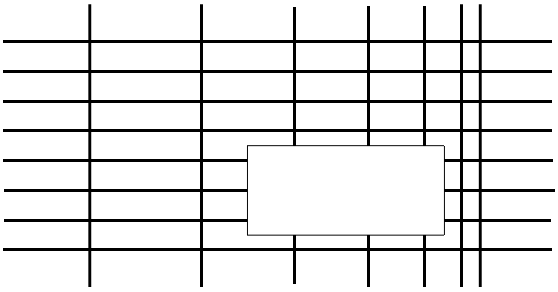
MATEMATIČKI KLOKAN 2023.

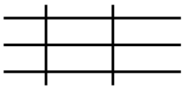
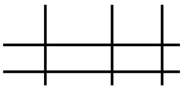
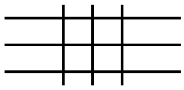
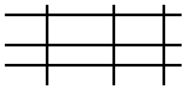
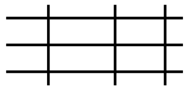
RJEŠENJA ZADATAKA

C

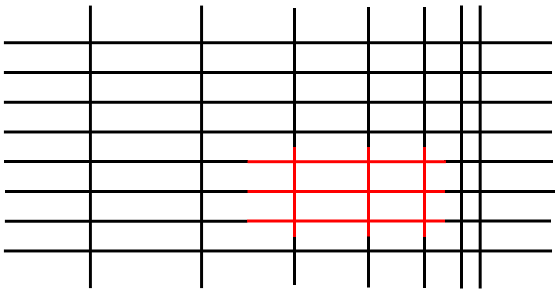
Pitanja za 3 boda:

1. [Hrvatska] Na slici je prikazan skup horizontalnih i vertikalnih linija s jednim uklonjenim dijelom. Koji dio nedostaje?

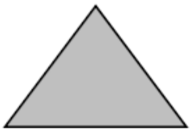


A)  B)  C)  D)  E) 

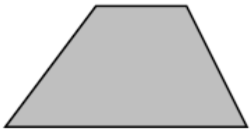
Rješenje: E

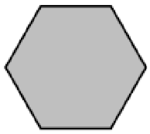


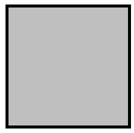
2. [Gruzija] Koji se od oblika ne može jednom ravnom crtom podijeliti na dva trapeza?


A) trokut

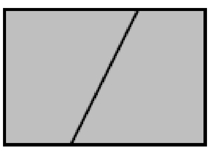

B) pravokutnik

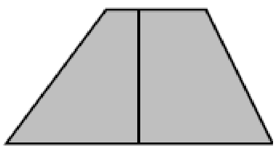

C) trapez

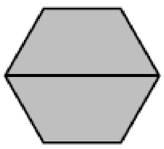

D) pravilni šesterokut

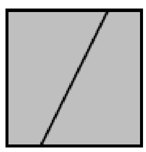

E) kvadrat

Rješenje: A

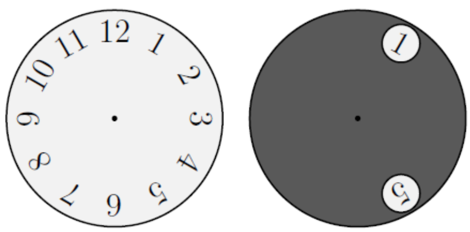

B) pravokutnik


C) trapez


D) pravilni šesterokut


E) kvadrat

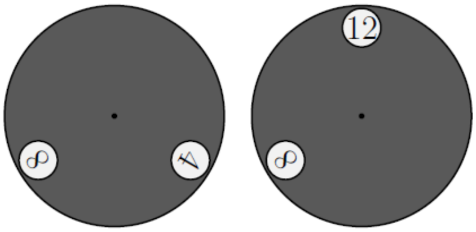
3. [Danska] Preko ure je postavljen sivi krug s dva otvora, kao što je prikazano na slici. Potom je sivi krug zarotiran oko svog središta tako da se u jednome od otvora pojavio broj 8. Koja se dva broja mogu pojaviti u drugome otvoru?



