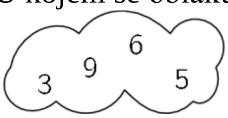
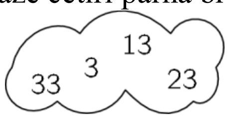
MATEMATIČKI KLOKAN C 2019.

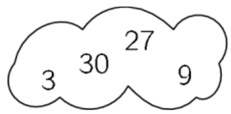
RJEŠENJA ZADATAKA

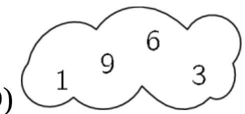
Pitanja za 3 boda:

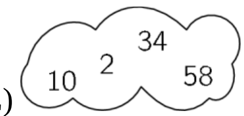
1. U kojem se oblaku nalaze četiri parna broja?

A) 

B) 

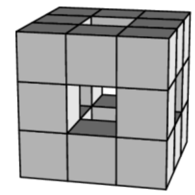
C) 

D) 

E) 

Rješenje: E

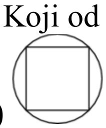
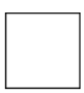
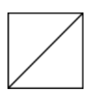
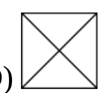
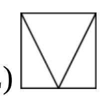
2. Kocka dimenzija $3 \times 3 \times 3$ sastavljena je od kocaka dimenzija $1 \times 1 \times 1$. Potom su uklonjene neke kocke od prednjih prema stražnjima, s lijeva na desno i odozgo prema dolje, kako je prikazano na slici. Koliko je $1 \times 1 \times 1$ kocaka ostalo?



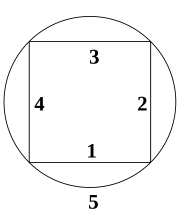
A) 15 B) 18 C) 20 D) 21 E) 22

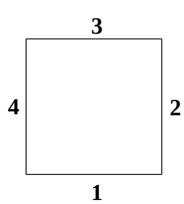
Rješenje: C
Cijela kocka dimenzija $3 \times 3 \times 3$ sadrži 27 kocaka dimenzija $1 \times 1 \times 1$. Od prednjih prema stražnjima uklonjene su tri takve kocke, s lijeva na desno dvije, a odozgo prema dolje još dvije. Ukupno ih je uklonjeno $3 + 2 + 2 = 7$ pa je ostalo 20 kocaka.

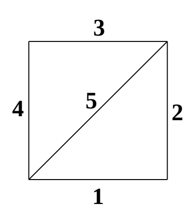
3. Koji od crteža ne može biti nacrtan bez podizanja olovke s papira i bez crtanja istom linijom više puta?

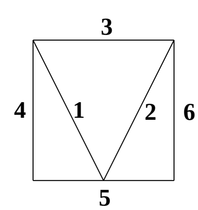
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

Rješenje: D
Crteži A), B), C) i E) mogu se nacrtati bez podizanja olovke s papira i bez crtanja istom linijom dva puta.

A) 

B) 

C) 

E) 

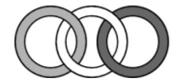
4. Eva čita knjigu kojoj su sve stranice numerirane. Korišteni brojevi sadrže znamenku 0 točno pet puta, a znamenku 8 točno šest puta. Koji je broj na posljednjoj stranici knjige?

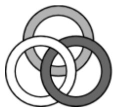
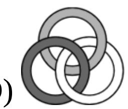
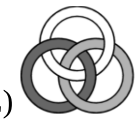
A) 48 B) 58 C) 60 D) 68 E) 88

Rješenje: B

Kako je znamenka 0 korištena točno pet puta, za numeraciju stranica upotrijebljeni su brojevi 10, 20, 30, 40 i 50.
Kako je znamenka 8 korištena točno šest puta, za numeraciju stranica upotrijebljeni su brojevi 8, 18, 28, 38, 48 i 58. Kako knjiga ne može imati 60 stranica, broj stranica knjige može biti 58 ili 59. Sve stranice knjige su numerirane pa ako je prva stranica numerirana s 1, što je neparan broj, onda zadnja stranica mora biti numerirana parnim brojem, što znači da knjiga ima 58 stranica.

