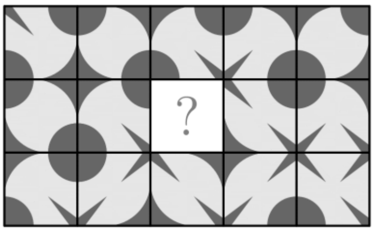
MATEMATIČKI KLOKAN B 2020.

RJEŠENJA ZADATAKA

Pitanja za 3 boda:

1. Koji dio nedostaje?



A)  B)  C)  D)  E) 

Rješenje: E
U gornjem lijevom dijelu kvadrata treba biti četvrtina kruga, a to je samo na slici E.

2. Dok je hodala od Agrada do Begrada, Ana je prošla pored pet putokaza. Jedan od njih je pogrešan. Koji?

A) 

B) 

C) 

D) 

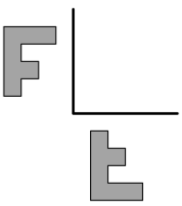
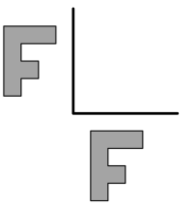
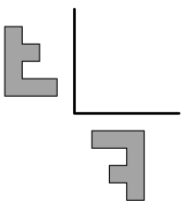
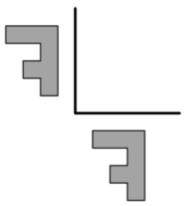
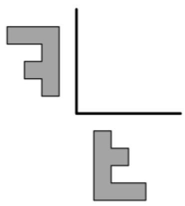
E) 

Rješenje: E
Udaljenost Agrada i Begrada je 11 km na četiri putokaza, a na petom je 13 km. Dakle, pogrešan je putokaz E.

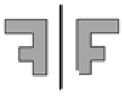
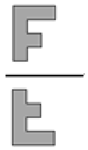
3. Za svoj rođendan Iva želi ispeći 24 tortice. Za šest tortica potrebna su joj dva jaja. Jaja su složena u kutije od po šest komada. Koliko takvih kutija jaja treba kupiti?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

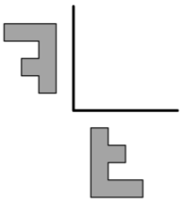
Rješenje: B
Ako za 6 tortica treba 2 jaja, onda za 24 tortice treba 8 jaja. Kako u jednoj kutiji ima 6 jaja, što joj nije dovoljno, Iva treba kupiti 2 kutije jaja.

4. Franka crta simetrične slike početnog slova svoga imena s obzirom na dvije istaknute crte kao na slici. Kako će izgledati njezin crtež?

A)  B)  C)  D)  E) 

Rješenje: E

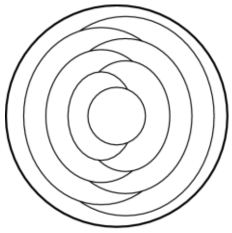
Simetrična slika s obzirom na vertikalnu liniju je  , a s obzirom na horizontalnu liniju je 

Rješenje je  .

5. Katarina ima 10 listova papira. Neke od njih prerezala je na pet dijelova. Poslije toga imala je ukupno 22 komada papira. Koliko je listova papira prerezala?
A) 3 B) 2 C) 6 D) 7 E) 8

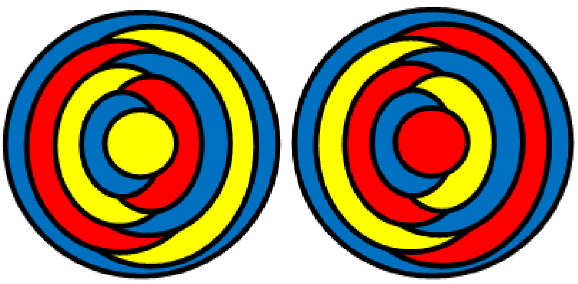
Rješenje: A
Ako je prerezala 1 papir, ukupno ima 9 + 5 = 14 komada papira.
Ako je prerezala 2 papira, ukupno ima 8 + 10 = 18 komada papira.
Ako je prerezala 3 papira, ukupno ima 7 + 15 = 22 komada papira.

