MATEMATIČKI KLOKAN

u 97 država Europe, Amerike, Afrike, Australije i Azije

Četvrtak, 17. ožujka 2022. – trajanje 75 minuta
Natjecanje za Junior (II. i III. razred SŠ)

J

* Natjecanje je pojedinačno. **Računala nisu dopuštena**. Svaki sudionik natjecanja dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih nagradu.
* **Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan.**
* U prva četiri zadatka točno rješenje zadatka donosi 3 boda, u druga četiri 4 boda, a u treća četiri 5 bodova.
* Ako u zadatku nije odabran odgovor ili su zacrnjena dva ili više odgovora istoga zadatka, dobiva se 0 bodova.
* Za netočan odgovor ne dobivaju se bodovi, nego se oduzima četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.

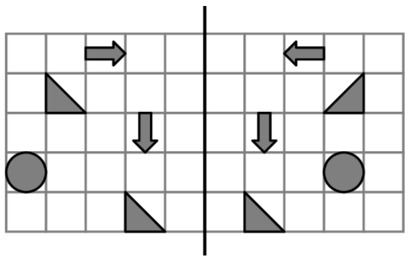
Pitanja za 3 boda:

1. Jednakostraničan trokut kojemu je duljina stranice 12 ima isti opseg kao i kvadrat kojemu je duljina stranice x. Koliko iznosi x?

A) 9 B) 12 C) 16 D) 24 E) 36

Rješenje: A
Dani trokut ima opseg $3 \cdot 12 = 36$ pa i kvadrat ima opseg 36. Onda je stranica kvadrata duljine $\frac{36}{4} = 9$.

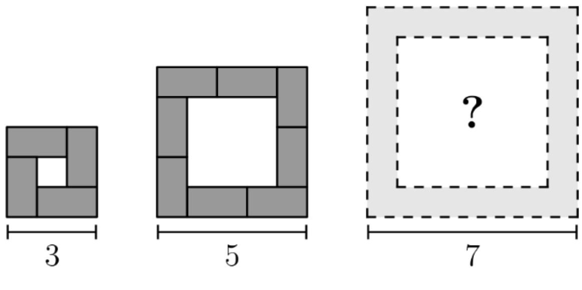
2. Na listu papira nacrtani su likovi kao na slici. Nastavnik je presavinuo papir preko podebljane crte i preklopio lijevu stranu preko desne. Koliko će se likova s lijeve strane potpuno preklopiti s likom s desne strane?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: C
To su gornja tri lika.

3. Katarina razmješta 2×1 stolove  ovisno o broju sudionika na sastanku. Dijagrami prikazuju tlocrt razmještaja stolova za mali, srednji i veliki sastanak. Koliko stolova treba za veliki sastanak?



A) 10 B) 11 C) 12 D) 14 E) 16

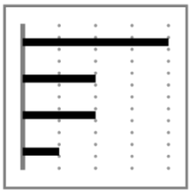
Rješenje: C
Sa svake strane kvadrata stavit će 3 stola po duljoj strani.

4. Manji sam od svoje polovice i veći od svog dvokratnika. Zbroj mene i moga kvadrata iznosi nula. Tko sam ja?

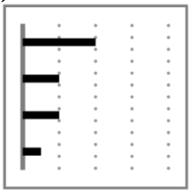
A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Rješenje: B

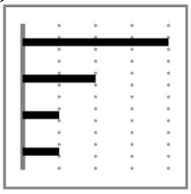
5. Slika pokazuje koliko je vremena Nidija prošli tjedan provela na svakoj od svojih mobilnih aplikacija. Ovaj je tjedan prepolovila vrijeme provedeno na dvije od tih aplikacija, a na preostale dvije aplikacije provela je jednako vremena kao prošli tjedan. Koji bi od danih dijagrama mogao biti Nidijin dijagram za ovaj tjedan?