5. Tri prstena spojena su kako je prikazano na slici. Koja od sljedećih slika također prikazuje prstene spojene na isti način?



A)  B)  C)  D)  E) 

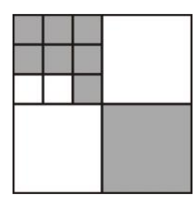
Rješenje: D
Na zadanoj slici bijeli je prsten spojen i sa svijetlosivim i s tamnosivim prstenom, a sivi prsteni nisu međusobno spojeni.
Na slici A) svi su prsteni međusobno spojeni, što je različito od spajanja prstena na zadanoj slici.
Na slici B) nisu spojeni bijeli i svjetlosivi prsten, što je različito od spajanja prstena na zadanoj slici.
Na slici C) bijeli prsten nije spojen niti s jednim sivim, a spojena su oba siva prstena, što je različito od spajanja prstena na zadanoj slici.
Na slici D) bijeli je prsten spojen s oba siva, a sivi prsteni nisu međusobno spojeni, što odgovara načinu spajanja prstena na zadanoj slici.
Na slici E) svi su prsteni međusobno spojeni, što je različito od spajanja prstena na zadanoj slici.

6. Kad se petero prijatelja sastalo, svaki je svakome dao kolačić. Potom je svatko pojeo kolačić koji je dobio. Nakon toga se ukupan broj kolačića koje su imali smanjio na pola. Koliko su ukupno kolačića imali kad su se sastali?

A) 20 B) 24 C) 30 D) 40 E) 60

Rješenje: D
Svaki od pet prijatelja dobio je četiri kolačića, a ukupno su pojeli $5 \cdot 4 = 20$ kolačića. Kako je to pola od broja kolačića koje su imali na početku, imali su 40 kolačića kad su se sastali.

7. Veliki kvadrat podijeljen je na manje kvadrate kao na slici. Koliki je dio velikoga kvadrata obojen sivo?



A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{12}$

Rješenje: D
Sivo je obojen jedan cijeli kvadrat koji čini $\frac{1}{4}$ površine velikoga kvadrata. Od drugog takvog kvadrata obojeno je $\frac{7}{9}$ odnosno $\frac{7}{9}$ od $\frac{1}{4} = \frac{7}{36}$ površine velikoga kvadrata.
Ukupno je obojeno $\frac{1}{4} + \frac{7}{36} = \frac{9}{36} + \frac{7}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$ površine velikoga kvadrata.

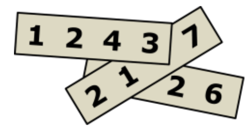
8. Adian je nekoliko jabuka podijelio u šest jednakih hrpa. Frane je isti broj jabuka podijelio u pet jednakih hrpa. Frane je primijetio da svaka njegova hrpa sadrži dvije jabuke više od svake Adianove hrpe. Koliko jabuka ima Adian?

A) 60 B) 65 C) 70 D) 75 E) 90

Rješenje: A
Ako s n označimo broj jabuka u svakoj Adianovoj hrpi, onda je ukupan broj jabuka $6n$. Kako svaka Franina hrpa sadrži dvije jabuke više nego svaka Adianova, broj jabuka u Franinim hrpama je $n + 2$, a ukupan je broj jabuka $5(n + 2)$. Stoga vrijedi:
$6n = 5(n + 2)$
$n = 10$.
Ukupan broj jabuka je 60.

Pitanja za 4 boda:

9. Četveroznamenkasti brojevi napisani su na tri papira. Papiri su složeni tako da su prekrivene tri znamenke, kako je prikazano na slici. Zbroj tih triju brojeva je 10126. Koje su znamenke prekrivene?



A) 5, 6 i 7 B) 4, 5 i 7 C) 4, 6 i 7 D) 4, 5 i 6 E) 3, 5 i 6

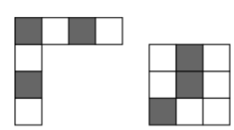
Rješenje: A
1. način:
Pisano zbrojimo ova tri broja.