6. Eva je obojila svaki dio tanjura crvenom, plavom ili žutom bojom. Susjedne dijelove obojila je različitim bojama. Vanjski prsten obojila je plavom bojom. Koliko će na kraju biti plavih dijelova tanjura?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Rješenje: B
S obzirom da se susjedna područja moraju obojiti različitim bojama, imamo dvije mogućnosti:

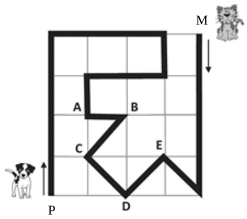


U svakom slučaju, na kraju će biti 3 plava dijela.

7. Četiri košare sadrže redom 1, 4, 6 i 9 jabuka. Koliko najmanje jabuka treba premjestiti da bi u košarama bio isti broj jabuka?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

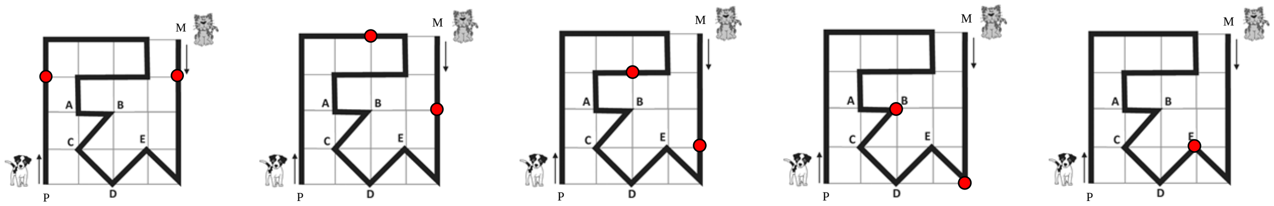
Rješenje: C
U te četiri košare ima ukupno 1 + 4 + 6 + 9 = 20 jabuka. Budući da ih treba biti isti broj, svaka će sadržavati 20 : 4 = 5 jabuka. Iz četvrte treba maknuti 4 i premjestiti u prvu košaru, a iz treće treba maknuti 1 i premjestiti u drugu. Dakle, potrebno je premjestiti najmanje 5 jabuka.

8. Pas i mačka hodaju parkom duž istaknute linije. Istovremeno su krenuli pas iz točke P, a mačka iz točke M. Ako pas hoda trostruko brže od mačke, gdje će se sresti?



A) u A B) u B C) u C D) u D E) u E

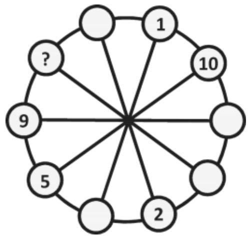
Rješenje: E
Prikažimo nizom slika položaj psa i mačke nakon svakog mačkinog koraka.



Srest će se u točki E.

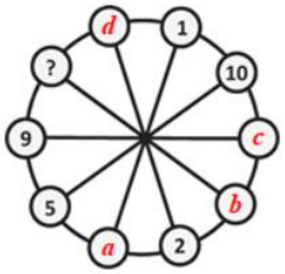
Pitanja za 4 boda:

9. Brojevi od 1 do 10 smješteni su po jedan u svaki od 10 manjih krugova. Zbroj brojeva u susjednim krugovima jednak je zbroju brojeva u njima dijametralno suprotnim krugovima. Neki od brojeva već su smješteni u krugove. Koji će broj biti u krugu sa znakom upitnika?

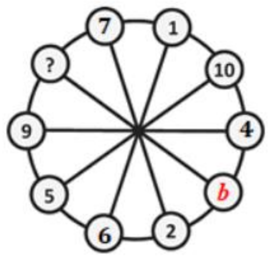


A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

Rješenje: A
Označimo s *a, b, c, d* brojeve koji nedostaju.



Sada vrijedi:
5 + *a* = 1 + 10, pa je *a* = 6.
1 + *d* = 2 + 6, pa je *d* = 7.
10 + *c* = 9 + 5, pa je *c* = 4.

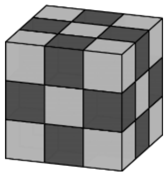
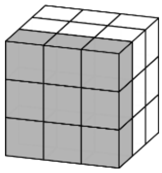
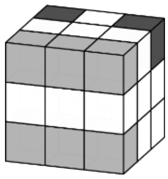
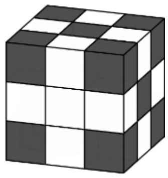
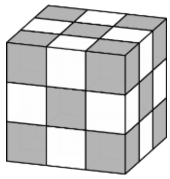


Konačno, upisani su brojevi 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 i 10 pa vrijedi 2 + *b* = ? + 7.
Budući da još treba upisati brojeve 3 i 8, očito je *b* = 8, a ? = 3.

