike. $65\%\,J = 13\%\,S \Longrightarrow J = \frac{13}{65}S = \frac{1}{5}\,S = 20\%\,S$. Jezike studira 20% studenata sveučilišta.

13. Koliko ima troznamenkastih brojeva sa svojstvom da je njegova devetina dvoznamenkast broj koji se dobije brisanjem srednje znamenke?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: D

Treba vrijediti $\frac{1}{9}\overline{xyz} = \overline{xz}$, tj. $\frac{1}{9}(100x + 10y + z) = 10x + z$ iz čega sijedi $z = \frac{5}{4}(x + y)$. Kako su x, y, z znamenke (cijeli brojevi od 0 do 9, te $x \neq 0$) mora vrijediti $x + y = 4$. Za to su četiri mogućnosti: $(1,3), (2,2), (3,1), (4,0)$.

14. Koliko se puta izraz 2018^2 mora pojaviti pod korijenom kako bi donji račun bio točan?

$$\sqrt{2018^2 + 2018^2 + \cdots + 2018^2} = 2018^{10}$$

A) 5 B) 8 C) 18 D) 2018^8 E) 2018^{18}

Rješenje: E

Mora vrijediti $n \cdot 2018^2 = 2018^{20}$, tj. $n = 2018^{18}$.

15. Koliko znamenki ima rezultat donjeg računa?

$$\frac{1}{9} \cdot 10^{2018} \cdot (10^{2018} - 1)$$

A) 2017 B) 2018 C) 4035 D) 4036 E) 4037

Rješenje: D

Vrijedi $10^{2018} - 1 = 99 \ldots 99$ pri čemu se u ovom broju nalazi 2018 devetki pa imamo $\frac{1}{9} \cdot (10^{2018} - 1) = 11 \ldots 11$ pri čemu se taj rezultat sastoji od 2018 jedinica. Kad se taj broj pomnoži s 10^{2018} dobivamo broj koji na prvih 2018 mjesta ima znamenku 1, a onda slijedi 2018 nula. Dakle, ukupno imamo 2018+2018=4036 znamenki.

16. U pravilnom 2018-terokutu čiji vrhovi su numerirni od 1 do 2018 povučene su dvije dijagonale. Jedna povezuje vrhove 18 i 1018, a druga vrhove 1018 i 2000. Koliko vrhova imaju tako nastala tri poligona?

A) 38, 983, 1001 B) 37, 983, 1001 C) 38, 982, 1001 D) 37, 982, 1000 E) 37, 983, 1002

Rješenje: A

Pitanja za 5 bodova:

17. Na ploči je zapisan određen niz cijelih brojeva, uključujući broj 2018. Njihova suma iznosi 2018. Njihov umnožak također iznosi 2018. Koji od danih brojeva bi mogao biti broj cijelih brojeva napisanih na ploči?

A) 2016 B) 2017 C) 2018 D) 2019 E) 2020

Rješenje: B
Da bi dani uvjeti vrijedili na ploči, uz broj 2018, mogu biti zapisani samo brojevi 1 i -1 i to isti broj jednih i drugih te paran broj -1. Stoga broj brojeva na ploči bez 2018 treba biti djeljiv s 4. Od danih rješenja samo je $2017-1$ djeljivo s 4.

18. Zadana su četiri pozitivna broja. Odaberemo tri od njih, odredimo njihovu aritmetičku sredinu i zatim pribrojimo četvrti broj. To možemo napraviti na četiri različita načina. Rezultati su redom 17, 21, 23 i 29. Odredi najveći od zadanih brojeva.

A) 12 B) 15 C) 21 D) 24 E) 29

Rješenje: C
Označimo zadane brojeve a, b, c, d. Vrijedi:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b+c}{3}+d=17 \\ \dfrac{a+b+d}{3}+c=21 \\ \dfrac{a+c+d}{3}+b=23 \\ \dfrac{b+c+d}{3}+a=29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+3d=51 \\ a+b+d+3c=63 \\ a+c+d+3b=69 \\ b+c+d+3a=87 \end{cases}$$

Zbrojimo li dobivene jednadžbe imamo $6(a+b+c+d)=270$, tj. $a+b+c+d=45$. Sada iz posljednje jednadžbe u gornjem sustavu slijedi $45+2a=87$, tj. $a=21$.

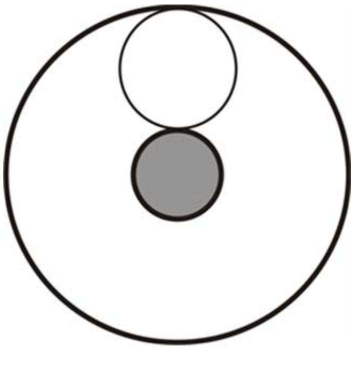
19. Točke $A_0, A_1, A_2, \ldots$ leže na pravcu za koji vrijedi $|A_0A_1|=1$ i točka A_n polovište je dužine $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ za svaki nenegativan cijeli broj n. Odredi duljinu dužine $\overline{A_0A_{11}}$.

A) 171 B) 341 C) 512 D) 587 E) 683

Rješenje: E
Vrijedi: $|A_{n+1}A_{n+2}|=2\cdot|A_nA_{n+1}|$, iz čega slijedi $|A_{n+1}A_{n+2}|=2^{n+1}$.