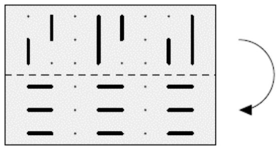
A) 4 ili 12 B) 1 ili 5 C) 1 ili 4 D) 7 ili 11 E) 5 ili 12

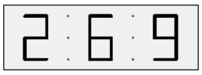
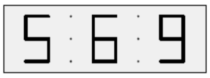
Rješenje: A

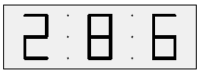
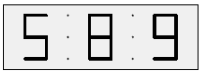
Razlika vremena na slici je 5 – 1 = 4 sata. Ako se u jednom otvoru pokaže 8, onda će se u drugome pokazati ili 4 ili 12 (8 – 4 = 4 ili 12 – 8 = 4).



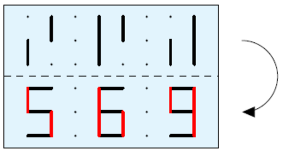
4. [Danska] Kristina ima komad prozirnog papira s istaknutim crtama. Što može vidjeti nakon što papir presavije duž iscrtkane linije?



A)  B)  C) 

D)  E) 

Rješenje: C

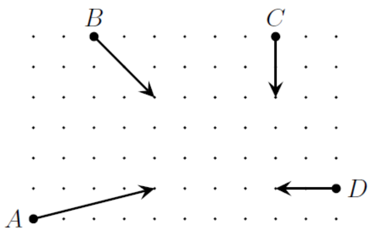


5. [Australija] Ivan ima 150 novčića. Kad ih baci na stol, njih 40% pokazuje glavu, a njih 60% pismo. Koliko kovanica koje pokazuju pismo treba okrenuti da bi isti broj kovanica pokazivao pismo i glavu?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

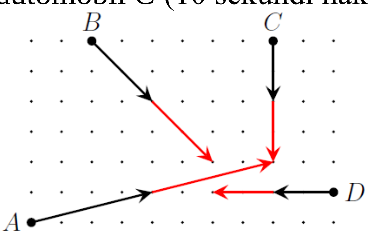
Rješenje: B
Potrebno je okrenuti ukupno 10% kovanica, što je 15 kovanica.

6. [Danska] Dijagram prikazuje početni položaj, smjer kretanja i koliko se pomakne svaki od četiri automobila *A*, *B*, *C* i *D* u pet sekundi. Koja će se dva automobila sudariti?

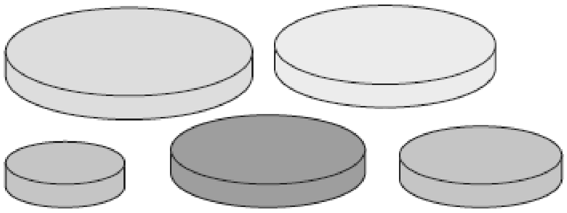


A) *A* i *B* B) *A* i *C* C) *A* i *D* D) *B* i *C* E) *C* i *D*

Rješenje: B
Crtajući vektore koji pokazuju položaj nakon sljedećih 5 sekundi, lako se vidi da će se sudariti automobil *A* i automobil *C* (10 sekundi nakon početka kretanja) te da se niti jedan drugi par neće sudariti.



7. [Slovenija] Ana ima pet kružnih diskova različitih veličina. Odlučila je izgraditi toranj pomoću tri diska tako da svaki disk u tornju bude manji od onog ispod njega. Koliko je različitih tornjeva mogla izgraditi na taj način?



A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 15

Rješenje: D

Imenujmo svaki od diskova s obzirom na njegov radijus. Neka je D1 disk najmanjeg, a D5 disk najvećeg radijusa. Toranj s diskovima označimo s (X, Y, Z) gdje je X disk na vrhu, Y disk u sredini i Z disk na dnu tornja. Svi mogući tornjevi su:

(D_3, D_4, D_5),
(D_2, D_3, D_4), (D_2, D_3, D_5), (D_2, D_4, D_5),
(D_1, D_2, D_3), (D_1, D_2, D_4), (D_1, D_2, D_5), (D_1, D_3, D_4), (D_1, D_3, D_5), (D_1, D_4, D_5).
Ana je mogla izgraditi 10 različitih tornjeva.