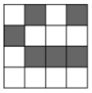
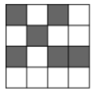
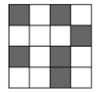
$$\begin{array}{r} 1243 \\ 21*7 \\ +\ **26 \\ \hline 10126 \end{array}$$

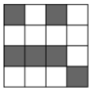
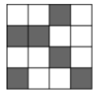
3 + 7 + 6 = 16, dakle za zbrajanje desetica imamo prijenos 1. Tada je 1 + 4 + * + 2 broj koji završava na 2, a to je moguće samo ako je riječ o zbroju 12, tj. na mjestu * treba pisati 5.
U zbroj stotica prenosi se 1. Tada je 1 + 2 + 1 + * broj koji završava s 1, tj. riječ je o zbroju 11. To znači da na mjestu * lijevo od broja 26 u trećem retku treba pisati 7.
I prenosi se 1. Konačno, zbroj 1 + 1 + 2 + * jednak je 10, tj. na mjestu zvjezdice treba pisati 6. Znamenke koje nedostaju su 6, 5, 7.

2. način:
Ako su a (znamenka desetica), b (znamenka stotica) i c (znamenka tisućica) prekrivene znamenke, zbroj tih triju brojeva prikažimo na sljedeći način:
$1243 + (2107 + 10a) + (1000c + 100b + 26) = 10126$.
Sada vrijedi:
$10a + 100b + 1000c = 6750$
$a + 10b + 100c = 675$
Kako su a i b znamenke, $a + 10b$ može najviše biti 99, pa je $c = 6$.
Tada je $a + 10b = 75$.
Kako je a najviše 9, b = 7, onda je $a = 5$. Prekrivene znamenke su 5, 6 i 7.

10. Koja se od sljedećih 4×4 pločica ne može dobiti pomoću dva dana dijela?

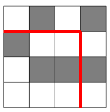
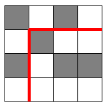
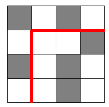
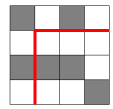


A)  B)  C) 

D)  E) 

Rješenje: E

Pločice A), B), C) i D) mogu se složiti na sljedeći način:

A)  B)  C)  D) 

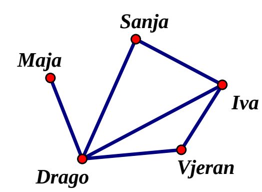
Pločica E nema kvadratni oblik kakav je zadan na slici, niti „L“ oblik s naizmjenice bijelim i sivim kvadratom.

11. Maja, Sanja, Iva, Drago i Vjeran sreli su se na zabavi i rukovali točno jednom sa svakom osobom koju poznaju. Maja se rukovala jednom, Sanja dva puta, Iva se rukovala tri puta, a Drago četiri puta. Koliko se puta rukovao Vjeran?

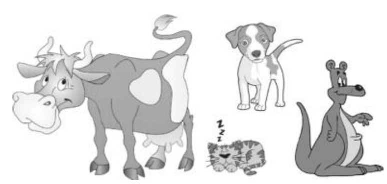
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

Rješenje: B

Grafički prikažimo rukovanja. Kako se Drago rukovao četiri puta, a Maja jednom, to znači da se Maja rukovala samo s Dragom. Iva se rukovala tri puta, od čega jednom s Dragom i niti jednom s Majom, što znači da se rukovala sa Sanjom i Vjeranom. To znači da se Sanja rukovala samo s Dragom i Ivom. Stoga se Vjeran rukovao s Ivom i Dragom, dakle dva puta.



12. Roč ima pse, krave, mačke i klokane kao kućne ljubimce. Valentini je rekao da ima ukupno 24 ljubimca, $\frac{1}{8}$ su psi, $\frac{3}{4}$ NISU krave i $\frac{2}{3}$ NISU mačke. Koliko klokana ima Roč?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Rješenje: D

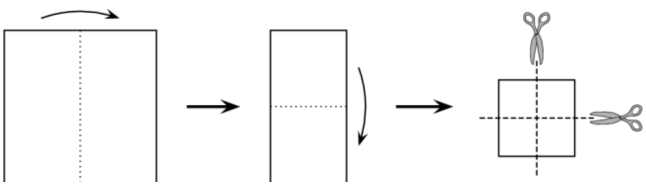
Ako Roč ima 24 ljubimca, a $\frac{1}{8}$ su psi, znači da ima 3 psa. Kako $\frac{3}{4}$ ljubimaca NISU krave, znači da su $\frac{1}{4}$ ljubimaca krave pa ima 6 krava. Kako $\frac{2}{3}$ ljubimaca NISU mačke, znači da su $\frac{1}{3}$ ljubimaca mačke pa ima 8 mačaka. To znači da ima 24 – 3 – 6 – 8 = 7 klokana.

