MATEMATIČKI KLOKAN C 2022.

RJEŠENJA ZADATAKA

Pitanja za 3 boda:

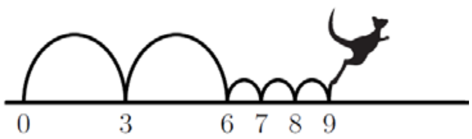
1. Nora je presložila pet prikazanih numeriranih dijelova tako da oni zajedno čine najmanji mogući deveteroznamenkasti broj. Koji je od dijelova zadnji zdesna u nizu dijelova koji čine taj broj?

A) $\boxed{4}$ B) $\boxed{8}$ C) $\boxed{31}$ D) $\boxed{59}$ E) $\boxed{107}$

Rješenje: B

Na desnom je kraju dio $\boxed{8}$ jer se najmanji mogući broj dobije ako se ti dijelovi slože na ovaj način:
$\boxed{107}\boxed{31}\boxed{4}\boxed{59}\boxed{8}$

2. Kloksi uživa skakati po brojevnoj crti. Uvijek skače tako da napravi dva velika skoka, a potom slijede tri mala, i takav postupak stalno ponavlja. Kloksi je počeo skakati s pozicije 0. Na koji će od brojeva skočiti skačući na opisani način?



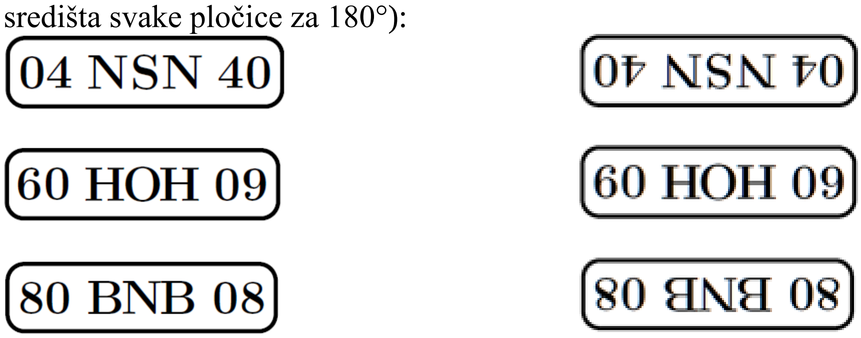
A) 82 B) 83 C) 84 D) 85 E) 86

Rješenje: C
Svaki put kad napravi dva velika i potom tri mala skoka, pomakne se za 9 jedinica. Nakon 9 ponavljanja tog obrasca, skočit će na poziciju 81. Kako slijede dva velika skoka, skočit će na 81 + 3 = 84, a potom na 84 + 3 = 87. Od ponuđenih brojeva skočit će na 84, dakle rješenje je C).

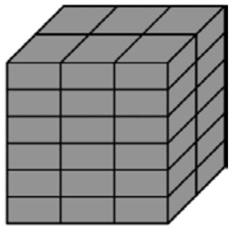
3. Ivi je s automobila pala registarska pločica. Zabunom ju je pričvrstila naopako, no na svu sreću registarska oznaka ostala je ista. Koja od sljedećih može biti Ivina registarska pločica?

A) 04 NSN 40 B) 60 HOH 09 C) 80 BNB 08 D) 03 HNH 30 E) 08 XBX 80

Rješenje: B
Pokažimo redom kako bi izgledale registarske pločice da ih pričvrstimo naopako (odnosno rotiramo oko središta svake pločice za 180°):



Rješenje je B).



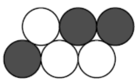
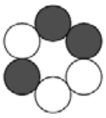
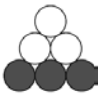
4. Graditelj Jan slaže cigle kojima su najkraći bridovi duljine 4 cm. Pomoću nekoliko takvih cigli složio je kocku kao na slici. Koja je dimenzija cigle izražena u centimetrima?