10. Kad je šišmiš Jan napustio pećinu, na digitalnom je satu pisalo 20:20. Kad se vratio natrag i objesio se glavom prema dolje, na satu je vidio 20:20. Koliko je dugo Jan bio u lovu izvan pećine?
A) 3 sata i 28 minuta B) 3 sata i 40 minuta C) 3 sata i 42 minute
D) 4 sata i 18 minuta E) 5 sati i 42 minute

Rješenje: E
Jan je napustio pećinu u 20:20, a vratio se u 02:02.
Od 20:20 do 00:00 prošla su 3 sata i 40 minuta, a od 00:00 do 02:02 još 2 sata i 2 minute pa je Jan bio u lovu 5 sati i 42 minute.

11. Nora ima točno 10 bijelih, 9 svjetlosivih i 8 tamnosivih kocaka iste veličine. Sve ih je zalijepila i sastavila u veliku kocku. Koju je od sljedećih kocaka mogla sastaviti?

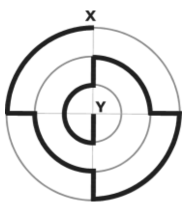
A)  B)  C)  D)  E) 

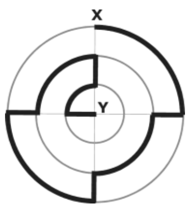
Rješenje: B
Kocku A nije mogla složiti jer ona sadrži najmanje 10 svjetlosivih kocaka, a Nora ih ima 9.
Kocku C nije mogla složiti jer ona sadrži najmanje 11 bijelih kocaka, a Nora ih ima 10.
Kocku D nije mogla složiti jer ona sadrži najmanje 9 tamnosivih kocaka, a Nora ih ima 8.
Kocku E nije mogla složiti jer ona sadrži najmanje 10 svjetlosivih kocaka, a Nora ih ima 9.
Kocka B sadrži sigurno 9 svjetlosivih i 10 bijelih kocaka. Kako se velika kocka sastoji od 27 manjih, preostalih 27 – 19 = 8 koje se ne vide mogu biti tamnosive pa Nora može sastaviti kocku B.

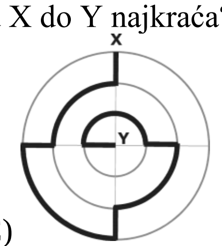
12. Umnožak triju prirodnih brojeva je 12 (faktori smiju biti jednaki). Koji od sljedećih brojeva ne može biti njihov zbroj?
A) 7 B) 8 C) 9 D) 12 E) 14

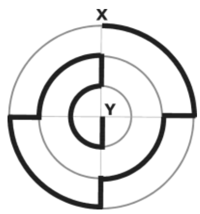
Rješenje: D
Zapišimo broj 12 u obliku umnoška triju faktora te izračunajmo njihov zbroj:
$12 = 1 \cdot 1 \cdot 12$, $1 + 1 + 12 = 14$
$12 = 1 \cdot 2 \cdot 6$, $1 + 2 + 6 = 9$
$12 = 1 \cdot 3 \cdot 4$, $1 + 3 + 4 = 8$
$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $2 + 2 + 3 = 7$
Zbroj tih triju prirodnih brojeva ne može biti 12.

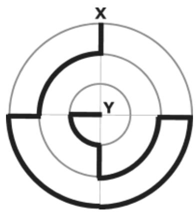
13. Koja je od sljedećih pet istaknutih staza od X do Y najkraća?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Rješenje: C
Svaka staza sadrži točno pet identičnih ravnih dijelova: tri između najveće i srednje kružnice, jedan između srednje i najmanje te jedan između najmanje kružnice i središta danih koncentričnih kružnica, stoga oni ne utječu na duljinu staze.
Označimo sada za svaku od staza koliki dio sadrži od svake kružnice.

	od najveće kružnice	od srednje kružnice	od najmanje kružnice
A staza	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
B staza	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
C staza	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
D staza	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
E staza	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

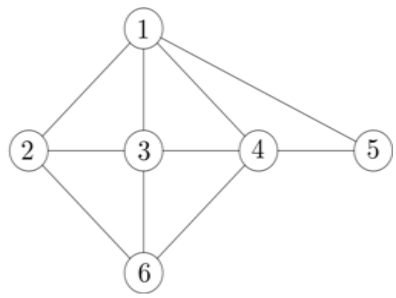
A staza i D staza istih su duljina i najdulje su. Staze B, C i E sadrže isti dio srednje staze, no B i E sadrže $\frac{1}{2}$ najveće kružnice i $\frac{1}{4}$ najmanje kružnice, a staza C $\frac{1}{4}$ najdulje kružnice i $\frac{1}{2}$ najmanje kružnice. Zato je C najkraća staza.