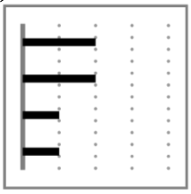
A)



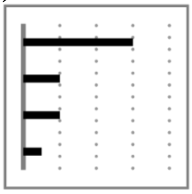
B)



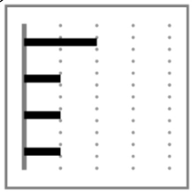
C)



D)

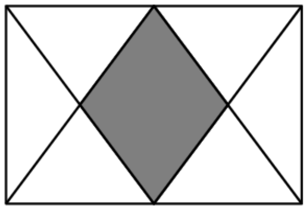


E)



Rješenje: C

6. U pravokutniku na slici dužinom su spojena polovišta duljih stranica s vrhovima nasuprotne stranice. Koliki je dio pravokutnika osjenčan?



A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

Rješenje: B
Podijelimo li dodatno sliku dužinom koja spaja polovišta kraćih stranica pravokutnika, možemo uočiti da je osjenčano dva od osam trokuta jednake površine.

7. Na školskim je izborima pet kandidata. Nakon prebrojavanja 90 % glasova rezultati su:

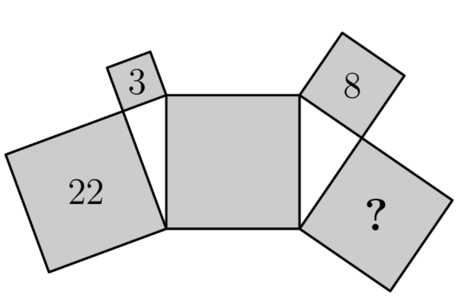
Aleksandra	Krasna	Mate	Dijana	Edo
14	11	10	8	2

Koliko učenika još uvijek ima priliku za pobjedu na izborima?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: C
Do sada je prebrojeno $14 + 11 + 10 + 8 + 2 = 45$ glasova, što čini 90 % ukupnog broja glasova. Na izbore je, dakle, izašlo 50 učenika. Još samo 5 glasova nije prebrojeno. Najbolji scenarij za svakog kandidata je da on dobije sve preostale glasove – u tom slučaju mogli bi pobijediti Aleksandra, Krasna ili Mate. Ostali kandidati ne bi pobijedili na izborima ni da im se pridoda svih 5 glasova.

8. Na slici je prikazano pet kvadrata i dva pravokutna trokuta. Brojevi 3, 8 i 22 napisani unutar kvadrata naznačuju njihovu površinu u kvadratnim metrima. Kolika je površina kvadrata unutar kojeg je napisan upitnik?

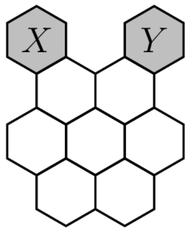


A) 14 m^2 B) 15 m^2 C) 16 m^2 D) 17 m^2 E) 18 m^2

Rješenje: D
Koristeći se Pitagorinim poučkom zaključujemo da je površina središnjeg kvadrata $22 + 3$, tj. $? + 8$. Dakle, $? = 17$.

Pitanja za 4 boda:

9. Anita polazi iz šesterokuta X i ide do šesterokuta Y. Iz jednog šesterokuta može prijeći u drugi samo ako oni imaju zajedničku stranicu. Koliko postoji različitih putova od X do Y koji prolaze svakim od sedam bijelih šesterokuta točno jednom?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Rješenje: D
Numerirajmo vanjske bijele šesterokute od 1 do 6 počevši od onog najbližeg, X. Anita prvo mora stati na šesterokut 1. Šesterokute od 1 do 6 mora obići točno tim redoslijedom, a središnji bijeli šesterokut može posjetiti isključivo između neka dva susjedna broja. Stoga postoji pet mogućih različitih putova.

10. Eva je 2022 pločice složila jednu do druge. Adam je zatim uklonio svaku šestu pločicu u nizu. Beata je nakon toga uklonila svaku petu od preostalih pločica. Zatim je Kala uklonila svaku četvrtu od preostalih pločica. Konačno, Doris je uklonila sve preostale pločice. Koliko je pločica uklonila Doris?

A) 0 B) 337 C) 674 D) 1011 E) 1348

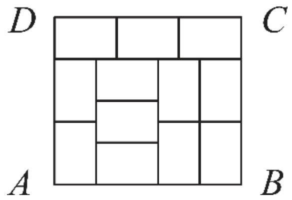
Rješenje: D
Nakon Adamova poteza Beati preostaje $2022 \cdot \frac{5}{6}$ pločica. Nakon Beatina poteza Kali ostaje $2022 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5}$ pločica. Nakon Kale ostaje $2022 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = 2022 \cdot \frac{1}{2} = 1011$ pločica za Doris.