A) 4 x 6 x 12 B) 4 x 6 x 16 C) 4 x 8 x 12 D) 4 x 8 x 16 E) 4 x 12 x 16

Rješenje: C

Slažući kocku postavio je u vis šest cigli – po duljini tri cigle i po širini dvije cigle – zato je najkraći brid cigle njena visina. Ako označimo dimenzije bridova cigle *d* duljina, *š* širina, i *v* visina, $š > d > v$, onda vrijedi:
$v = 4$ cm
Brid kocke ima duljinu $6 \cdot v = 24$ cm.
Duljina cigle je $d = 24 : 3 = 8$ cm, a širina $š = 24 : 2 = 12$ cm.
Dimenzije cigle su 4 x 8 x 12, dakle rješenje je C).

5. Crno-bijela gusjenica prikazana na slici sklupčala se da bi malo odspavala. Kako bi tako sklupčana mogla izgledati?

A)  B)  C)  D)  E) 

Rješenje: A
Jedino je u prvom ponuđenom obliku moguće povezati crne i bijele dijelove naizmjenično neprekinutom crtom. Dakle, rješenje je A).

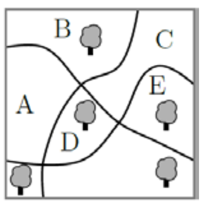
6. U prikazanom izrazu nalazi se pet praznih polja. Sanja želi u četiri od njih upisati znak plus, a u jedan znak minus tako da dobivena jednakost vrijedi. Gdje treba upisati znak minus?

6 □ 9 □ 12 □ 15 □ 18 □ 21 = 45

A) Između 6 i 9. B) Između 9 i 12. C) Između 12 i 15. D) Između 15 i 18. E) Između 18 i 21.

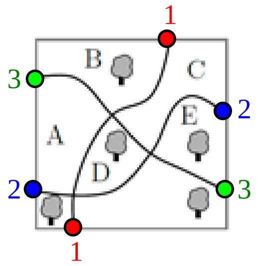
Rješenje: D
Budući da je ukupan zbroj 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 = 81, a 81 – 45 = 36, znači da smo zbrajanjem svih brojeva dobili 36 previše. To znači da je u ukupnom zbroju broj koji treba oduzeti dodan dvostruko, pa treba oduzeti 36 : 2 = 18.
6 + 9 + 12 + 15 – 18 + 21 = 45.
Znači da je rješenje D).

7. U parku se nalazi pet velikih stabala i tri staze. U kojem dijelu parka treba posaditi novo stablo tako da s obje strane svake staze bude isti broj stabala?



A) A B) B C) C D) D E) E

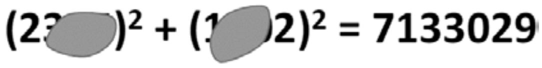
Rješenje: B



S lijeve su strane staze **1** dva, a s desne strane tri stabla. Stoga stablo treba posaditi u dijelu A ili B.
Iznad staze **2** su dva, a ispod su tri stabla. Stoga stablo treba posaditi u dijelu A ili B ili C ili D.
Iznad staze **3** su dva, a ispod su tri stabla. Stoga stablo treba posaditi u dijelu B ili C ili E.
Kako je dio B jedini dio parka koji zadovoljava sva tri uvjeta, rješenje je B).

8. Eva je zapisala zbroj kvadrata dvaju brojeva kao što je prikazano na slici. Nažalost, dio se znamenaka ne vidi jer su umrljane tintom. Koja je posljednja znamenka prvog broja?

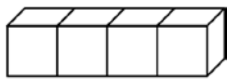
A) 3 B) 4 C) 5 D)6 E) 7



Rješenje: C
Znamenka jedinica drugog broja je 2 pa je znamenka jedinica njegovog kvadrata 4. Stoga je znamenka kvadrata prvog broja 9 – 4 = 5, a onda je jedina mogućnost za znamenku jedinica prvog broja 5. Rješenje je C).