14. Otac živi sa svoje troje djece. O svemu odlučuju glasanjem, i to tako da svaki član obitelji ima onoliko glasova koliko ima godina. Otac ima 36 godina, a djeca redom 13, 6 i 4 pa otac uvijek pobjeđuje. Koliko najmanje godina treba proći da bi djeca mogla pobijediti ukoliko svo troje glasaju jednako?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 13 E) 14

Rješenje: C
1. način
Sada otac ima 36 glasova, a djeca 13 + 6 + 4 = 23 glasa.
Za n godina otac će imati 36 + n glasova, a djeca 23 + 3n.
Djeca će pobijediti oca kada razlika ukupnog broja njihovih godina i očevih godina bude veća od 0. To znači da tražimo najmanji mogući prirodan broj n tako da bude $23 + 3n - (36 + n) > 0$.
Sada je $23 + 3n - 36 - n > 0$, odnosno $3n - 13 > 0$. Ta će razlika biti veća od 0 ako je $3n > 13$, odnosno kad je $n > \frac{13}{2}$.
$n > 6\frac{1}{2}$ i $n \in \mathbb{N}$ pa zaključujemo da je najmanji takav broj 7.
2. način
Djeca će pobijediti oca kada zbroj njihovih glasova bude veći od očevih glasova.
Danas otac ima 36 glasova, a djeca 13 + 6 + 4 = 23 glasa.
Za 1 godinu otac će imati 36 + 1 = 37 glasova, a
djeca $(13 + 1) + (6 + 1) + (4 + 1) = (13 + 6 + 4) + 3 \cdot 1 = 23 + 3 = 26$.
Za 2 godine otac će imati 36 + 2 = 38 glasova, a
djeca $(13 + 2) + (6 + 2) + (4 + 2) = (13 + 6 + 4) + 3 \cdot 2 = 23 + 6 = 29$.
Za 3 godine otac će imati 36 + 3 = 39 glasova, a djeca $23 + 3 \cdot 3 = 23 + 9 = 32$.
Za 4 godine otac će imati 36 + 4 = 40 glasova, a djeca $23 + 3 \cdot 4 = 23 + 12 = 35$.
Za 5 godina otac će imati 36 + 5 = 41 glas, a djeca $23 + 3 \cdot 5 = 23 + 15 = 38$.
Za 6 godina otac će imati 36 + 6 = 42 glasa, a djeca $23 + 3 \cdot 6 = 23 + 18 = 41$.
Za 7 godina otac će imati 36 + 7 = 43 glasa, a djeca $23 + 3 \cdot 7 = 23 + 21 = 44$.
Kako je 44 > 43, zaključujemo da treba proći najmanje 7 godina.

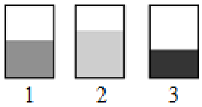
15. Sljedećim dijagramom prikazano je prijateljstvo između Ane, Blanke, Cvite, Dijane, Eme i Flore. Svaki broj predstavlja jednu djevojčicu, a svaka crta prijateljstvo dviju djevojčica. Svaka od triju djevojčica - Cvita, Dijana i Flora - ima četiri prijateljice. Cvita i Dijana Blankine su prijateljice. Blanka nema drugih prijateljica osim njih. Koji broj predstavlja Floru?

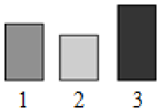


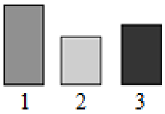
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

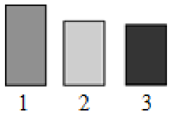
Rješenje: B
Po četiri prijateljice imaju osobe označene s 1, 3 i 4, pa ti brojevi predstavljaju Cvitu, Dijanu i Floru. Osoba označena s 5 ima samo dvije prijateljice, i to 1 i 4, pa broj 5 predstavlja Blanku. To znači da broj 3 predstavlja Floru.

