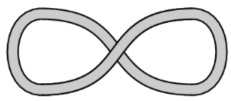
MATEMATIČKI KLOKAN 2024.

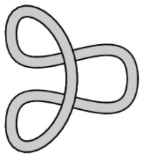
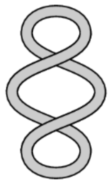
RJEŠENJA ZADATAKA

C

Pitanja za 3 boda:

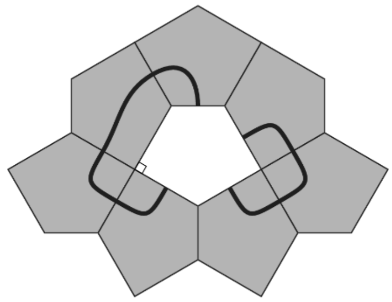
1. [Njemačka] Koja se od sljedećih petlji ne može bez rezanja presložiti u petlju prikazanu s desna?

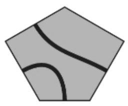
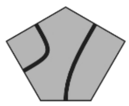


A)  B)  C)  D)  E) 

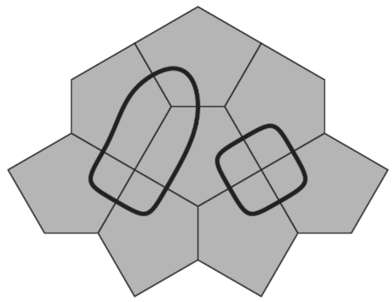
Rješenje: B
Samo u primjeru B formirana su dva prstena koja prolaze jedan kroz drugi i nemoguće ih je raspetljati bez rezanja.

2. [Slovenija] Lik na slici sastavljen je od peterokutnih pločica jednakih veličina. Koja od sljedećih pločica nedostaje u tom liku da bi se dobile dvije zatvorene crte?

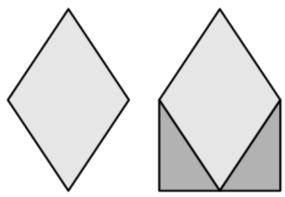


A)  B)  C) 
D)  E) 

Rješenje: C
Uočimo da pločicu koja nedostaje promatramo tako da svaku od ponuđenih rotiramo za 180° te onda tražimo odgovarajuću. Rješenje je C.

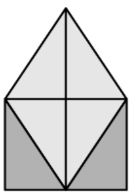


3. [Španjolska] Na prvoj slici prikazan je romb. Za koliki se postotak poveća površina ako rombu docrtamo dva pravokutna trokuta, kako je prikazano na drugoj slici?



A) 20 % B) 25 % C) 30 % D) 40 % E) 50%

Rješenje: E
Uočimo da se romb može podijeliti na četiri sukladna pravokutna trokuta, a lik na drugoj slici na šest takvih trokuta. Udio je $\frac{6}{4}=1.5$ pa je povećanje za 50 %. Rješenje je E.



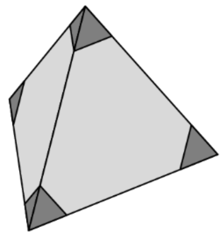
4. [Uganda] Kolika je vrijednost razlomka $\frac{20\cdot 24}{2\cdot 0+2\cdot 4}$?

A) 12 B) 30 C) 48 D) 60 E) 120

Rješenje: D

$\frac{20\cdot 24}{2\cdot 0+2\cdot 4}=\frac{20\cdot 24}{8}=20\cdot 3=60.$ Rješenje je D.

5. [Njemačka] Jan je kod svakog vrha pravilnog tetraedra odrezao dio kao što je prikazano na slici. Koliko vrhova ima oblik koji je nastao nakon rezanja?



A) 8 B) 9 C) 11 D) 12 E) 15

Rješenje: D
Rezanjem je umjesto jednoga vrha dobio tri nova. Kako tetraedar ima četiri vrha, dobiveni ih oblik ima $4\cdot 3=12$. Rješenje je D.