11. Unuci su upitali baku koliko ima godina. Ona je zatražila da pogode njenu dob. Jedan je unuk rekao 75, drugi 78, a treći 81. Jedan od unuka pogriješio je za 1 godinu, jedan je pogriješio za 2 godine, a jedan je pogriješio za 4 godine. Koliko baka ima godina?

A) 76 B) 77 C) 79 D) 80 E) Ne može se odrediti.

Rješenje: E
Baka bi mogla imati $77 = 75 + 2 = 78 - 1 = 81 - 4$ ili $79 = 75 + 4 = 78 + 1 = 81 - 2$ godina.

12. Na slici je veliki pravokutnik $ABCD$ podijeljen na 12 sukladnih manjih pravokutnika. Odredi omjer $\frac{|AD|}{|DC|}$.



A) $\frac{8}{9}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{7}{8}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{9}{8}$

Rješenje: A
Označimo kraću stranicu manjih pravokutnika a, a dulju b. Iz jednakosti $|AB| = |DC|$ imamo $3a + b = 3b$, tj. $b = 1.5a$. Slijedi $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{2b+a}{3b} = \frac{4a}{4.5a} = \frac{8}{9}$.

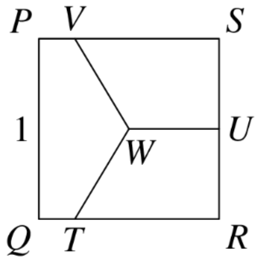
13. Zec i jež utrkivali su se duž kružne staze duljine 550 m. Trčali su jednoliko – zec brzinom od 10 m/s, a jež brzinom od 1 m/s. Počeli su trčati istovremeno. No jež je trčao u suprotnome smjeru od zeca. Kada su se susreli, jež se odmah okrenuo i počeo trčati za zecom. Koliko je jež kasnije od zeca stigao na cilj?

A) 45 sekundi B) 50 sekundi C) 55 sekundi D) 100 sekundi E) 505 sekundi

Rješenje: A

Zec je cijelu stazu pretrčao za $\frac{550}{10} = 55$ sekundi. U vremenu t zec je prešao $10 \cdot t$ metara, a jež $1 \cdot t$ metara. Zbroj njihovih putova u trenutku susreta je duljina cijele staze: $10t + t = 550$. Iz ove jednadžbe dobivamo vrijeme njihova susreta, $t = 50$ sekundi. Zaključujemo da je zec trčao još 5 sekundi, a ježu opet treba 50 sekundi da se vrati do cilja. Dakle, jež će na cilj doći 45 sekundi nakon zeca.

14. Na slici je kvadrat $PQRS$ kojemu je duljina stranice 1. Polovište stranice $\overline{RS}$ označeno je s U, a sjecište dijagonala kvadrata označeno je s W. Dužine $\overline{TW}, \overline{UW}$ i $\overline{VW}$ dijele kvadrat na tri područja jednake površine. Kolika je duljina dužine $\overline{SV}$?

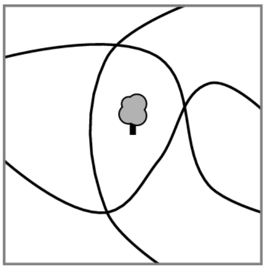


A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

Rješenje: E

Kako je točka U polovište stranice, a W sjecište dijagonala kvadrata, vrijedi da je $|SU| = 0.5$ i $|UW| = 0.5$. Površina kvadrata je 1 pa je površina svakog područja dobivenog podjelom $\frac{1}{3}$. Uočimo trapez $USVW$ – za njegovu površinu vrijedi da je $\frac{1}{3} = \frac{|SV|+|UW|}{2} \cdot |SU|$, tj. $\frac{1}{3} = \frac{|SV|+0.5}{2} \cdot 0.5$, iz čega slijedi da je $|SV| = \frac{5}{6}$.