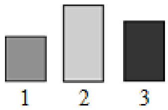
16. Maja je ulila istu količinu tekućine u tri pravokutne posude. Ako prazne posude gledamo s prednje strane, čini se da su iste veličine, ali kad je Maja ulila tekućinu, dosegla je različite visine. Koja od sljedećih slika predstavlja te tri posude gledano odozgo?

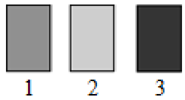


A) 

B) 

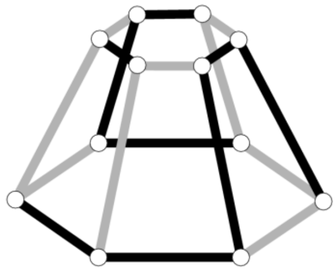
C) 

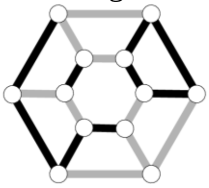
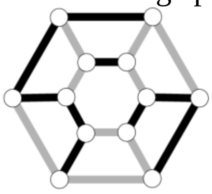
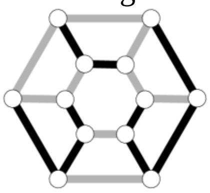
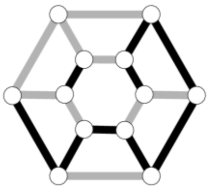
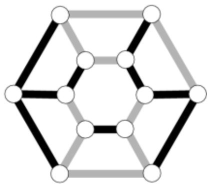
D) 

E) 

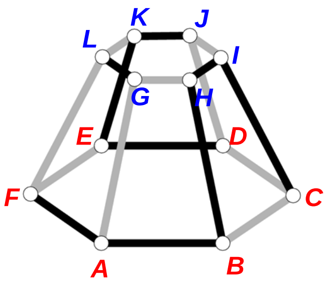
Rješenje: A
Posude su jednakih visina i duljina, no očito su različitih širina pa je najšira posuda ona u kojoj je tekućina do najniže razine. Dakle, poredak posuda sa slike ako ih gledamo odozgo je:
I. posuda srednje širine,
II. posuda najmanje širine jer je u njoj razina vode najviša,
III. posuda najveće širine jer je u njoj razina vode najniža.
To znači da je rješenje prikazano slikom A.

Pitanja za 5 bodova:
17. Kako izgleda objekt na slici kada ga pogledamo odozgo?

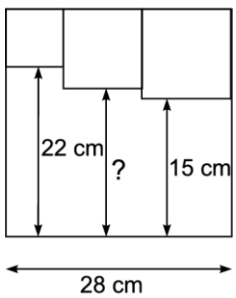


A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

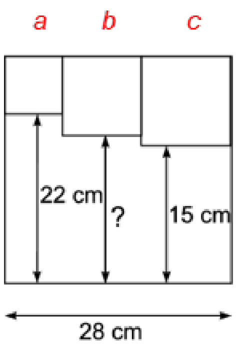
Rješenje: B
Objekt na slici omeđen je s dva šesterokuta i šest trapeza. Označimo vrhove većeg šesterokuta s *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, a odgovarajuće vrhove manjeg s *G*, *H*, *I*, *J*, *K*, *L*. Trapez *FAGL* ima dva siva kraka i dvije crne osnovice. Takav trepez nalazi se samo na slikama A i B. Trapez *BCIH* ima dulju osnovicu sivu, a ostale stranice crne. U slici A ne postoji takav trapez, dok u slici B postoji. Slika B je rješenje.



18. Tri manja kvadrata nacrtana su unutar većega kao što je prikazano na slici. Kolika je duljina dužine označene znakom upitnika?
A) 17 cm B) 17.5 cm C) 18 cm D) 18.5 cm E) 19 cm



Rješenje: E



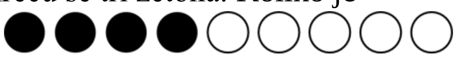
Označimo redom duljine stranica manjih kvadrata s *a*, *b*, *c* tako da je $a < b < c$. Sada je:
$a + b + c = 28$ cm.
Također vrijedi:
$22 + a = 28$ i $15 + c = 28$, odnosno $a = 6$ cm i $c = 13$ cm.
Znači da je $b = 28 - 6 - 13 = 9$ cm.
Duljina dužine označene znakom upitnika je $28 - 9 = 19$ cm.