8. [Meksiko] U tablicu na slici Maja želi upisati brojeve od 1 do 8 tako da zbrojevi brojeva u poljima budu u oba retka međusobno jednaki i da zbrojevi brojeva u poljima budu u svim stupcima međusobno jednaki. Koji će broj upisati u osjenčanu ćeliju ako je već upisala brojeva 3, 4 i 8.

	4		
3		8	

A) 1 B) 2 C) 5 D) 6 E) 7

Rješenje: E

Zbroj svih brojeva koje treba upisati je 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36. Kako su zbrojevi u retcima jednaki, u svakom je retku zbroj brojeva 36 : 2 = 18. Također, kako su zbrojevi u svim stupcima jednaki, u svakom je stupcu zbroj brojeva 36 : 4 = 9. To znači da u osjenčanu ćeliju treba upisati broj 7 jer brojeve u tablicu treba upisati na sljedeći način:

6	4	1	7
3	5	8	2

Pitanja za 4 boda:

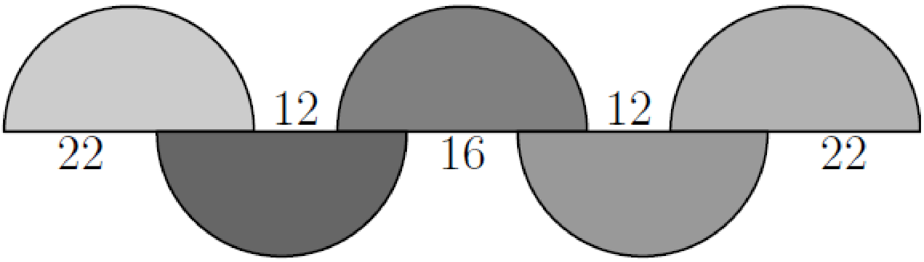
9. [Njemačka] Sanja zapisuje uzastopne cijele brojeve. Zapisala je tri broja, no umjesto znamenaka koristila se simbolima te je zapisala □◊◊, ♡△△, ♡△□. Što bi sljedeće zapisala?

A) ♡♡◊ B) □♡□ C) ♡△◊ D) ♡◊□ E) ♡△♡

Rješenje: E

Kako su □◊◊ i ♡△△ dva uzastopna troznamenkasta broja, zbog različitih znamenaka stotica zaključujemo da je ◊◊ = 99, tj. ◊ = 9. To znači da je △ = 0, □ = 1, no onda je ♡ = 2. Sanja je zapisala brojeve 199, 200, 201. Sljedeći broj koji bi zapisala je 202 odnosno ♡△♡.

10. [Iran] Na slici je prikazano pet sukladnih polukrugova i istaknute su duljine nekih dužina. Koliki je polumjer tih polukrugova?



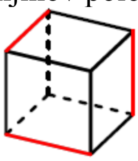
A) 12 B) 16 C) 18 D) 22 E) 36

Rješenje: C
Ako s *r* značimo radijus polukruga, onda vrijedi:
$2r + 12 + 2r + 12 + 2r = 22 + 2r + 16 + 2r + + 22.$
$6r + 24 = 4r + 60$
$2r = 36$
$r = 18.$

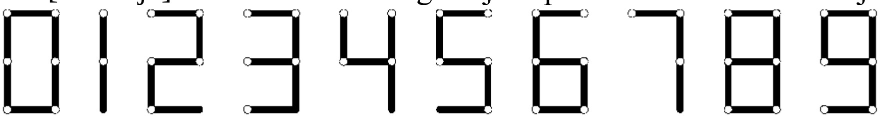
11. [Bjelorusija] Neke bridove kocke treba istaknuti crvenom bojom tako da svaka strana kocke ima barem jedan crveni brid. Koji je najmanji mogući broj bridova koje je potrebno istaknuti crvenom bojom?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Rješenje: B
Kako jedan brid pripada dvjema stranama, jasno je da nije dovoljno obojiti samo dva brida bez obzira na njihov položaj na kocki. Pokažimo primjerom da je dovoljno obojiti tri brida:



12. [Austrija] Pomoću šibica moguće je zapisati znamenke kao što je prikazano na slici.