6. [Švicarska] U zdjeli za voće su jabuke, grožđe, trešnje, jagode i banane. Ana voli jabuke. Petar voli jabuke, trešnje, jagode i banane. Lara voli grožđe, trešnje, jagode i banane. Domagoj voli jabuke, grožđe i trešnje. Ena voli jabuke i trešnje. Voće su podijelili tako da svatko dobije različitu vrstu voća, i to onu koju voli. Tko je dobio trešnje?

A) Ana B) Petar C) Lara D) Domagoj E) Ena

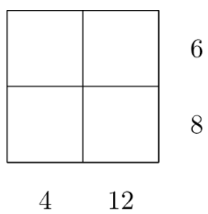
Rješenje: E
Ako je svatko dobio voće koje voli, tada je Ana dobila jabuke, a Ena je dobila trešnje (iako ona voli i jabuke i trešnje, jabuke je već dobila Ana pa su Eni preostale samo trešnje). Tada je Domagoj dobio grožđe, a Petar i Lara dobili su jagode i banane ili obratno. Rješenje je E.

7. [Ukrajina] U obavijesti o ograničenju ukupne mase u dizalu navedeno je da dizalo smije istovremeno prevoziti ili dvanaest odraslih osoba ili dvadesetero djece. U skladu s ograničenjem, koji je najveći broj djece koja se mogu istovremeno voziti s devet odraslih osoba?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

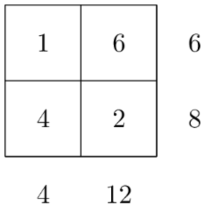
Rješenje: C
Moramo odrediti koliko djece smije biti u dizalu umjesto $12-9=3$ odrasle osobe. Ako umjesto 12 odraslih može biti dvadesetero djece, onda umjesto 3 odrasle osobe može biti $20:4=5$, dakle petero djece. Rješenje je C.

8. [Australija] U kvadratnoj mreži upisana su četiri različita prirodna broja. Brojevi su prekriveni, no umnožak brojeva u svakome retku i svakom stupcu upisan je pored tablice. Koliki je zbroj tih četiriju brojeva?



A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Rješenje: C

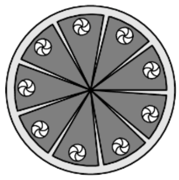


U gornjem redu imamo ili 2 i 3 ili 1 i 6. Ako 2 stavimo u gornji lijevi kvadrat, moramo i u donji lijevi, što nije moguće. Ako u gornji lijevi postavimo 3 ili 6, u donjem lijevom kvadratu bio bi razlomak, što također nije moguće. Dakle, u gornji lijevi kvadrat moramo staviti 1. Sada možemo popuniti kvadrat kao što je prikazano na slici. Zbroj tih brojeva je 1 + 6 + 4 + 2 = 13. Rješenje je C.

Drugi način: U gornji lijevi kvadrat moramo upisati zajednički djelitelj brojeva 6 i 4. Imamo dvije mogućnosti, 1 ili 2. Ako 2 stavimo u gornji lijevi kvadrat, moramo i u donji lijevi, što nije moguće. Stoga je u gornjem lijevom kvadratu broj 1.

Pitanja za 4 boda:

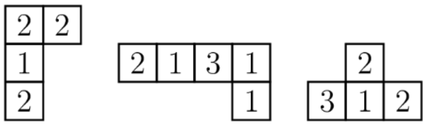
9. [Njemačka] Sofija je ispekla tortu i izrezala je na deset jednakih dijelova. Pojela je jedan komad, a preostale ravnomjerno rasporedila kao što je prikazano na slici. Kolika je veličina kuta između dvaju susjednih komada torte?



A) 5° B) 4° C) 3° D) 2° E) 1°

Rješenje: B

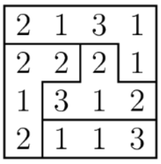
Središnji kut svakog isječka je $\frac{360}{10} = 36°$. Kako ima devet praznina, veličina kuta između dvaju susjednih komada torte je $\frac{36}{9} = 4°$. Rješenje je B.

10. [Njemačka] Fran može složiti kvadrat 4 x 4 pomoću ova tri dijela  i još jednog koji nedostaje. Koji je to dio ako je zbroj brojeva u svakome retku i u svakom stupcu toga kvadrata isti?