13. Jana igra košarku. Poslije serije od 20 bacanja imala je uspješnost 55%. Pet bacanja kasnije, uspješnost joj je narasla na 56%. Koliko je uspješnih bacanja imala u posljednjih 5 bacanja?

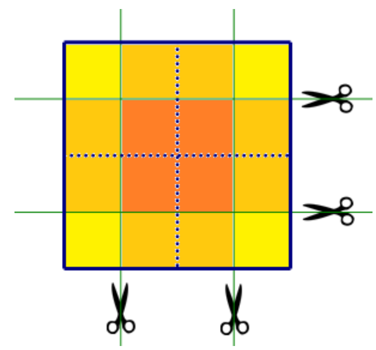
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: C
Kako je u 20 bacanja imala uspješnost 55%, znači da je pogodila 11 koševa. Ako je u 25 bacanja imala uspješnost 56%, znači da je pogodila 14 koševa. To znači da je u posljednjih 5 bacanja pogodila 3 koša.

14. Katarina je kvadratni komad papira presavila dva puta točno na pola, a potom ga je prerezala po sredini dva puta kao što je pokazano na slici. Koliko je dijelova papira, koje je na taj način dobila, kvadratnog oblika?

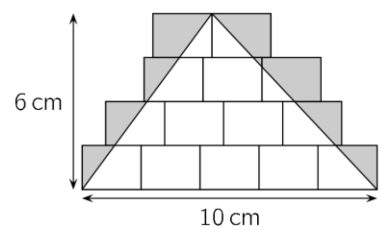


A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8



Rješenje: C
Isprekidanom linijom označimo mjesto presavijanja početnog papira i istaknimo linije po kojima je Katarina rezala papir. Rezanjem je dobila 4 manja kvadrata, 4 pravokutnika koja se sastoje od takva dva manja kvadrata i 1 kvadrat sastavljen od četiri takva manja kvadrata. Ukupno je dobila 4 + 1 = 5 dijelova oblika kvadrata.

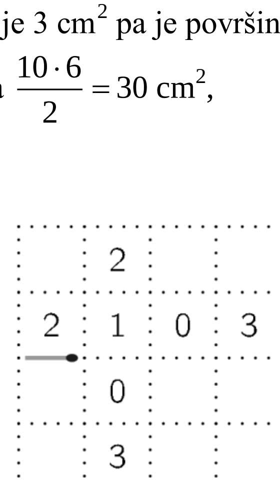
15. Na podu je nacrtano nekoliko identičnih pravokutnika. Nad njima je, kako je pokazano na slici, nacrtan trokut duljine osnovice 10 cm i visine 6 cm, a dio pravokutnika izvan trokuta je osjenčan. Kolika je površina osjenčanog dijela?



A) 10 cm^2 B) 12 cm^2 C) 14 cm^2 D) 15 cm^2 E) 21 cm^2

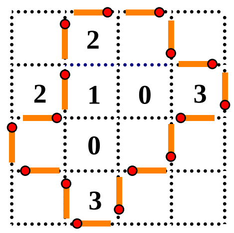
Rješenje: B
Kako je duljina pet pravokutnika 10 cm, jedan pravokutnik ima duljinu 2 cm. Kako je širina četiriju pravokutnika 6 cm, jedan pravokutnik ima širinu 1.5 cm. Površina jednog pravokutnika je 3 cm^2 pa je površina cijelog lika sastavljenog od 14 sukladnih pravokutnika 42 cm^2. Kako je površina trokuta $\frac{10 \cdot 6}{2} = 30$ cm^2, površina osjenčanog dijela je 42 – 30 = 12 cm^2.