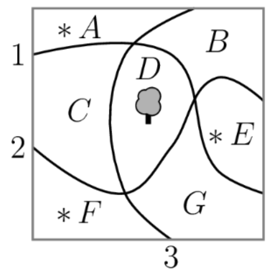
15. Kroz gradski park vode tri puteljka. Na sredini parka zasađeno je stablo, kao na slici. Koliko još najmanje stabala treba zasaditi tako da s obje strane svakog puteljka bude jednak broj stabala?



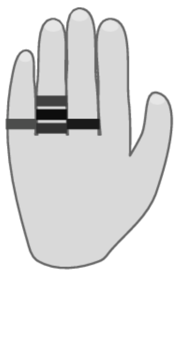
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: C

Označimo puteljke i područja na koja oni dijele park kao na slici. Gledajući puteljak broj 1 zaključujemo da barem jedno stablo mora biti zasađeno u jednom od područja A, B, E. Gledajući puteljak broj 2 zaključujemo da barem jedno stablo mora biti zasađeno u jednom od područja F, G, E. Gledajući puteljak broj 3 zaključujemo da barem jedno stablo mora biti zasađeno u jednom od područja A, C, F. Kako te tri trojke nemaju presjeka, moramo posaditi barem 3 stabla (broj stabala u parku mora biti paran). Posadimo li po jedno stablo u područja na slici označena zvjezdicama, zadovoljit ćemo uvjete zadatka.



16. Veronika na jednoj ruci ima pet prstenova, kao na slici. Skida ih jedan po jedan. Na koliko različitih načina Veronika može skinuti svoje prstenje?



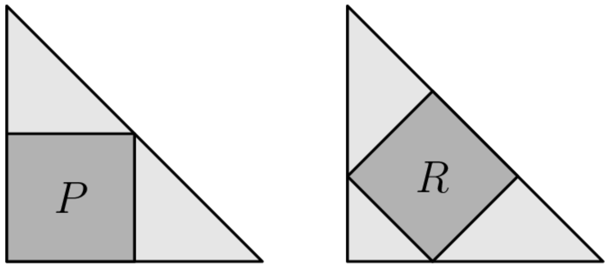
A) 16 B) 20 C) 24 D) 30 E) 45

Rješenje: B

Kada bi svaki prsten bio na svome prstu, imali bismo 5! načina za njihovo skidanje. No, tri prstena na prstenjaku moraju biti skinuta zadanim redom pa će ukupan broj načina biti: $5!/3! = 20$.

Pitanja za 5 bodova:

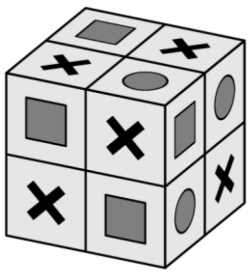
17. U svaki od dva sukladna jednakokračna pravokutna trokuta upisan je kvadrat kao na slici. Kvadrat P ima površinu 45. Kolika je površina kvadrata R?



A) 35 B) 40 C) 45 D) 50 E) 60

Rješenje: B
Podijelimo kvadrat P dijagonalom na dva trokuta. Sada vidimo da se veliki trokut sastoji od 4 sukladna manja trokuta pa je njegova površina 90.
Podijelimo kvadrat R dvjema dijagonalama na četiri trokuta, a dva veća svijetla trokuta podijelimo visinom na osnovicu. Sada uočimo da se veliki trokut sastoji od 9 sukladnih manjih trokuta. Površina svakog od tih trokuta tada je $90 : 9 = 10$, pa površina kvadrata R iznosi 40.

18. Strane kocke dimenzija $2 \times 2 \times 2$ podijeljene su na jedinične kvadrate unutar kojih je nacrtan jedan od tri znaka: kružić, križić ili kvadratić. Svaka dva kvadrata koja imaju zajedničku stranicu sadrže različite znakove. Na slici je jedna moguća kombinacija. Koja je od danih kombinacija također moguća na takvoj kocki?



A) 6 kružića i 8 kvadratića, a ostatak su križići.
B) 7 kružića i 8 kvadratića, a ostatak su križići.
C) 5 kružića i 8 kvadratića, a ostatak su križići.
D) 7 kružića i 7 kvadratića, a ostatak su križići.
E) Ništa od navedenog.