A) $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{3}$ B) $\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}$ C) $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$ D) $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$ E) $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}$

Rješenje: A

Jedan od zadanih dijelova ima niz od četiri broja sa zbrojem 2 + 1 + 3 + 1 = 7. Dakle, zbroj brojeva u cijelom je kvadratu 4 · 7 = 28. Zbrojevi brojeva na ova tri dijela redom su 7, 8, 8, stoga je potreban dio u kojemu zbroj brojeva iznosi 28 – 7 – 8 – 8 = 5. Od danih mogućnosti jedino je dio A sa zbrojem 5. Složeni kvadrat izgleda ovako:

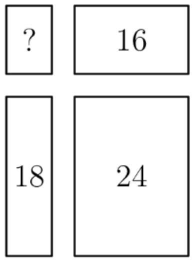


11. [Ujedinjeno Kraljevstvo] Pingvin Pingi svaki dan ide u ribolov iz kojega donese dvanaest riba za svoja dva pingvinčića. Svaki dan daje sedam riba pingvinčiću koji prvi dođe do njega, a drugome preostalih pet riba. U posljednjih nekoliko dana jedan je pingvinčić pojeo 44 ribe. Koliko je riba pojeo drugi?

A) 34 B) 40 C) 46 D) 52 E) 58

Rješenje: D
Jedina mogućnost da pingvinčić pojede 44 ribe je da pojede 5 riba šest puta i 7 riba dva puta. Stoga je taj pingvinčić jeo ribu osam dana. U tih osam dana Pingi je donio $8 \cdot 12 = 96$ riba. To znači da je drugi pingvinčić pojeo $96 – 44 = 52$ ribe. Rješenje je D.

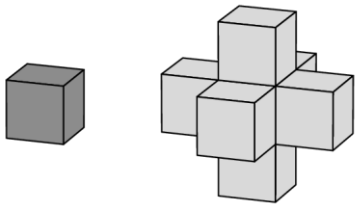
12. [Nizozemska] Noa je izrezao veliki pravokutnik i dobio četiri manja. Opsezi triju manjih pravokutnika su 16, 18 i 24, kao što je prikazano na slici. Koliki je opseg najmanjega pravokutnika?



A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

Rješenje: B
Opseg velikog pravokutnika jednak je zbroju opsega gornjeg lijevog i donjeg desnog pravokutnika, kao i gornjeg desnog i donjeg lijevog pravokutnika. Sada je ? + 24 = 18 + 16 pa je ? = 10. Rješenje je B.

13. [Brazil] Kristijan ima puno identičnih kocaka. Napravio je oblik prikazan na slici tako da je na svaku stranu jedne kocke zalijepio jednu stranu nove kocke. Dobiveni oblik želi proširiti na isti način tako da na svaku njegovu stranu zalijepi jednu stranu nove kocke. Koliko mu dodatnih kocaka treba da bi proširio prikazani oblik?



A) 18 B) 16 C) 14 D) 12 E) 10

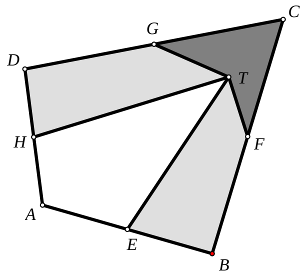
Rješenje: A
Ukupno treba zalijepiti kocke na $6 \cdot 5 = 30$ strana. Jedna kocka može se zalijepiti na dvije kocke koje se dodiruju u zajedničkom bridu. Za takve strane treba nam ukupno 12 kocaka. Ostalo je zalijepiti kocke na one strane koje nemaju zajedničkih bridova s ostalim kockama, a njih je 6. Ukupno je potrebno $12 + 6 = 18$ kocaka. Rješenje je A.

14. [Austrija] Klokan skače uzbrdo, a zatim nazad istim putem. Svakim skokom nizbrdo prijeđe tri puta veću udaljenost od one koju prijeđe svakim skokom uzbrdo. Njegovi skokovi uzbrdo dugački su 1 m. Klokan je ukupno skočio 2024 puta. Koliku je ukupnu udaljenost u metrima prešao na taj način?