16. Ana želi napraviti stazu od najmanjeg mogućeg broja šibica. Svaku šibicu stavlja na papir duž točkaste linije kao što je prikazano na slici. Njezina staza završava na lijevom kraju početne šibice. Brojevi istaknuti u nekim poljima jednaki su broju šibica postavljenih oko toga polja. Od koliko se šibica sastoji njezina staza?



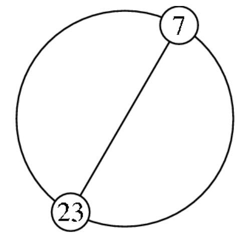
A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Rješenje: C



Pitanja za 5 bodova:

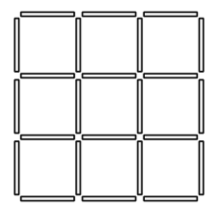
17. Prirodni brojevi od 1 do *n* (uključujući i 1 i *n*) redom su smješteni na kružnici. Promjer kružnice koji sadrži poziciju broja 7 također sadrži poziciju broja 23, kao što je pokazano na slici. Koju vrijednost ima broj *n* ?



A) 30 B) 32 C) 34 D) 36 E) 38

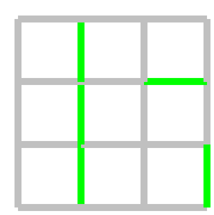
Rješenje: B
Između broja 7 i broja 23 ima 15 brojeva. Svaki od tih 15 brojeva ima svog para u rasponu brojeva od 1 do 6 te od 24 do *n*. Od 1 do 6 ima 6 brojeva, a od 24 do *n* ima $n - 23$ broja. Stoga je $6 + n - 23 = 15$, iz čega slijedi da je $n = 32$.

18. Eva ima mnogo štapića duljine 1. Štapići su plavi, crveni, žuti ili zeleni. Želi napraviti rešetku dimenzija 3×3, kao što je prikazano na slici, tako da stranice svakoga kvadrata u mreži, dimenzija 1×1, budu različitih boja. Koji je najmanji broj zelenih štapića koje će Eva koristiti?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Rješenje: C
Najmanji broj zelenih štapića koristit će ako što je moguće više zelenih štapića upotrijebi za dva kvadrata u mreži. Jedan takav primjer korištenja zelenih štapića pokazan je na slici.



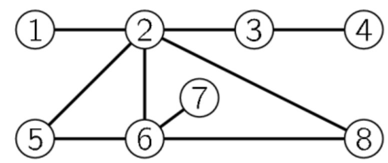
19. Ela ima veliku kutiju sa 60 čokolada. Desetinu je čokolada pojela u ponedjeljak, devetinu ostatka u utorak, osminu preostalih u srijedu, sedminu novog ostatka u četvrtak, i tako redom sve dok nije pojela polovinu čokolada koje su joj preostale od prethodnog dana. Koliko joj je čokolada ostalo?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Rješenje: E
1. način:
Kako je $\frac{1}{10}$ od $60 = \frac{1}{9}$ od $54 = \frac{1}{8}$ od $48 = \frac{1}{7}$ od $42 = \frac{1}{6}$ od $36 = \ldots = 6$, dio čokolada koji pojede svaki put iznosi 6. Zadnji će put pojesti polovinu čokolada koje ostanu od prethodnog dana, što znači da će i zadnji dan pojesti 6 čokolada. Kako je to polovina od količine preostale prethodnoga dana, prethodni dan imala je dvostruko više, tj. 12 čokolada. Ostalo joj je $12 - 6 = 6$ čokolada.