19. Troznamenkasti broj je *lijep* ako mu je srednja znamenka veća od zbroja susjednih dviju. Koji je najveći broj uzastopnih *lijepih* brojeva?
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Rješenje: D
1. način
Označimo troznamenkasti broj $\overline{abc}$. Iz uvjeta zadatka, taj broj je *lijep* ako je $b > a + c$.
Kako su a, b i c znamenke i a mora biti različit od nule, imamo sljedeće mogućnosti:
$b = 2$, $a = 1$, $c = 0$ odnosno broj 120.
$b = 3$, $a = 1$, $c = 0$
$b = 3$, $a = 1$, $c = 1$ odnosno brojevi 130 i 131.
$b = 4$, $a = 1$, $c = 0$
$b = 4$, $a = 1$, $c = 1$
$b = 4$, $a = 1$, $c = 2$
$b = 4$, $a = 2$, $c = 0$
$b = 4$, $a = 2$, $c = 1$ odnosno brojevi 140, 141, 142, 240 i 241.
Sad je jasno da se najveći mogući niz dobije za najveći mogući b i najmanji mogući a. To je moguće u 8 slučajeva, i to:
$b = 9$, $a = 1$, $c = 0$
$b = 9$, $a = 1$, $c = 1$
$b = 9$, $a = 1$, $c = 2$
$b = 9$, $a = 1$, $c = 3$
$b = 9$, $a = 1$, $c = 4$
$b = 9$, $a = 1$, $c = 5$
$b = 9$, $a = 1$, $c = 6$
$b = 9$, $a = 1$, $c = 7$
Najveći broj uzastopnih lijepih brojeva je 8, i to su 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197.

2. način
Označimo troznamenkasti broj $\overline{abc}$. Iz uvjeta zadatka taj broj je *lijep* ako je $b > a + c$.
Kako su a, b i c znamenke i a mora biti različit od nule, najveći niz uzastopnih *lijepih* brojeva dobije se za najveći mogući b i najmanji mogući a. Najveća moguća znamenka je 9, a najmanja moguća znamenka različita od 0 je 1. Sada vrijedi: $9 > 1 + c$, odnosno $c < 8$.
Kako je c znamenka, imamo 8 mogućnosti: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7.

20. Devet žetona s jedne je strane crno, a s druge strane bijelo. U početnom položaju četiri su žetona postavljena s crnom stranom okrenutom prema gore. U jednom koraku okreću se tri žetona. Koliko je najmanje koraka potrebno da bi svi žetoni bili iste boje?



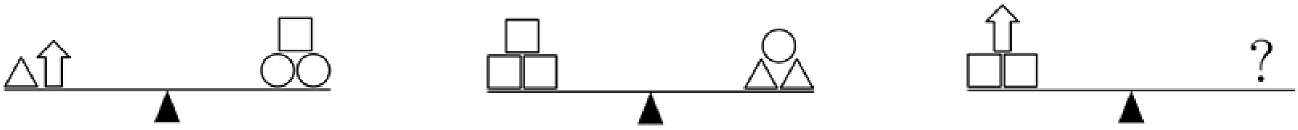
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: B
Promotrimo sve mogućnosti broja žetona po bojama nakon 1. koraka.

broj okrenutih crnih žetona	broj okrenutih bijelih žetona	ukupan broj crnih žetona	ukupan broj bijelih žetona
0	3	4 + 3 = 7	5 – 3 = 2
1	2	4 – 1 + 2 = 5	5 – 2 + 1 = 4
2	**1**	**4 – 2 + 1 = 3**	**5 – 1 + 2 = 6**
3	0	4 – 3 = 1	5 + 3 = 8

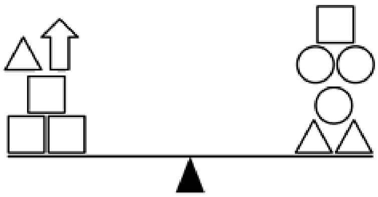
S obzirom da tražimo najmanji broj okretanja žetona, očito je to u slučaju gdje je broj žetona iste boje najmanji broj djeljiv s 3. Dakle, to je u 3. slučaju.
To znači da u prvom koraku treba okrenuti 2 crna i 1 bijeli žeton, a u 2. koraku 3 crna žetona. Nakon toga će svi žetoni biti bijeli.