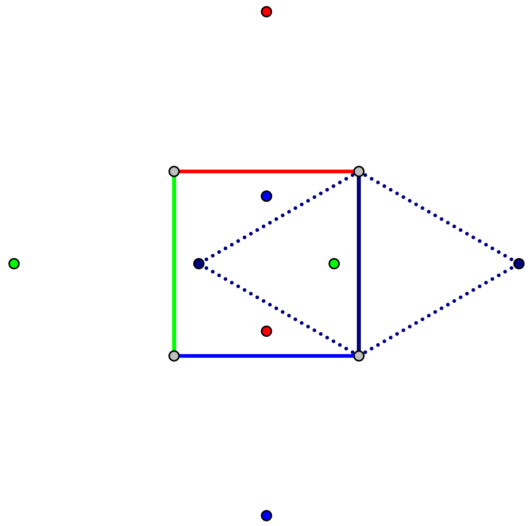
Koliko se različitih prirodnih brojeva može napisati na takav način ako se koristi točno šest šibica?
A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

Rješenje: C
Odredimo najprije broj šibica potrebnih za svaku od pojedinih znamenki i zapišimo na način (x, y) gdje je x znamenka, a y broj potrebnih šibica za njeno zapisivanje. Na taj način dobijemo parove:
(0, 6), (1, 2), (2, 5), (3, 5), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 3), (8, 7), (9, 6).
Kako se niti jedna znamenka ne može zapisati pomoću jedne šibice, a ukupno koristimo 6 šibica, onda nam odgovaraju ove mogućnosti:
$6 = 2 + 4 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2$
S dvije šibice možemo zapisati znamenku 1, s tri znamenku 7, s četiri znamenku 4, a sa šest znamenke 6 i 9.
To znači da imamo ovih šest mogućnosti:
6, 9, 14, 41, 77 i 111.

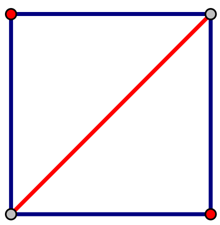
13. [Mađarska] Zadan je kvadrat duljine stranice 1 cm. Koliko ima točaka ravnine koje su udaljene točno 1 cm od dva vrha tog kvadrata?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Rješenje: E
Promotrimo po dva susjedna vrha kvadrata. Svaka točka koja je udaljena 1 cm od dva takva vrha, zajedno s njima određuje vrhove jednakostraničnog trokuta. Kako nad svakom stranicom kvadrata možemo konstruirati dva takva trokuta, onda je ukupan broj takvih točaka 2 · 4 = 8.

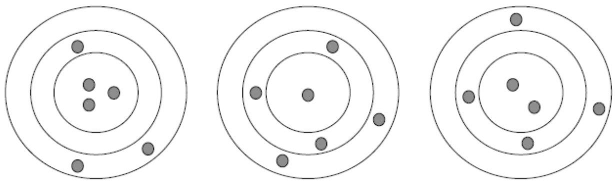


Promotrimo po dva nesusjedna vrha kvadrata, tj. krajnje točke njegovih dijagonala. Svaka točka koja je udaljena 1 cm od dva takva vrha, zajedno s njima određuje vrhove jednakokračnog pravokutnog trokuta kojemu je treći vrh također vrh kvadrata. Kako nad svakom dijagonalom kvadrata možemo konstruirati dva takva trokuta, onda je ukupan broj takvih točaka 2 · 2 = 4.



Ukupno ima 8 + 4 = 12 takvih točaka.