Pitanja za 4 boda:

9. Na standardnoj igraćoj kocki zbroj brojeva točaka na suprotnim stranama uvijek je 7. Četiri standardne igraće kocke zalijepljene su na način prikazan na slici. Koji je najmanji broj točaka koje se nalaze na svim stranama nastaloga kvadra?



A) 52 B) 54 C) 56 D) 58 E) 60

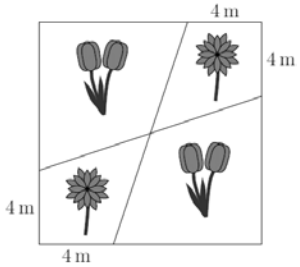
Rješenje: D
Najmanji broj točaka na stranama kvadra dobije se u slučaju kad su zalijepljene strane s najvećim mogućim brojem točaka, a to je 6, dviju kocaka s lijeve i dviju kocaka s desne strane. To znači da na te četiri kocke nisu vidljive četiri šestice i dvije jedinice. Ukupan broj točaka vidljivih na stranama kvadra je:
$4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) – (4 \cdot 6 + 2 \cdot 1) = 4 \cdot 21 – 26 = 84 – 26 = 58$. Rješenje je D).

10. Tri sestre, čiji je prosjek godina 10, različite su dobi. Kad se nalaze u paru, prosjeci godina dvaju takvih parova su 11 i 12. Koliko godina ima najstarija sestra?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 14 E) 16

Rješenje: E
Neka su a, b i c godine tih triju sestara. Kako je prosjek njihovih godina 10, onda je $a + b + c = 30$. Prosjeci godina dvaju parova sestara su 11 i 12, pa možemo zapisati $a + b = 22$ i $b + c = 24$. Zbrajanjem tih dviju jednakosti dobijemo $a + 2b + c = 46$. Kad od dobivene jednakosti oduzmemo prvu, dobijemo $b = 16$. To znači da je $a = 6$, a $c = 8$. Najstarija sestra ima 16 godina, pa je rješenje E).

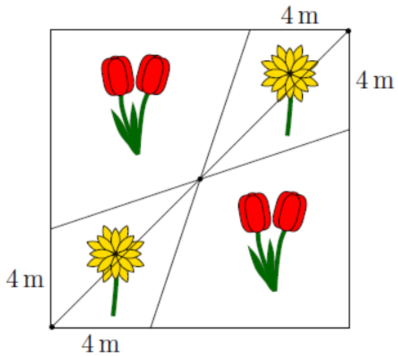
11. Vrtlarica Katarina posadila je tulipane  i tratinčice  u kvadratni cvjetnjak sa stranicom duljine 12 m, rasporedivši cvijeće kao na slici. Kolika je ukupna površina dijela cvjetnjaka u kojemu je posadila tratinčice?



A) 48 m^2 B) 46 m^2 C) 44 m^2 D) 40 m^2 E) 36 m^2

Rješenje: A

S obzirom na to da je cvjetnjak kvadratnog oblika, znači da su površine četverokuta na kojima su posađene tratinčice jednake. Podijelimo dijagonalom kvadrata svaki od četverokuta na kojima su zasađene tratinčice na dva sukladna trokuta. Duljina osnovice tih trokuta je 4 m, a duljina odgovarajuće visine polovina je duljine stranice kvadrata, tj. 12 : 2 = 6 m. Ako je P_T površina cvjetnjaka zasađena tratinčicama, a površina svakog od ta četiri trokuta P_Δ, onda je $P_T = 4P_\Delta = 4 \cdot \frac{4 \cdot 6}{2} = 48$ m^2. Rješenje je A).



12. U Majinu su uredu dvije ure. Jedna ura svaki sat pokazuje jednu minutu više, a druga svaki sat pokazuje dvije minute manje. Jučer je Maja namjestila obje ure tako da pokazuju pravo vrijeme. Kad je danas pogledala na njih, vidjela je da jedna pokazuje 11:00, a druga 12:00. U koliko je sati jučer obje ure namjestila na pravo vrijeme?