2. način:
U ponedjeljak je pojela desetinu od 60 čokolada, što iznosi 6 čokolada, pa joj je ostalo 60 – 6 = 54 čokolade.
U utorak je pojela devetinu od 54 čokolade, što iznosi 6 čokolada, pa joj je ostalo 54 – 6 = 48 čokolada.
U srijedu je pojela osminu od 48 čokolada, što iznosi 6 čokolada, pa joj je ostalo 48 – 6 = 42 čokolade.
U četvrtak je pojela sedminu od 42 čokolade, što iznosi 6 čokolada, pa joj je ostalo 42 – 6 = 36 čokolada.
U petak je pojela šestinu od 36 čokolada, što iznosi 6 čokolada, pa joj je ostalo 36 – 6 = 30 čokolada.
U subotu je pojela petinu od 30 čokolada, što iznosi 6 čokolada, pa joj je ostalo 30 – 6 = 24 čokolade.
U nedjelju je pojela četvrtinu od 24 čokolade, što iznosi 6 čokolada, pa joj je ostalo 24 – 6 = 18 čokolada.
U ponedjeljak je pojela trećinu od 18 čokolada, što iznosi 6 čokolada, pa joj je ostalo 18 – 6 = 12 čokolada.
U utorak je pojela polovinu od 12 čokolada, što iznosi 6 čokolada, pa joj je ostalo 12 – 6 = 6 čokolada.
S obzirom na to da je u utorak pojela 6 čokolada, što je polovina od 12 čokolada koje su preostale u ponedjeljak, ostalo joj je 6 čokolada.

20. Paula je obojila svaki od osam krugova na slici crvenom, žutom ili plavom bojom tako da nikoja dva kruga koja su izravno povezana nisu obojena istom bojom. Paula takvo bojenje može izvesti na nekoliko načina, ali u svakom su načinu dva kruga obojena istom bojom. Koja su to dva kruga?



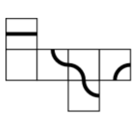
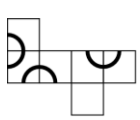
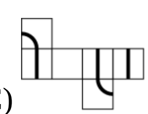
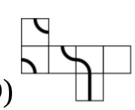
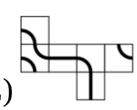
A) 5 i 8 B) 1 i 6 C) 2 i 7 D) 4 i 5 E) 3 i 6

Rješenje: A
Za bojenje krugova 1 i 2 može iskoristiti bilo koje dvije boje pa uzmimo da je krug 1 obojila crvenom, a krug 2 žutom bojom.
Prikažimo mogućnosti za daljnje bojenje krugova tablicom tako da nikoja dva kruga koja su izravno povezana nisu obojena istom bojom:

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th></tr>
<tr><td rowspan="4">C</td><td rowspan="4">Ž</td><td rowspan="2">C</td><td>Ž</td><td rowspan="2">P</td><td rowspan="2">C</td><td>P</td><td rowspan="2">P</td></tr>
<tr><td>P</td><td>Ž</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P</td><td>Ž</td><td rowspan="2">C</td><td rowspan="2">P</td><td>C</td><td rowspan="2">C</td></tr>
<tr><td>C</td><td>Ž</td></tr>
</table>

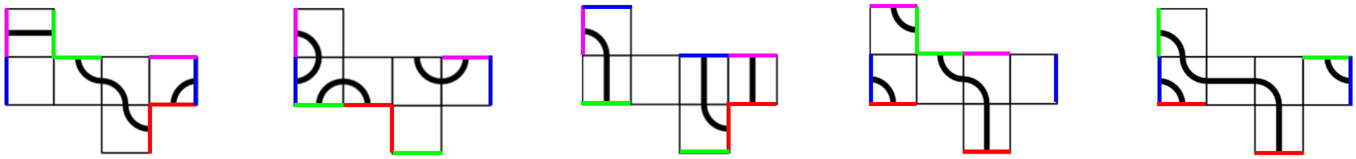
Zaključujemo kako samo krugovi 5 i 8 uvijek imaju istu boju.

21. Mrav hoda po kocki duž linije nacrtane na njezinoj mreži dok ne dođe do mjesta s kojega je i krenuo. Od koje mreže treba složiti kocku kako bi to putovanje bilo moguće?

A)  B)  C)  D)  E) 

Rješenje: E

Označimo istim bojama bridove koji se spajaju. Samo se na mreži E) sve linije na mreži nadovezuju i čine zatvorenu crtu.
A) B) C) D) E)



22. Tročlani tim šahista sudjeluje na turniru. Svaki igrač iz tima igra točno jednom protiv svakog igrača svih ostalih timova. Zbog organizacijskih razloga ukupno se na turniru može odigrati najviše 250 partija šaha. Koliko najviše timova može sudjelovati na tome turniru?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