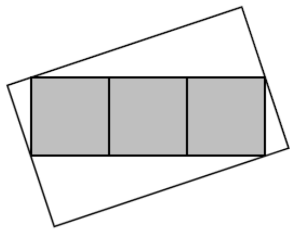
14. [Kina] Paula, Luka i Domagoj ispalili su svaki po šest strijela u metu. Pogotci unutar istog prstena nose isti broj bodova. Ako je Domagoj postigao 46 bodova, a Luka 34, koliko je bodova ostvarila Paula?



A) 37 B) 38 C) 39 D) 40 E) 41

Rješenje: D
Uočimo da su Domagoj i Luka svaki od prstena zajedno pogodili sa četiri, a Paula s dvije strijele. Zato je Paulin broj bodova dvostruko manji od ukupnog broja bodova Domagoja i Luke, tj.
(46 + 34) : 2 = 40.

15. [Poljska] Pravokutnik sastavljen od tri siva kvadrata, svaki površine 25 cm^2, nalazi se u bijelome pravokutniku kao što je prikazano na slici. Dva vrha sivoga pravokutnika polovišta su kraćih stranica bijeloga pravokutnika, a preostala dva vrha sivoga pravokutnika pripadaju duljim stranicama bijeloga. Kolika je površina bijeloga pravokutnika izražena u kvadratnim centimetrima?

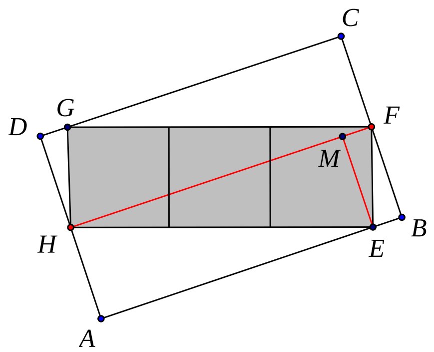


A) 125 B) 136 C) 149 D) 150 E) 172

Rješenje: D

Površina sivoga pravokutnika *HEFG* je $3 \cdot 25 = 75$ cm^2.

Svaki od pravokutnika *ABCD* i *HEFG* podijeljen je dužinom $\overline{HF}$ na dva dijela jednakih površina.
Uočimo dva para sukladnih trokuta: *AEH* i *MHE* te *EBF* i *FME*.
Iz te sukladnosti zaključujemo da je površina pravokutnika *ABFH* dvostruko veća od površine trokuta *HEF*.
Zato je površina bijeloga pravokutnika *ABCD* dvostruko veća od površine pravokutnika *HEFG*, tj.
$2 \cdot 75 = 150$ cm^2.



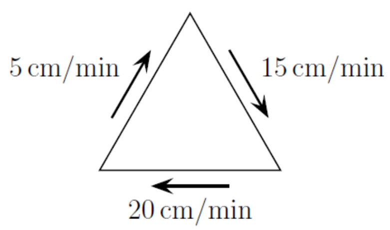
16. [Srbija] Zbroj 2023 uzastopna cijela broja je 2023. Koliki je zbroj znamenaka najvećega od tih brojeva?
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Rješenje: A

Dio brojeva mora biti negativan jer bi zbroj 2023 uzastopna nenegativna cijela broja bio veći od 2023.
2023 : 2 = 1011 i 1 ostatak.
Od –1011 do 1011 ima 2023 cijela broja i njihov je zbroj 0.
Od –1010 do 1012 također ima 2023 cijela broja i njihov je zbroj 2023 jer u tom zbroju pribrojnici 1011 i 1012 nemaju suprotnih.
Najveći među tim brojevima je 1012 i zbroj znamenaka mu je 4.

Pitanja za 5 bodova:

17. [Kina] Mrav hoda duž stranica jednakostraničnog trokuta. Prosječne brzine kojima hoda duž svake od stranica su 5 cm/min, 15 cm/min i 20 cm/min. Kojom je prosječnom brzinom, izraženom u cm/min, mrav obišao cijeli rub trokuta?



A) 10 B) $\frac{80}{11}$ C) $\frac{180}{19}$ D) 15 E) $\frac{40}{3}$

Rješenje: C

Neka su duljine stranica tog trokuta *a*.