21. Koji od ponuđenih odgovora stavlja treću vagu u ravnotežu?

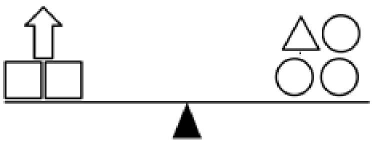


A)  B)  C)  D)  E) 

Rješenje: C
1. način:
Premjestimo sve objekte iz 1. na drugu vagu tako da vaga ostane u ravnoteži.



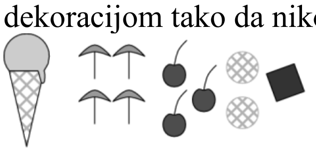
Maknemo li sada s obje strane jedan trokut i jedan kvadrat, vaga će i dalje biti u ravnoteži.



Znači, ponuđeni odgovor C stavlja treću vagu u ravnotežu.

2. način:
Označimo s a masu jednog trokuta, s b masu jedne strelice, s c masu jednog kvadrata i s d masu jednog kruga.
Sada vrijedi:
$a + b = c + 2d$
$3c = 2a + d$
Zbrajanjem tih jednakosti dobijemo:
$a + b + 3c = c + 2d + 2a + d$, odnosno:
$a + b + 3c = 2a + c + 3d$.
Sada je:
$b + 2c = a + 3d$.
Dakle, treća će vaga biti u ravnoteži ako su na drugom kraku jedan trokut i tri kruga, tj. odgovor je C.

22. Deset osoba naručilo je sladoled, svaki po jednu kuglicu:
četiri kuglice od vanilije, tri kuglice od čokolade, dvije kuglice od limuna i jednu kuglicu od manga. Kuglice su ukrašene s četiri kišobrana, tri višnje, dva keksa i jednom kockicom čokolade - svaka kuglica jednom dekoracijom tako da nikoja dva sladoleda nisu ista. Koja od sljedećih kombinacija nije poslužena?



A) čokolada s višnjom B) mango s kišobranom C) vanilija s kišobranom
D) limun s keksom E) vanilija s kockicom čokolade

Rješenje: D
1. način
Označimo okuse kuglica sladoleda s V vanilija, Č čokolada, L limun i M mango te ukrase za sladoled s k kišobran, v višnja, ke keks i kč kockica čokolade.
Sladoledi su V, V, V, V, Č, Č, Č, L, L, M, a ukrasi su k, k, k, k, v, v, v, ke, ke, kč.

S obzirom da ima najviše kišobrana, prvo rasporedimo po jedan kišobran na po jedan sladoled od svakog okusa.
Vk, V, V, V, Čk, Č, Č, Lk, L, Mk.
Ostalo je za rasporediti ukrase v, v, v, ke, ke, kč. Sad ukras višnja rasporedimo na sljedeći način:
Vk, Vv, V, V, Čk, Čv, Č, Lk, Lv, Mk.
Ostalo je za rasporediti ukrase ke, ke, kč. Sad ukras keks rasporedimo na sljedeći način:
Vk, Vv, Vke, V, Čk, Čv, Čke, Lk, Lv, Mk.
Ostalo je za rasporediti ukras kč pa konačno dobijemo
Vk, Vv, Vke, Vkč, Čk, Čv, Čke, Lk, Lv, Mk.
Dakle, od ponuđenih, nije moguće dobiti limun s keksom, D.

2. način

S obzirom da nema jednakih kombinacija, kišobran moramo rasporediti na sva četiri okusa. Kako su ostale tri kuglice vanilije, dvije čokolade i jedan limun, višnje moraju ići na sva tri različita okusa. Ostale su dvije kuglice vanilije i jedna kockica čokolade, pa keks moramo rasporediti na dva različita okus. Na kraju ostaje jedna kuglica vanilije i jedna kockica čokolade.

	vanilija	vanilija	vanilija	vanilija	čokolada	čokolada	čokolada	limun	limun	mango
kišobran	*				*			*		*
višnja		*				*			*	
keks			*				*			
kockica čokolade				*						

Dakle, od ponuđenih, nije moguća kombinacija limun s keksom.