A) 23:00 B) 19:40 C) 15:40 D) 14:00 E) 11:20

Rješenje: C

Kako jedna ura svaki sat pokazuje jednu minutu više, a druga jednu minutu manje, onda se svakim satom razlika vremena koje pokazuju te dvije ure poveća za 3 minute po satu. Kako je razlika u vremenu koje sada pokazuju te ure 60 minuta, Maja je ure namjestila na pravo vrijeme prije 60 : 3 = 20 sati. Tijekom tih 20 sati, ura koja pokazuje više – pokazuje 20 minuta više od stvarnog vremena, pa je stvarno vrijeme 11:40. Prije 20 sati bilo je 15:40. Rješenje je C).

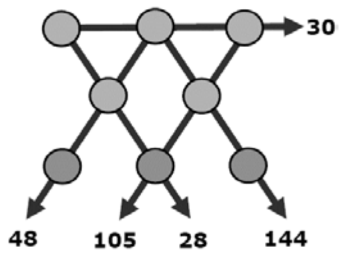
13. Bart je na komad papira napisao nekoliko pozitivnih brojeva manjih od 7. Ria je sve njegove brojeve precrtala i svaki od njih zamijenila brojem koji nedostaje do 7. Zbroj brojeva koje je napisao Bart je 22. Zbroj brojeva koje je napisala Ria je 34. Koliko je brojeva Bart napisao na papir?

A) 73 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Rješenje: B

Ukupan zbroj brojeva koje su napisali Bart i Ria je 34 + 22 = 56. Ako promatramo bilo koji odgovarajući par brojeva koje su napisali Bart i Ria, njihov je zbroj $n + (7 - n) = 7$.
To znači da su njih dvoje napisali 56 : 7 = 8 parova brojeva. Bart je na papir napisao 8 brojeva. Dakle, rješenje je B).

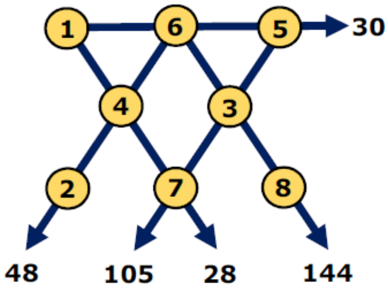
14. U krugove na slici upisani su brojevi od 1 do 8, svaki po jednom. Brojevi koje pokazuje svaka od strelica označavaju umnožak triju brojeva upisanih u krugove na istoj dužini. Koliki je zbroj brojeva upisanih u tri kruga na dnu slike?



A) 11 B) 12 C) 15 D) 17 E) 19

Rješenje: D

Kako su brojevi 105 i 30 djeljivi s 5, na sjecištu odgovarajućih dužina je broj 5. Brojevi 105 i 28 djeljivi su sa 7 pa je na sjecištu odgovarajućih dužina broj 7. Zato je na dužini između 5 i 7 broj 3.
Kako je 144 : 3 = 48, 48 = 6 · 8, a 8 nije djelitelj broja 30, onda se na dužini na kojoj strelica pokazuje prema 30 nalazi broj 6. Dalje je jednostavno odrediti preostale brojeve.
Zbroj brojeva upisanih u tri kruga na dnu slike je 2 + 7 + 8 = 17. Rješenje je D).



15. Roč uvijek vozi bicikl istom brzinom i uvijek hoda istom brzinom. Biciklom može prijeći put od kuće do škole i natrag za 20 minuta, a ako ide pješke, za to mu treba 60 minuta. Jučer je krenuo biciklom u školu, istim putem kao i inače, usput je ostavio bicikl kod Vjerana i nastavio pješke. Od škole je pješačio natrag do Vjeranove kuće, pokupio bicikl i vozio se do svoje kuće. Za to mu je ukupno trebalo 52 minute. Koliki je dio puta jučer Roč prešao biciklom?