A) 506 B) 1012 C) 2024 D) 3036 E) 4048

Rješenje: D
Označimo s u broj skokova uzbrdo, a s n broj skokova nizbrdo. Budući da svakim skokom nizbrdo prijeđe tri puta veću udaljenost, uzbrdo će napraviti tri puta više skokova, tj. vrijedi $u = 3n$. Kako je $u + n = 2024$, dobijemo da je $4n = 2024$, odnosno $n = 506$. Ukupna udaljenost u metrima je $506 \cdot 3 + 3 \cdot 506 \cdot 1 = 3036$. Rješenje je D.

15. [Hrvatska] Točke *E, F, G, H* polovišta su stranica četverokuta *ABCD*. Površina tamno sivo osjenčanog dijela je 12 cm^2, a svaki od svijetlo sivo osjenčanog dijela ima površinu 24 cm^2. Kolika je površina neosjenčanog dijela toga četverokuta?

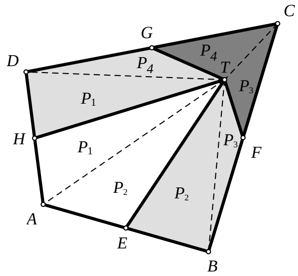


A) 30 cm^2 B) 32 cm^2 C) 34 cm^2 D) 36 cm^2 E) 38 cm^2

Rješenje: D

Kako su točke *E*, *F*, *G* i *H* polovišta stranica četverokuta *ABCD*, svaka dva trokuta nad istom stranicom četverokuta kojima je točka *T* treći vrh imaju istu površinu jer imaju iste duljine osnovica i istu visinu. Zato vrijedi:

$$P_{AETH}+P_{TFCG}=P_{EBFT}+P_{HTGD}$$
$$P_{AETH}+12=24+24$$
$$P_{AETH}=36\text{ cm}^2$$



Rješenje je D.

16. [Vijetnam] Devet karata označenih brojevima od 1 do 9 stavljeno je na stol licem prema dolje. Marko, Vito, Korina i Zita uzeli su svatko po dvije karte. Marko je rekao: „Moji brojevi zajedno daju 6“. Vito je izjavio: „Moji se brojevi razlikuju za 5“. Korina je rekla: „Umnožak mojih brojeva je 18“. Zita je objavila: „Jedan od mojih brojeva dvostruko je veći od drugog“. Ako su svi rekli istinite tvrdnje, koji je broj na karti koja je ostala na stolu?

A) 1 B) 3 C) 6 D) 8 E) 9

Rješenje: E

S obzirom na to da su svi dali istinite izjave, brojevi na Markovim kartama mogli su biti 1 i 5 ili 2 i 4, brojevi na Vitovim kartama mogli su biti 1 i 6, 2 i 7, 3 i 8 ili 4 i 9, brojevi na Korininim kartama mogli su biti 2 i 9 ili 3 i 6, a brojevi na Zitinim kartama mogli su biti 1 i 2, 2 i 4, 3 i 6 ili 4 i 8.
Ako su na Markovim kartama bili brojevi 2 i 4, tada bi brojevi na Korininim kartama mogli biti samo 3 i 6. No tada nema mogućnosti za Zitine karte. To znači da su brojevi na Markovim kartama bili 1 i 5.
Ako su na Korininim kartama bili brojevi 2 i 9, tada bi na Vitovim kartama mogli biti samo brojevi 3 i 8, no onda nema mogućnosti za Zitine karte. Zato su na Korininim kartama bili brojevi 3 i 6. Ako su na Vitovim kartama bili brojevi 4 i 9, tada nam ne preostaje niti jedna mogućnost za Zitine karte pa su na Vitovim kartama bili brojevi 2 i 7, a na Zitinima 4 i 8. Na stolu je ostala karta s brojem 9. Odgovor je E.
Rješenje se može prikazati i tablicom:

Marko	Vito	Korina	Zita
1 i 5	1 i 6	2 i 9	1 i 2
2 i 4	2 i 7	3 i 6	2 i 4
	3 i 8		3 i 6
	4 i 9		4 i 8
Marko	Vito	Korina	Zita
2 i 4	4 i 9	3 i 6	nemoguće
Marko	Vito	Korina	Zita
1 i 5	2 i 7	2 i 9	2 i 4
	3 i 8	3 i 6	3 i 6
	4 i 9		4 i 8
Marko	Vito	Korina	Zita
1 i 5	3 i 8	2 i 9	nemoguće
Marko	Vito	Korina	Zita
1 i 5	2 i 7	3 i 6	2 i 4
	4 i 9		4 i 8
Marko	Vito	Korina	Zita
1 i 5	4 i 9	3 i 6	nemoguće
Marko	Vito	Korina	Zita
1 i 5	2 i 7	3 i 6	4 i 8