23. Na šahovskom turniru Marko je odigrao 15 partija. U jednom trenu tijekom turnira pobijedio je pola odigranih partija, izgubio je trećinu, a dvije su partije bile neriješene. Koliko je partija još trebao odigrati do kraja turnira?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

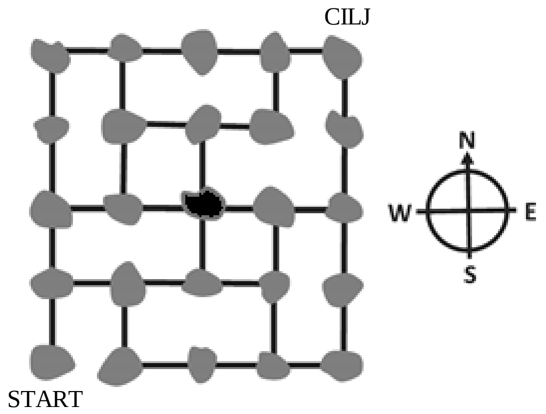
Rješenje: B

Neka je Marko odigrao n partija i do tada pobijedio u pola odigranih partija, odnosno $\frac{n}{2}$. Izgubio je trećinu, odnosno $\frac{n}{3}$, a dvije su partije bile neriješene. Sada vrijedi:

$$\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+2=n$$
$$3n+2n+12=6n$$
$$n=12.$$

Do kraja turnira trebao je odigrati još 15 – 12 = 3 partije.

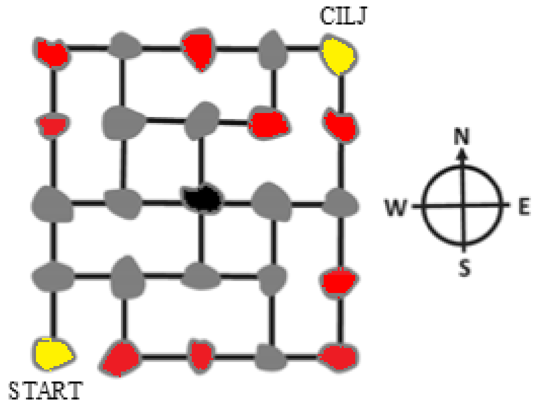
24. Slika prikazuje kartu otoka i način na koji su povezani mostovima. Poštar želi doći do svakog otoka točno jednom. Počeo je na otoku označenom »START« i želi završiti obilazak na otoku označenom »CILJ«. Upravo je stigao na otok obojen u crno, na sredini karte. U kojem smjeru treba krenuti?

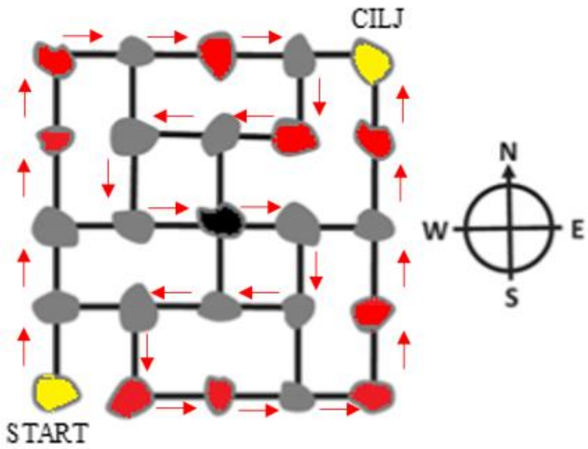


A) na sjever B) na istok C) na jug D) na zapad
E) ne postoji staza kojom može krenuti

Rješenje: B

Uočimo da na karti postoje otoci koji su povezani samo s dva druga otoka. S obzirom na to da poštar želi doći na svaki otok točno jednom, kod takvih otoka poštarov je put jednoznačno određen. Na takav otok mora doći iz jednog susjednog otoka i otići na drugi. Takve otoke na karti označimo crvenom bojom. Sada je jednostavno odrediti poštarov put. Na slici je označen crvenim stralicama pa vidimo da iz crnog otoka treba krenuti na istok.





Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 4. svibnja 2020. godine na internetskoj stranici HMD-a.
Primjedbe učenika na plasman primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 11. svibnja 2020. u 23:59.
Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se od 21. svibnja 2020. godine.
Obavijesti se mogu dobiti na internetu – **http://www.matematika.hr/klokan/2020/**.