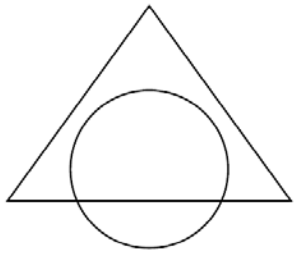
A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Rješenje: B
Ako s b označimo dio puta koji je Roč jučer prešao biciklom, onda je dio puta koji je hodao $(1 - b)$. Znači da se vozio biciklom $20b$ minuta, a hodao je $60(1 - b)$ minuta. Sada je:

$$20b+60(1-b)=52$$
$$20b+60-60b=52$$
$$40b=8$$
$$b=\frac{1}{5}.$$

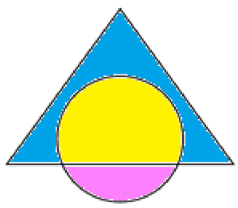
Rješenje je B).

16. Krug i trokut preklopljeni su i čine lik kao na slici. Površina presjeka kruga i trokuta jednaka je 45 % površine dobivenoga lika. Površina trokuta izvan presjeka s krugom jednaka je 40 % površine toga lika. Koliki se postotak kruga nalazi izvan trokuta?



A) 20 % B) 25 % C) 30 % D) 35 % E) 50 %

Rješenje: B
Označimo s P površinu lika koji je nastao preklapanjem kruga i trokuta. Kako je površina presjeka kruga i trokuta (žuti dio) $45\%P=0.45P$, a površina trokuta izvan presjeka s krugom (plavi dio) $40\%P=0.4P$, onda je površina kruga izvan trokuta (ružičasti dio) $P-(0.45P+0.4P)=0.15P$.
Površina cijelog kruga je zbroj površina žutog i ružičastog dijela, tj. $0.45P+0.15P=0.6P$.
Zato je postotak kruga izvan trokuta $\frac{0.15P}{0.60P}=\frac{15}{60}=\frac{1}{4}=25\%.$ Rješenje je B).



Pitanja za 5 bodova:

17. Marta je odlučila upisati brojeve u polja 3 x 3 tablice tako da zbroj brojeva u svim mogućim 2 x 2 tablicama uvijek bude isti. U tri ugla tablice upisani su brojevi kao što je prikazano na slici. Koji broj treba upisati u četvrti ugao tablice?

2		4
?		3

A) 0 B) 1 C) 4 D) 5 E) 6

Rješenje: B

Uz oznake kao na slici vrijedi $2+a=4+b$ i $a+?=b+3$. No onda je:

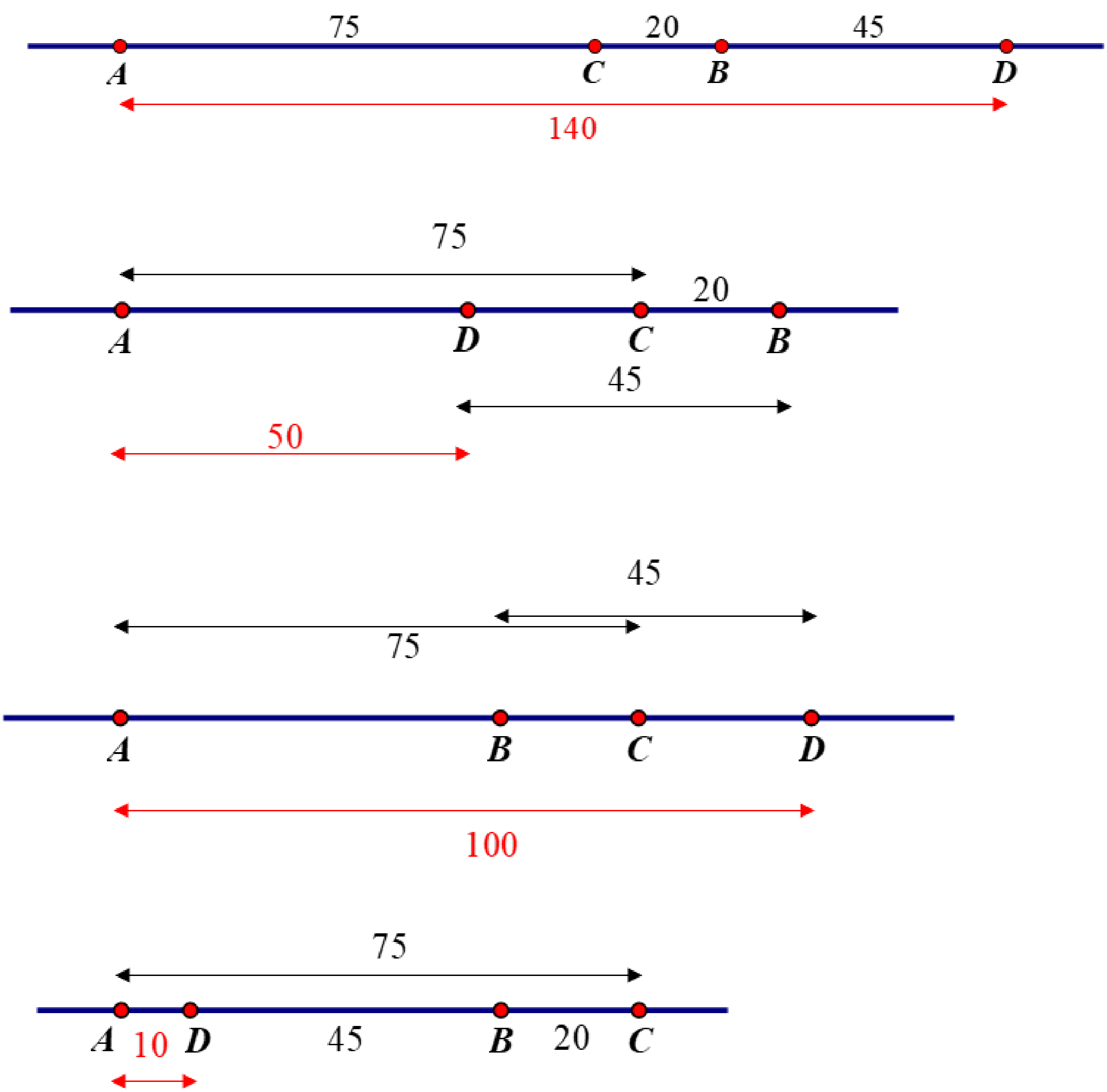
2		4
a		b
?		3

$$a+?+1=b+3+1$$
$$a+?+1=b+4$$
$$a+?+1=2+a$$
$$?+1=2$$
$$?=1.$$

18. Sela A, B, C i D smještena su uz ravnu dugačku cestu, ali ne nužno tim redoslijedom. Udaljenost od A do C je 75 km, udaljenost od B do D je 45 km, a udaljenost od B do C je 20 km. Koja od sljedećih vrijednosti ne može biti udaljenost od A do D?

A) 10 B) 50 C) 80 D) 100 E) 140

Rješenje: C
Svi mogući položaji sela prikazani su na slici:



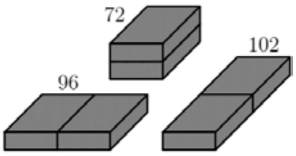
Od ponuđenih, jedino 80 km ne može biti udaljenost od A do B. Rješenje je C).

19. Slikar Noa planirao je pomiješati 2 litre plave i 3 litre žute boje kako bi dobio 5 litara zelene boje. No zabunom je uzeo 3 litre plave, a 2 litre žute i dobio pogrešnu nijansu zelene boje. Koju najmanju količinu dobivene nijanse zelene boje treba maknuti kako bi dodavanjem neke količine plave i/ili žute boje dobio 5 litara tražene nijanse zelene boje?