Jedan centimetar prve stranice prijeđe za $\frac{1}{5}$ minute, druge za $\frac{1}{15}$ minute, a treće za $\frac{1}{20}$ minute.

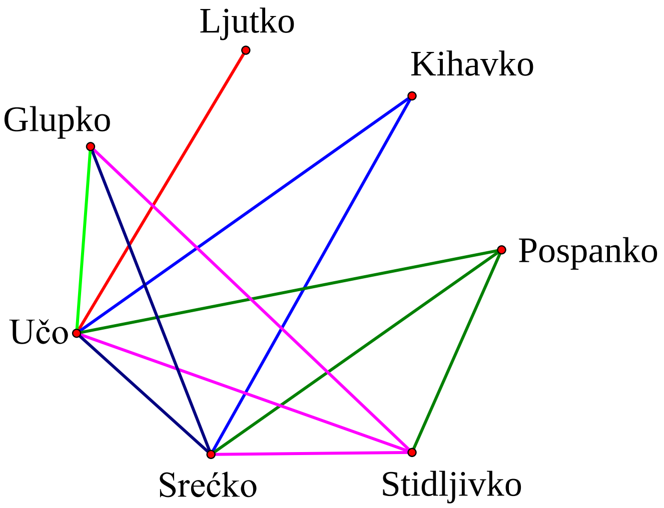
Za cijeli mu rub treba $\frac{a}{5}+\frac{a}{15}+\frac{a}{20}=\frac{12a}{60}+\frac{4a}{60}+\frac{3a}{60}=\frac{19a}{60}$ minuta.

Ukupna udaljenost koju je mrav prešao je $3a$ cm, pa je njegova prosječna brzina kojom je obišao cijeli rub trokuta $\frac{3a}{\frac{19a}{60}}=3a:\frac{19a}{60}=3a\cdot\frac{60}{19a}=\frac{180}{19}$ cm/min.

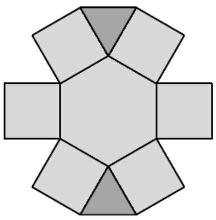
18. [Mađarska] Za sedam patuljaka Snjeguljica je organizirala natjecanje u šahu u kojemu je svaki patuljak odigrao jednu partiju sa svakim od preostalih patuljaka. U ponedjeljak je Ljutko odigrao jednu partiju, Kihavko dvije, Pospanko tri, Stidljivko četiri, Srećko pet, a Učo šest partija. Koliko je partija u ponedjeljak odigrao Glupko?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: C
Prikažimo grafički partije odigrane u ponedjeljak. Vidimo da je Glupko odigrao tri partije.

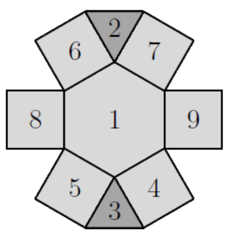


19. [Iran] Lik na slici podijeljen je na dva trokuta, šest kvadrata i jedan šesterokut. Dona želi u ta polja upisati brojeve od 1 do 9 tako da umnožak brojeva u susjednim poljima ne bude veći od 15. Polja su susjedna ako imaju zajednički rub. Na koliko načina to može napraviti?



A) 12 B) 8 C) 32 D) 24 E) 16

Rješenje: E
Uočimo da brojevi 8 i 9 moraju biti upisani u polja s najviše jednim susjednim poljem i u tom polju treba pisati broj 1. To znači da 1 mora pisati u šesterokutu, a 8 i 9 u kvadratima koji su susjedni samo tom šesterokutu. To možemo napraviti na dva različita načina.
Također, brojevi 6 i 7 ne mogu biti u trokutu. Kako ih smijemo pomnožiti najviše brojem 2, u jedan od trokuta upišemo broj 2, a u susjedne kvadrate 6 i 7. To možemo napraviti na 4 različita načina.
Preostaje upisati brojeve 3, 4 i 5. Broj 3 upišemo u preostali trokut, a 4 i 5 u njemu susjedne kvadrate. To možemo napraviti na 2 različita načina.
Ukupan broj različitih načina na koje to možemo napraviti je $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$.