Pitanja za 5 bodova:

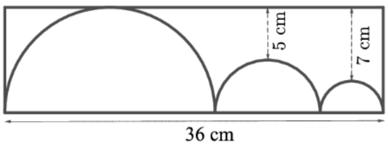
17. [Finska] Znamenke od 0 do 9 mogu se zapisati pomoću horizontalnih i vertikalnih linija kao što je prikazano na slici.

Hrvoje je izabrao tri različite znamenke. Njegove znamenke imaju ukupno 5 horizontalnih i 10 vertikalnih linija. Koliki je zbroj njegovih znamenka?

A) 9 B) 10 C) 14 D) 18 E) 19

Rješenje: A
Svaka od znamenaka ima ili niti jednu, ili jednu, ili dvije, ili tri horizontalne linije, pa 5 horizontalnih linija u tri znamenke možemo dobiti na sljedeće načine:
5 = 2 + 2 + 1
5 = 3 + 1 + 1
5 = 3 + 2 + 0
Prva mogućnost nije moguća jer samo jedna znamenka, 0, ima dvije horizontalne linije.
Druga mogućnost također nije moguća jer samo 4 i 7 imaju jednu horizontalnu liniju, a kako imaju ukupno pet vertikalnih linija, treći bi broj trebao imati preostalih pet, a najveći broj vertikalnih linija je četiri.
Ostaje treća mogućnost koja se može dobiti znamenkama 8, 0 i 1, zbroj je tih znamenaka 9. Rješenje je A.

18. [Katalonija] Slika prikazuje tri polukruga upisana pravokutniku. Srednji polukrug dodiruje preostala dva polukruga koji pak dodiruju kraću stranicu pravokutnika. Najveći polukrug dodiruje i jednu od duljih stranica pravokutnika. Ona je od preostala dva polukruga udaljena 5 cm, odnosno 7 cm. Koliki je opseg pravokutnika?



A) 82 B) 92 C) 96 D) 108 E) 120

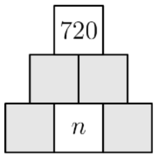
Rješenje: B
Neka je b duljina nepoznate stranice zadanog pravokutnika. Radijusi triju polukrugova onda su redom b, $b-5$, $b-7$.
Sada vrijedi $2(b+b-5+b-7)=36.$ Rješenje ove jednadžbe je 10, pa je duljina nepoznate stranice 10 cm, a opseg pravokutnika $2 \cdot 46 = 92$ cm. Rješenje je B.

19. [Kina] Skupina od 50 učenika sjedi u krug. Bacaju loptu, a svaki učenik koji je dobije baci je šestom učeniku do sebe koji sjedi suprotno od kretanja kazaljki sata. Monika je uhvatila loptu 100 puta. Koliko učenika za to vrijeme nije niti jednom dobilo loptu?

A) 0 B) 8 C) 10 D) 25 E) 40

Rješenje: D
Učenike označimo brojevima 1, 2, 3,…,50. Kad je igra započela, učenik 1 dodao je učeniku 7, taj učenik dodao je učeniku 13, itd. Kad lopta prođe prvi krug, loptu će dobiti učenici 1, 7, 13, 19,…, 43, 49, tj. njih 9. Učenik 49 dodao je loptu učeniku 5, čime lopta kreće drugi put po krugu, a dobivaju je učenici 5, 11, 17,…, 41, 47, tj. njih 8. Učenik 47 dodao je loptu učeniku 3, čime počinje treći krug: 3, 9, 15,…, 39, 45, tj. njih 8. Učenik 45 dodao je loptu učeniku 1, čime počinje četvrti krug u kojemu loptu dobivaju oni isti učenici koji su je dobili u prvom krugu. Dakle, svaka tri kruga situacija se ponavlja. Očito je prošlo više od tri kruga jer je Monika dobila loptu 100 puta, a učenici koji su dobili loptu su 1, 7, 13,…, 49; 5, 11, 17,…, 47; 3, 9, 15,…, 45. Radi se o 25 različitih učenika. Preostalih 25 nije dobilo loptu. Rješenje je D.