A) $\frac{5}{3}$ litre B) $\frac{3}{2}$ litre C) $\frac{2}{3}$ litre D) $\frac{3}{5}$ litre E) $\frac{5}{9}$ litre

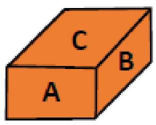
Rješenje: A
Dobivena smjesa ima 3 litre plave boje umjesto potrebne 2 litre, dakle 1 litru plave boje više nego je potrebno. Najbolje što može učiniti jest da izlije onu količinu smjese koja sadrži 1 litru plave boje i tu količinu nadomjesti žutom. Kako u smjesi ima 3 litre plave, potrebno je izliti $\frac{1}{3}$ količine plave boje koja je u smjesi. To znači da treba izliti $\frac{1}{3}$ smjese, što je količina od $\frac{5}{3}$ litara. Rješenje je A).

20. Zidar ima dvije identične cigle. Složio ih je na tri različita načina spajajući ih po jednakim stranama. Oplošja (zbroj površina svih strana) dobivenih tijela su 72, 96 i 102. Koliko je oplošje početne cigle?



A) 36 B) 48 C) 52 D) 54 E) 60

Rješenje: D
Označimo površine triju različitih strana cigle *A*, *B* i *C* kao na slici. Sada je:



$$4A+2B+4C=96$$
$$2A+4B+4C=102$$
$$4A+4B+2C=72$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobije se $10(A+B+C)=270$. Oplošje cigle je $2(A+B+C)=270:5=54$ cm^2.
Rješenje je D).

21. Mowgli je pitao zebru i panteru koji je danas dan. Zebra uvijek laže ponedjeljkom, utorkom i srijedom. Pantera uvijek laže četvrtkom, petkom i subotom. Zebra je rekla: „Jučer je bio jedan od mojih dana laganja“. Pantera je rekla: „Jučer je bio i jedan od mojih dana laganja“. Koji je danas dan?

A) četvrtak B) petak C) subota D) nedjelja E) ponedjeljak

Rješenje: A
Ako je danas dan kad zebra govori istinu, jedina je mogućnost da je danas četvrtak jer je to prvi dan kad govori istinu nakon niza dana laganja.
Ako je danas dan kad zebra laže, jedina je mogućnost da je danas ponedjeljak jer je to prvi u nizu dana laganja.
Nakon zebrine izjave, Mowgli zna da je danas ponedjeljak ili četvrtak.
Ako je danas dan kad pantera govori istinu, jedina je mogućnost da je danas nedjelja jer je to prvi dan kad govori istinu nakon niza dana laganja.
Ako je danas dan kad pantera laže, jedina je mogućnost da je danas četvrtak jer je to prvi u nizu dana laganja.
Nakon panterine izjave, Mowgli zna da je danas četvrtak ili nedjelja.
Kako je četvrtak dan koji je jedini moguć u oba slučaja, rješenje je A).

22. Na pravcu je istaknuto nekoliko točaka. Drago je na tome pravcu istaknuo po jednu točku između svake dvije susjedne istaknute točke. Taj je postupak ponovio još tri puta. Na kraju je dobio 225 istaknutih točaka. Koliko je na početku bilo istaknutih točaka na tom pravcu?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 25

Rješenje: C

Neka je na početku bilo istaknuto n točaka.