20. [Katalonija] Vjeran stoji u redu u kojemu je broj osoba višekratnik broja 3. Primjećuje da je ispred njega isti broj osoba kao i iza njega. U redu vidi dva svoja prijatelja, oba stoje iza njega. Jedan od njih je na 19., a drugi na 28. mjestu. Na kojem je mjestu Vjeran?

A) 14. B) 15. C) 16. D) 17. E) 18.

Rješenje: D

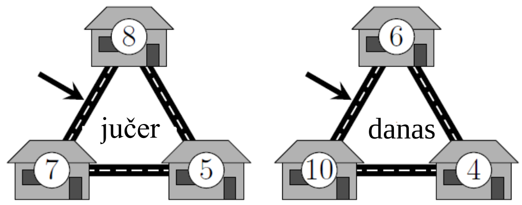
Ako je ispred i iza Vjerana n osoba, onda je on na poziciji $n + 1$.

No Vjeran je ispred prijatelja koji je na 19. mjestu pa vrijedi $n + 1 < 19$.

Kako je u redu ukupno $2n + 1$ osoba, a drugi mu je prijatelj na 28. mjestu, vrijedi $2n + 1 > 28$.

Kako obje nejednakosti vrijede samo za prirodne brojeve 14, 15, 16 i 17, a $2n + 1$ mora biti višekratnik broja 3, onda je $n = 16$, a Vjeran se nalazi na 17. mjestu u redu.

21. [Grčka] Nekoliko miševa živi u tri susjedne kuće. Sinoć je svaki miš napustio svoju kuću i preselio se u jednu od susjednih, uvijek se krećući najkraćim putem. Brojevi na slici pokazuju broj miševa u svakoj od kuća jučer i danas. Koliko je miševa koristilo put označen strelicom?



A) 9 B) 11 C) 12 D) 16 E) 19

Rješenje: B

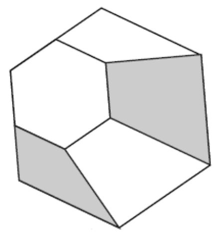
1. način

U kuću u kojoj je jučer bilo 5 miševa sinoć je došlo njih 4. Oni su stigli iz kuća koje su povezane označenim putem. Kako se kreću najkraćim mogućim putem, ta 4 miša nisu koristila označeni put. To znači da je ostalih $(7 + 8) – 4 = 15 – 4 = 11$ miševa koristila taj put.

2. način:

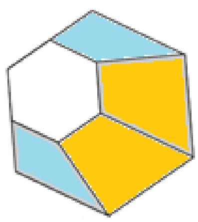
Označimo s a broj miševa koji su napustili kuću sa 7 miševa, odnosno s b broj miševa koji su napustili kuću s 8 miševa, a koristili su označeni put. Tada je broj miševa koji su otišli u preostalu kuću $(7 – a) + (8 – b)$. No, u treću su kuću stigla 4 miša pa je $(7 – a) + (8 – b) = 4$. To znači da je $a + b = 11$.

22. [Brazil] Pravilni šesterokut podijeljen je na četiri četverokuta i jedan manji, pravilni šesterokut. Površine osjenčanog dijela i malog šesterokuta u omjeru su 4 : 3. Koliki je omjer površina malog i velikog šesterokuta?



A) 3 : 11 B) 1 : 3 C) 2 : 3 D) 3 : 4 E) 3 : 5

Rješenje: A



Kako su šesterokuti pravilni, imamo dva para sukladnih četverokuta, kao što je označeno na slici. To znači da je osjenčana (siva) površina iz zadatka jednaka polovini ukupne površine tih četverokuta.

Označimo površinu velikog šesterokuta P_V, površinu malog P_M, a površinu osjenčanog dijela P_O.

Sada vrijedi: $P_O = \dfrac{P_v - P_M}{2}$.

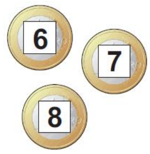
Kako je $\dfrac{P_O}{P_M} = \dfrac{4}{3}$, onda je $P_O = \dfrac{4}{3} P_M$.