20. [Turska] Zrinka želi dovršiti dijagram tako da svaka ćelija sadrži broj jednak umnošku pozitivnih cijelih brojeva upisanih u dvije ćelije u redu ispod. Ako je u ćeliji na vrhu broj 720, koliko različitih vrijednosti može imati broj n?



A) 1 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

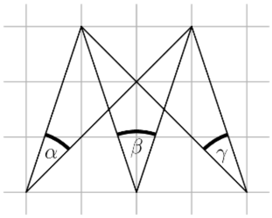
Rješenje: D
Neka su a i b vrijednosti koje nedostaju u najdonjem redu, lijevo i desno od ćelije u kojoj je broj n. To znači da su u srednjem redu vrijednosti an i bn pa vrijedi $abn^2 = 720$. Kako je $720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, odredimo sve moguće kvadratne faktore. $n^2 \in \{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 36,\ 144\}$ pa je $n \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$, tj. može imati 6 različitih vrijednosti. Rješenje je D.

21. [Mađarska] Nina prodaje kokošja i pačja jaja. Složena su u košare s po 4, 6, 12, 13, 22 i 29 jaja. Njezin je prvi kupac kupio sva jaja iz jedne košare. Nina je primijetila da joj je ostalo dvostruko više kokošjih jaja. Koliko je jaja kupio taj kupac?

A) 4 B) 12 C) 13 D) 22 E) 29

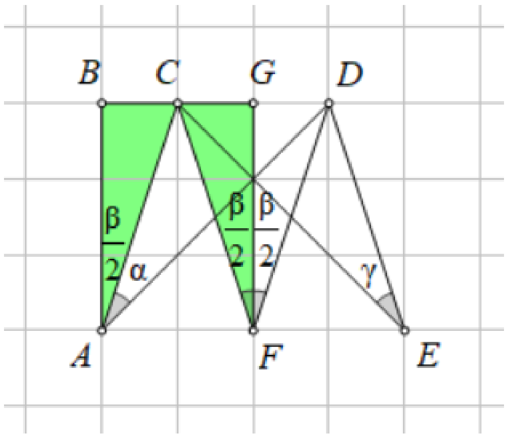
Rješenje: E
Nina ima ukupno $4 + 6 + 12 + 13 + 22 + 29 = 86$ jaja. Kad je prodala jednu košaru jaja, uočila je da joj je ostalo dvostruko više kokošjih od pačjih jaja. To znači da je broj jaja koji je preostao djeljiv s 3. Kako je ostatak pri dijeljenju broja 86 s 3 jednak 2, broj jaja koja je prodala pri dijeljenju s 3 također mora imati ostatak 2. Jedini broj jaja u košarama koji pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2 je broj 29. Rješenje je E.

22. [Bjelorusija] U kvadratnoj mreži označena su tri kuta, α, β i γ, kako je prikazano na slici. Koliko je $\alpha + \beta + \gamma$?



A) 60° B) 70° C) 75° D) 90° E) 120°

Rješenje: D
U kvadratnoj mreži istaknimo točke B, C, G, D te A, F, E, kao na slici. Sada vrijedi da je $\Delta CGF \cong \Delta CBA$ jer su to pravokutni trokuti čije su katete sukladne. Tada je $\angle CAB = \angle GFC = \frac{\beta}{2}$.
Vrijedi $\angle DAB = 45°$ jer je $\overline{AD}$ dijagonala kvadrata. Dakle, $45° = \angle DAB = \alpha + \frac{\beta}{2}$. Na isti se način dobije $45° = \gamma + \frac{\beta}{2}$. Kada zbrojimo te dvije jednakosti, dobivamo $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

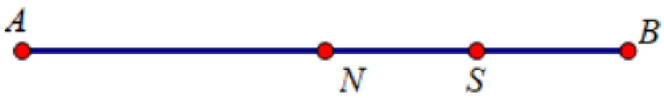


Rješenje je D.