A_{11} nalazi se lijevo od A_0, kao i svi A_n za neparne n, i vrijedi:
$|A_0A_{11}|=1+2+2^3+2^5+2^7+2^9=1+2+8+32+128+512=683$.

20. Kružni vijenac čine dvije koncentrične kružnice radijusa 1 i 9. U njega je upisano n kružnica bez preklapanja, svaka dira obje kružnice koje čine kružni vijenac (na slici je primjer za $n=1$ i druge radijuse). Odredi najveći mogući n.

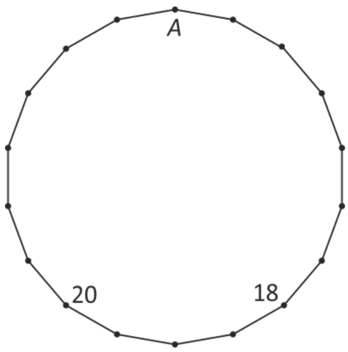


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: C

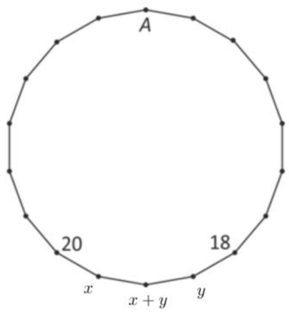
Središta svih upisanih kružnica nalaze se na kružnici radijusa 5 sa središtem u središtu kružnog vijenca. Njihovi radijusi jednaki su 4. Središta upisanih kružnica vrhovi su poligona upisanog u kružnicu radijusa 5, a opisanog kružnici radijusa 3. U kružni se vijenac može upisati onoliko kružnica koliko poligon može imati stranica duljine 8. Za opseg tog poligona vrijedi: $2 \cdot\ 3 \cdot \pi < O < 2 \cdot\ 5 \cdot \pi$, tj. $18.8 < O < 31.4$. Vidimo da poligon može imati najviše 3 stranice duljine 8, tj. da je najveći broj upisanih kružnica jednak 3.

21. Na slici je 18-terokut. U svakom vrhu treba upisati broj koji je zbroj brojeva u dvama susjednim vrhovima. Dana su dva broja. Koji broj treba pisati u vrhu A?



A) 2018 B) -20 C) 18 D) 38 E) -38

Rješenje: D



Za vrhove označene x i y na slici mora vrijediti:
$x = 20 + x + y \Rightarrow y = -20$,
$y = x + y + 18 \Rightarrow x = -18$.
Dalje se lako izračuna da je $A = 38$.

22. Dijana crta pravokutnu mrežu koja se sastoji od 12 kvadrata na papiru na kvadratiće. Neke kvadrate oboji crno. U svaki prazan kvadrat ona upisuje broj crnih kvadratića koji s njim dijele stranicu. Evo primjera:

1		2	1
0	3		
1		2	1

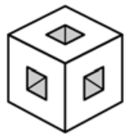
Sada radi istu stvar u pravokutnoj mreži koja se sastoji od 2018 kvadrata. Koliki najviše može biti zbroj svih brojeva upisanih u takvu mrežu?

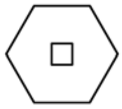
A) 1262 B) 2016 C) 2018 D) 3025 E) 3027

Rješenje: D
Pravokutnik koji se sastoji od 2018 kvadratića mora biti dimenzija 2×1009. Najviši zbroj brojeva dobit ćemo u slučaju bojanja u stilu šahovnice: $2 + 3 + 3 + \cdots + 3 + 2 = 4 + 1007 \cdot 3 = 3025$.

	3		3		3		3	⋯		3	
2		3		3		3			3		2

23. Sedam malih kocaka izrezano je iz $3 \times 3 \times 3$ kocke (kao na slici).
Kako će izgledati presjek tog tijela s ravninom koja prolazi središtem kocke okomito na jednu od njegove četiri prostorne dijagonale?



A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

Rješenje: A

24. Svaki broj iz skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$ upisan je u točno jednu ćeliju tablice dimenzija 2×3. Na koliko se to načina može napraviti uz uvjet da zbroj brojeva u svakom retku i u svakom stupcu bude djeljiv brojem 3?

A) 36 B) 42 C) 45 D) 48 E) Neki drugi broj.

Rješenje: D
U stupcima moraju biti zbrojevi $1 + 5$, $2 + 4$, $3 + 6$ ili $1 + 2, 5 + 4, 3 + 6$.

1	2	3
5	4	6

1	5	3
2	4	6

U svakoj od ovih tablica stupce možemo razmjestiti na 3! načina. Retke možemo razmjestiti na 4 načina (zamjena cijelih redaka ili zamjena brojeva 3 i 6). Dakle, ima $2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$ načina.

Rješenja zadataka bit će objavljena 20. travnja 2018. godine na internet stranici HMD-a. Eventualne primjedbe na rješenja zadataka primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 27. travnja 2018. u 23:59.
Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 2. svibnja 2018. godine na oglasnoj ploči škole i na mrežnim stranicama HMD-a.
Primjedbe i žalbe učenika primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 9. svibnja 2018. u 23:59.
Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se od 17. svibnja 2018. godine.
Obavijesti se mogu dobiti na stranici http://www.matematika.hr/klokan/2018/ i na mrežnim stranicama HMD-a.