Budući da su lijeve strane tih jednakosti jednake, onda možemo izjednačiti i desne strane pa dobijemo
$\frac{P_V - P_M}{2} = \frac{4}{3} P_M$.
No onda vrijedi:

$$P_V - P_M = \frac{8}{3} P_M \Big/ : P_M,\ P_M \neq 0$$

$$\frac{P_V}{P_M} - 1 = \frac{8}{3}$$
$$\frac{P_V}{P_M} = \frac{11}{3}$$
$P_V : P_M = 11 : 3$, odnosno $P_M : P_V = 3 : 11$.

23. [Slovačka] Roč je zapisao šest uzastopnih brojeva na šest bijelih papirića, po jedan broj na svaki papirić. Zalijepio ih je na gornji i donji dio triju novčića, a zatim je tri puta bacio te novčiće. Pri prvom je bacanju vidio brojeve 6, 7 i 8 kao što je prikazano, a zatim ih je obojio crvenom bojom. U drugom bacanju zbroj brojeva koji je vidio bio je 23, a u trećem 17. Koliki je zbroj brojeva na preostala tri bijela papirića (koje nije obojio)?



A) 18 B) 19 C) 23 D) 24 E) 30

Rješenje: A

Kako su brojevi uzastopni, a vidio je brojeve 6, 7 i 8, onda imamo ovih četiri mogućnosti za tih šest brojeva:

3, 4, 5, 6, 7, 8

4, 5, 6, 7, 8, 9

5, 6, 7, 8, 9, 10

6, 7, 8, 9, 10, 11.

U prvom slučaju najveći je zbroj triju brojeva 21 pa ta mogućnost otpada jer se ne mogu vidjeti brojevi čiji je zbroj 23.

Kako je najmanji mogući zbroj u trećem i četvrtom slučaju 18 odnosno 21, te mogućnosti otpadaju jer se ne mogu vidjeti brojevi čiji je zbroj 17.

To znači da je Roč zapisao brojeve 4, 5, 6, 7, 8 i 9, a zbroj brojeva na preostala tri bijela papirića je

4 + 5 + 9 = 18.

24. [Hrvatska] Za stolom sjedi dvostruko više djece nego odraslih. Kad bi svi odrasli otišli od stola, prosjek godina osoba za stolom smanjio bi se pet puta. Godine svih osoba su prirodni brojevi veći od 1, a zbroj godina odraslih je 156. Za koji bi najveći mogući broj osoba ove tvrdnje mogle biti istinite?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

Rješenje: D
Ako je za stolom n odraslih, onda je za tim stolom $2n$ djece, odnosno $3n$ osoba.
Označimo s O zbroj godina odraslih osoba, a s D zbroj godina djece za tim stolom.
Prosjek godina osoba za tim stolom je $\frac{O+D}{3n}$, a ako od stola odu svi odrasli, prosjek je $\frac{D}{2n}$. Zato vrijedi:

$$\frac{O+D}{3n}=5\cdot\frac{D}{2n} \Rightarrow \frac{O+D}{3}=5\cdot\frac{D}{2} \Rightarrow 2O+2D=15D \Rightarrow 2O=13D$$

$O=156$

$13D=312$

$D=24$

Za stolom ne može biti jedna odrasla osoba jer bi imala 156 godina.
Promotrimo ostale moguće slučajeve:

broj odraslih za stolom	broj djece za stolom	primjer godina za odrasle	primjer godina za djecu	ukupan broj osoba
2	4	76 i 80	10, 4, 4 i 6	6
3	6	50, 51 i 55	4, 5, 3, 6, 2, 4	9
4	8	40, 45, 30, 41	2, 2, 3, 5, 2, 3, 3, 4	12
5	10	30, 31, 32, 33, 30	2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3	15
6	12	25, 25, 25, 25, 20, 36	2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,	18

Za stolom ne može biti više od dvanaestero djece jer bi neka djeca morala imati jednu godinu, što nije moguće.

Obavijesti o rezultatima mogu se naći na mrežnim stranicama HMD-a.
http://www.matematika.hr/klokan/2023/