23. [Moldavija] Ada vozi od točke A do točke B, a zatim se odmah vraća u A. Mia vozi od točke B do točke A, a zatim se odmah vraća u B. Putuju istom cestom, počinju u isto vrijeme i voze stalnim brzinama. Adina je brzina tri puta veća od Mijine. Prvi su se put mimoišle 15 minuta nakon starta. Koliko će se minuta nakon početka vožnje mimoići drugi put?

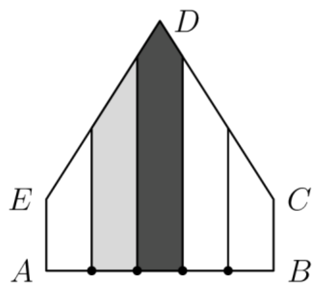
A) 20 min B) 25 min C) 30 min D) 35 min E) 45 min

Rješenje: C



Neka su v_A i v_M Adina i Mijina brzina. Pretpostavimo da će se prvi put sresti u točki *S*. Kako je $v_A = 3v_M$, onda je $|AS| = 3|BS|$. Svaka je djevojka svoju udaljenost prešla za 15 min. Kako je $\frac{v_A}{v_M} > 2$, drugi će se susret dogoditi prije nego Mia stigne do točke *A*. Označimo to mjesto s *N*. Između dva susreta Ada je prešla udaljenost $2|BS| + |NS|$, a Mia udaljenost $|NS|$. No, opet zbog $v_A = 3v_M$ vrijedi $2|BS| + |NS| = 3|NS|$ pa zaključujemo da je $|BS| = |NS|$. To znači da je od početka do drugog susreta Mia prešla udaljenost $|BS| + |NS| = 2|BS|$, a za to joj je trebalo 2 · 15 = 30 minuta. Rješenje je C.

24. [Hong Kong] U peterokutu *ABCDE* vrijedi: $\angle A = \angle B = 90°$, $|AE| = |BC|$ i $|ED| = |DC|$. Četiri točke istaknute na dužini $\overline{AB}$ dijele je na pet jednakih dijelova. Tim točkama nacrtane su okomice na $\overline{AB}$, kao što je prikazano na slici. Tamno osjenčani dio ima površinu 13 cm^2, a svijetlo sivo osjenčani dio 10 cm^2. Kolika je površina u cm^2 danog peterokuta?



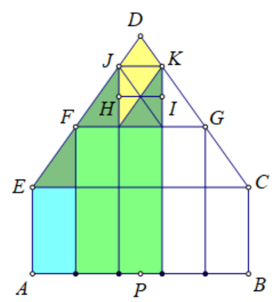
A) 45 B) 47 C) 49 D) 58 E) 60

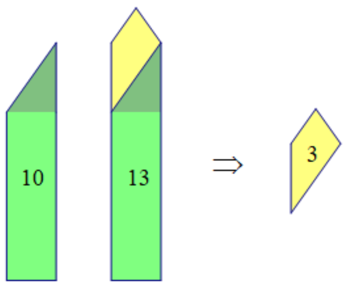
Rješenje: A

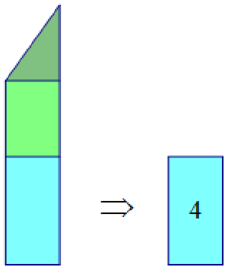
Kako je $\angle A = \angle B = 90°$ i vrijedi $|AE| = |BC|$, četverokut *ABCE* je pravokutnik.

Ako je *P* polovište dužine $\overline{AB}$, peterokut *ABCDE* je osnosimetričan s obzirom na pravac *DP*.

Nacrtajmo dužine $\overline{FG}$, $\overline{HI}$, $\overline{JK}$ i uočimo da su paralelne dužini $\overline{AB}$. Promotrimo površine dobivenih likova:







10 - 2 - 4 = 4

Sada zaključujemo da je površina zadanog peterokuta $2 \cdot (4 + 2) + 2 \cdot 10 + 13 = 45$. Rješenje je A.

Obavijesti o rješenjima zadataka i rezultatima mogu se naći na mrežnim stranicama HMD-a.
http://www.matematika.hr/klokan/2024/