Rješenje: E

Neka je n broj timova koji sudjeluju na turniru. Tada je ukupan broj šahista $3n$. Svaki od $3n$ igrača mora odigrati točno jednu partiju sa svakim igračem ostalih timova, a kako njih ima $3n - 3$, ukupan broj odigranih partija možemo zapisati u obliku $\frac{3n(3n-3)}{2}$. Sada vrijedi:

$$\frac{3n(3n-3)}{2} \leq 250$$
$$3n(3n-3) \leq 500$$
$$9n(n-1) \leq 500$$
$$n(n-1) \leq \frac{500}{9}$$

Odredimo najveći mogući prirodni broj manji od $\frac{500}{9} \approx 55.6$ koji je umnožak dvaju uzastopnih prirodnih brojeva.

Kako je $7 \cdot 7 = 49 < \frac{500}{9}$ i $7 \cdot 8 = 56 > \frac{500}{9}$, najveći mogući takav umnožak je $7 \cdot 6 = 42$.

To znači da je najviše 7 timova sudjelovalo na turniru.

23. Vlak ima 18 vagona u kojima putuje 700 putnika. U svakih 5 uzastopnih vagona ukupno je 199 putnika. Koliko se putnika nalazi u dva susjedna srednja vagona toga vlaka?

A) 70 B) 77 C) 78 D) 96 E) 103

Rješenje: D

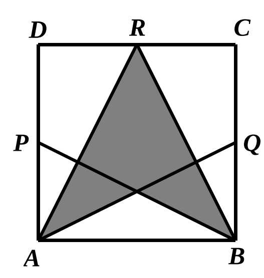
Susjedni, srednji vagoni vlaka koji ima 18 vagona su 9. i 10. jer ispred 9. vagona i iza 10. vagona ima po 8 vagona.

U 1., 2., 3., 4. i 5. vagonu ima 199 putnika, u 6., 7., 8., 9. i 10. vagonu ima 199 putnika, u 9., 10., 11., 12. i 13. vagonu ima 199 putnika te u 14., 15., 16., 17. i 18. vagonu također ima 199 putnika. Ako zbrojimo broj tih putnika, putnike u 9. i 10. vagonu na taj način brojit ćemo dva puta. Označimo s n ukupan broj putnika u 9. i 10. vagonu pa dobijemo:

$4 \cdot 199 = n + 700$

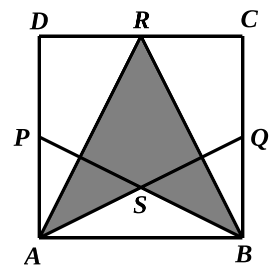
$n = 96.$

24. Slika prikazuje kvadrat $ABCD$ s istaknutim polovištima P, Q, R njegovih stranica $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ redom. Koliki je dio kvadrata osjenčan?



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{7}{16}$ E) $\frac{3}{8}$

Rješenje: E



Neka je *a* duljina stranice kvadrata *ABCD*. Četverokut *ABQP* je pravokutnik. Označimo sa *S* sjecište njegovih dijagonala pa je trokut ΔABS jednakokračan, duljina visine na osnovicu *a* jednaka mu je četvrtini duljine osnovice, tj. $\frac{a}{4}$, i površina mu je

$P_{ABS} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^2}{8}$.

Trokut ΔABR je jednakokračan, duljina visine na osnovicu *a* jednaka je također *a* pa mu je površina $P_{ABR} = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{a^2}{2}$.

Površina osjenčanog dijela je :

$$P_{ASBR} = P_{ABR} - P_{ABS}$$

$$P_{ASBR} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8}$$

$$P_{ASBR} = \frac{4a^2}{8} - \frac{a^2}{4}$$

$$P_{ASBR} = \frac{3a^2}{8} = \frac{3}{8} a^2 = \frac{3}{8} P_{ABCD}$$

Eventualne primjedbe na rješenja zadataka primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 28. travnja 2019. u 23:59.
Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 2. svibnja 2019. godine na internetskoj stranici HMD-a.
Primjedbe i žalbe učenika primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 9. svibnja 2019. u 23:59.
Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se od 20. svibnja 2019. godine.
Obavijesti se mogu dobiti na internetu – **http://www.matematika.hr/klokan/2019/.**