Rješenje: E
Primijetimo da se u svakom vrhu kocke nalaze tri kvadrata od kojih svaki dijeli stranicu s preostala dva. Stoga u svakom vrhu mora biti kombinacija svih triju znakova. Kako kocka ima 8 vrhova, zaključujemo da se svaki znak mora pojaviti osam puta.

19. Na nogometnom turniru sudjeluje osam momčadi. Igraju svatko sa svakim točno jednom. U svakoj utakmici pobjednik osvaja 3 boda, a gubitnik ostaje bez bodova. U slučaju izjednačenog rezultata, svaka momčad osvaja po 1 bod. Ukupan broj bodova koje su sve momčadi osvojile na kraju turnira je 61. Koji je najveći broj bodova mogla osvojiti pobjednička momčad?

A) 21 B) 19 C) 18 D) 17 E) 16

Rješenje: D
Na turniru je odigrano 28 utakmica (svaka momčad odigrala je 7 utakmica). Ako je x utakmica završilo pobjedom jedne momčadi, to je ukupno $3 \cdot x$ bodova na turniru (3 boda za pobjednika, 0 za gubitnika). U tom je slučaju preostalih $28 - x$ utakmica završilo neriješeno, što daje $2 \cdot (28 - x)$ bodova na turniru (po jedan bod svakoj momčadi). Iz jednadžbe $3x + 2(28 - x) = 61$ dobivamo da je $x = 5$ utakmica završilo pobjedom.
Pobjednička je momčad osvojila najveći mogući broj bodova ako je u tih 5 utakmica ona bila pobjednik, a u preostale je dvije odigrane utakmice rezultat bio izjednačen: $3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 17$.

20. Stanovnici jednoga grada uvijek govore u obliku pitanja. Dva su tipa ovih stanovnika: pozitivci, koji uvijek pitaju pitanja na koja je odgovor „da“, i negativci, koji uvijek pitaju pitanja na koja je odgovor „ne“. Sreo sam Alberta i Bertu. Berta me pitala: „Jesmo li i Albert i ja negativci?“. Kojeg su tipa stanovnici Albert i Berta?

A) Oboje su pozitivci.

B) Oboje su negativci.

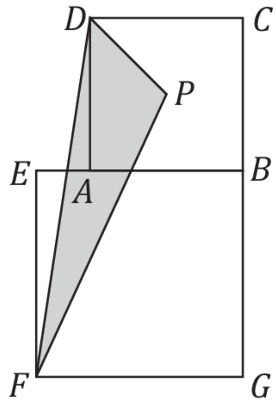
C) Albert je pozitivac, a Berta negativka.

D) Albert je negativac, a Berta pozitivka.

E) Ne može se odrediti.

Rješenje: C
Odgovor na pitanje mora biti „ne“ jer bismo inače odmah došli do kontradikcije. Dakle, Berta je negativka. A kako je odgovor na postavljeno pitanje „ne“, onda ne može i Albert biti negativac – on je, dakle, pozitivac.

21. Duljine dijagonala kvadrata $ABCD$ i $EFGB$ na slici redom su 7 cm i 10 cm. Točka P sjecište je dijagonala kvadrata $ABCD$. Kolika je površina trokuta FPD?



A) 14.5 cm^2 B) 15 cm^2 C) 15.75 cm^2 D) 16.5 cm^2 E) 17.5 cm^2

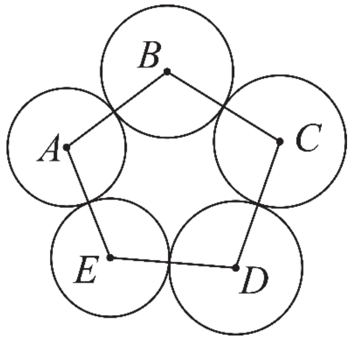
Rješenje: E
Dijagonala kvadrata sa stranicom zatvara kut mjere 45°. Kako su $\overline{FB}$ i $\overline{BD}$ dijagonale danih kvadrata, možemo zaključiti da je trokut FBD pravokutan. Točka P polovište je stranice $\overline{BD}$ trokuta FBD. Uočimo sada da je visina iz vrha F trokuta FPD ista kao visina iz vrha F trokuta FBD, tj. dijagonala $\overline{FB}$. Površina trokuta FPD stoga je $\frac{|DP|\cdot|FB|}{2} = \frac{3.5\cdot 10}{2} = 17.5$ cm^2.