Prikažimo tablicom broj točaka koje je imao na početku, broj točaka koje je dodao i ukupan broj točaka nakon svakog od ukupno četiri docrtavanja točaka.

	broj točaka na početku	broj docrtanih točaka	ukupan broj točaka
prvo docrtavanje točaka	n	$n-1$	$2n-1$
drugo docrtavanje točaka	$2n-1$	$2n-2$	$4n-3$
treće docrtavanje točaka	$4n-3$	$4n-4$	$8n-7$
četvrto docrtavanje točaka	$8n-7$	$8n-8$	$16n-15$

Sada vrijedi:

$16n-15=225$

$16n=240$

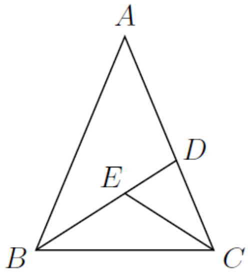
$n=15.$

Rješenje je C).

23. Jednakokračan trokut ΔABC, kojemu je $|AB|=|AC|$, podijeljen je na tri jednakokračna trokuta kao na slici, tako da je $|AD|=|DB|$, $|CE|=|CD|$ i $|BE|=|EC|$.

Napomena: Slika ne prikazuje stvarne omjere.

Kolika je veličina kuta $\measuredangle BAC$ izražena u stupnjevima?



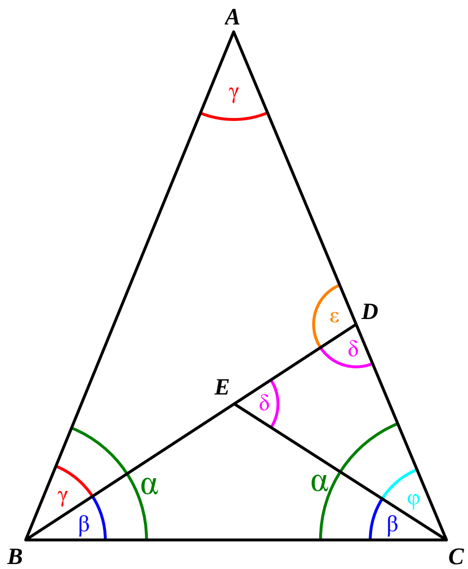
A) 24 B) 28 C) 30 D) 35 E) 36

Rješenje: E

Označimo sukladne kutove istim bojama na osnovi činjenica:

ΔBCE je jednakokračan i vrijedi $|BE|=|EC|$, ΔCDE je jednakokračan i vrijedi $|CE|=|CD|$, ΔABD je jednakokračan i vrijedi $|AD|=|DB|$, ΔABC je jednakokračan i vrijedi $|AB|=|AC|$.

Kako je $\alpha=\beta+\gamma$ i $\alpha=\beta+\varphi \Rightarrow \gamma=\varphi$.



Nadalje vrijedi:

$\varepsilon=180°-2\gamma=180°-2\varphi$

$2\delta=180°-\varphi \Rightarrow \delta=90°-\dfrac{\varphi}{2}.$

Sada je:

$\varepsilon+\delta=180°$

$\varepsilon+\delta=180°-2\varphi+90°-\dfrac{\varphi}{2}$

$180°=180°-2\varphi+90°-\dfrac{\varphi}{2}$

$2\varphi+\dfrac{\varphi}{2}=90°$

$4\varphi+\varphi=180°$

$5\varphi=180°$

$\varphi=36°$

Rješenje je E).

24. U sedam parkova živi 2022 klokana i nekoliko koala. U svakom je parku broj klokana jednak ukupnom broju koala u svim preostalim parkovima. Koliko ukupno koala živi u tih sedam parkova?

A) 288 B) 337 C) 576 D) 674 E) 2022

Rješenje: B

Označimo broj klokana u tih sedam parkova sa $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6$ i x_7, a broj koala sa $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6$ i y_7. Sada vrijedi:

$$x_1 = y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$$
$$x_2 = y_1 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$$
$$x_3 = y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$$
$$x_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_5 + y_6 + y_7$$
$$x_5 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_6 + y_7$$
$$x_6 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_7$$
$$x_7 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobije se:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 6\left(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7\right).$$

Kako je ukupan broj klokana 2022, onda je

$2022 = 6\left(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7\right)$, odnosno $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = 337$.

Rješenje je B).