22. Prirodan broj N takav je da umnožak njegovih znamenaka iznosi 20. Koji od danih brojeva ne može biti umnožak znamenaka broja $N + 1$?

A) 40 B) 30 C) 25 D) 35 E) 24

Rješenje: D
Kako je $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, zaključujemo da se broj N može sastojati samo od znamenaka 1, 2, 4, 5. U broju $N + 1$ mogle bi se naći znamenke 1, 2, 3, 4, 5, 6. Budući da je $35 = 5 \cdot 7$, broj $N + 1$ morao bi sadržavati znamenku 7, a to nije moguće postići.
Ako je $N = 2251$, onda je $N + 1 = 2252$, pa je umnožak njegovih znamenaka 40.
Ako je $N = 2512$, onda je $N + 1 = 2513$, pa je umnožak njegovih znamenaka 30.
Ako je $N = 54$, onda je $N + 1 = 55$, pa je umnožak njegovih znamenaka 25.
Ako je $N = 45$, onda je $N + 1 = 46$, pa je umnožak njegovih znamenaka 24.

23. Pet je kružnica sa središtima u točkama A, B, C, D i E smješteno kao na slici. Središta susjednih kružnica spojena su dužinom. Poznato je da je $|AB| = 16$ cm, $|BC| = 14$ cm, $|CD| = 17$ cm, $|DE| = 13$ cm, $|AE| = 14$ cm. Koja je točka središte kružnice najvećega polumjera?

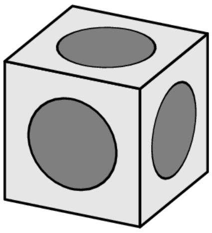


A) A B) B C) C D) D E) E

Rješenje: A
Označimo s r_a, r_b, r_c, r_d, r_e polumjere kružnica sa središtem u točkama A, B, C, D, E redom.

Iz $r_a + r_b = 16$ slijedi da je $r_b = 16 - r_a$.
Dalje iz $r_b + r_c = 14$ slijedi da je $r_c = -2 + r_a$.
Onda iz $r_c + r_d = 17$ dobivamo $r_d = 19 - r_a$.
Zatim iz $r_d + r_e = 13$ vidimo da je $r_e = -6 + r_a$.
Na kraju imamo jednakost $r_e + r_a = 14$, tj. $r_a = 10$ cm.
Sada možemo izračunati sve ostale polumjere: $r_b = 6$ cm, $r_c = 8$ cm, $r_d = 9$ cm, $r_e = 4$ cm i vidjeti da najveći polumjer ima kružnica sa središtem u točki A.

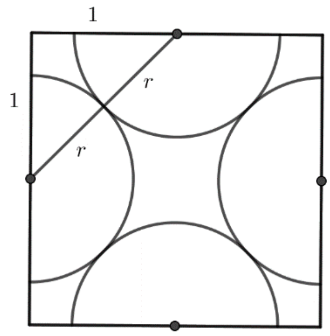
24. Sa svake strane kocke izrezbarena je rupa u obliku polukugle. Rupe su identične, sa središtem u središtu strane. Susjedne polukugle dodiruju se u točno jednoj točki. Duljina brida kocke je 2. Koliki je promjer svake rupe?



A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

Rješenje: C

Presijecimo kocku ravninom paralelnom s dvije strane koja prolazi kroz središta preostalih strana. Presjek kocke takvom ravninom je kvadrat, a rupe vidimo kao četiri polukružnice (susjedne polukružnice dodiruju se u točno jednoj točki) – kao na slici.
Uočimo sada da vrijedi $(2r)^2 = 1^2 + 1^2$, tj. $2r = \sqrt{2}$.



Obavijesti o rješenjima zadataka i rezultatima mogu se naći na mrežnim stranicama HMD-a.
http://www.matematika.hr/klokan/2022/