Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** i **prof. Janošu Boniju** na dozvoli da skeniram knjižicu "Funkcija apsolutna vrijednost" i objavim na svojim web stranicama.

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »PITAGORA«
BELI MANASTIR

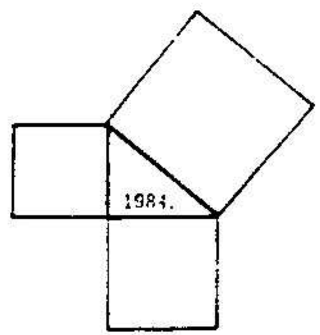
PITAGORINI MATERIJALI ZA MLADE MATEMATIČARE

32

Luka Čeliković - Janoš Boni:

FUNKCIJA APSOLUTNA VRIJEDNOST

$$|\ \ |: R \longrightarrow R_o^+,\quad x \longmapsto |x|$$



Osijek-Mohács, 1993.

Izdavač:

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA "P I T A G O R A" BELI MANASTIR

Urednik:

Luka Čeliković

Osijek-Mohács, 1993.

Luka Čeliković - Janoš Boni:

FUNKCIJA APSOLUTNA VRIJEDNOST

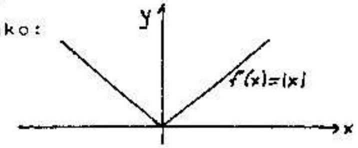
$| \; | : R \to R_0^+ , \; x \mapsto |x|$

Definicija 1: Funkciju $|\,| : R \to R_0^+$ definiranu sa

$$x \mapsto |x| = \begin{cases} -x, & \text{za } x < 0 \\ 0, & \text{za } x = 0 \\ x, & \text{za } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x, & \text{za } x \leq 0 \\ x, & \text{za } x \geq 0 \end{cases}$$

zovemo apsolutna vrijednost (modul).

Njen graf izgleda ovako:



Sada ćemo izreći neka svojstva ove funkcije.

Lema 1: $|x| \geq 0, \forall x \in R$, pri čemu je $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Dokaz:
Dokaz neposredno slijedi iz definicije 1.

Lema 2: $|-x| = |x|, \forall x \in R$, tj. funkcija apsolutna vrijednost je parna funkcija (graf joj je osnosimetričan u odnosu na os y kao os simetrije).
Dokaz:

$$|-x| \overset{(D1)}{=} \begin{cases} -(-x) = x, & \text{za } -x \leq 0 \\ -x, & \text{za } -x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & \text{za } x \geq 0 \\ -x, & \text{za } x \leq 0 \end{cases} \overset{(D1)}{=} |x|, \; \forall x \in R.$$

Lema 3: $x \leq |x|, \forall x \in R$.
Dokaz:
1°) $x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow x = -|x| \leq |x| \Rightarrow x \leq |x|$;
2°) $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x \leq |x|$.

Lema 4: $-x \leq |x|$, tj. $x \geq -|x|, \forall x \in R$.
Dokaz:

$$L3 \Rightarrow -x \leq |-x| \overset{(L2)}{=} |x| \Rightarrow -x \leq |x| \Rightarrow x \geq -|x|, \; \forall x \in R.$$

Korolar 1: $-|x| \leq x \leq |x|, \forall x \in R$.
Dokaz:
Dokaz neposredno slijedi iz lema 2 i 3.

Teorem 1: $|x+y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in R$.
Dokaz:

$$1^\circ) \left. \begin{array}{l} x+y \geq 0 \Rightarrow |x+y| = x+y \\ L3 \Rightarrow x \leq |x| \wedge y \leq |y| \Rightarrow x+y \leq |x|+|y| \end{array} \right\} \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|;$$

$$2^\circ) \left. \begin{array}{l} x+y \leq 0 \Rightarrow |x+y| = -x-y \\ L4 \Rightarrow -x \leq |x| \wedge -y \leq |y| \Rightarrow -x-y \leq |x|+|y| \end{array} \right\} \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|.$$

Teorem 2: $|x|-|y| \le |x-y|,\ \forall x,y\in R$.

Dokaz:

$|x|=|(x-y)+y| \overset{(T1)}{\le} |x-y|+|y| \Rightarrow |x| \le |x-y|+|y| \Rightarrow$
$\Rightarrow |x|-|y| \le |x-y|,\ \forall x,y \in R$.

Teorem 3: $|x|-|y| \le |x+y|,\ \forall x,y\in R$.

Dokaz:

$|x|=|(x+y)+(-y)| \overset{(T1)}{\le} |x+y|+|-y| \overset{(L2)}{=} |x+y|+|y| \Rightarrow$
$\Rightarrow |x| \le |x+y|+|y| \Rightarrow |x|-|y| \le |x+y|,\ \forall x,y\in R$.

Tvrdnju T3 možemo dokazati i ovako:

$|x|-|y| \overset{(L2)}{=} |x|-|-y| \overset{(T2)}{\le} |x-(-y)|=|x+y| \Rightarrow |x|-|y|\le|x+y|$.

Korolar 2: $|x|-|y| \le |x+y| \le |x|+|y|,\ \forall x,y\in R$.

Dokaz:

Dokaz neposredno slijedi iz T1 i T3.

Teorem 4: Neka je $a\in R_0^+$. Tada za svaki $x\in R$ vrijedi

$$|x|\le a \iff -a\le x\le a.$$

Dokaz:

$$|x|\le a \iff \begin{cases} -x\le a, & za\ x\le 0\\ x\le a, & za\ x\ge0\end{cases} \iff \begin{cases} -a\le x, & za\ x\le0\\ x\le a, & za\ x\ge 0\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -a\le x\le a, & za\ x\le 0\ (zbog\ a\ge0\ i\ x\le0)\\ -a\le x\le a, & za\ x\ge0\ (zbog\ -a\le0\ i\ x\ge0)\end{cases} \iff -a\le x\le a.$$

Teorem 5: $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|,\ \forall x,y\in R$.

Dokaz:

1°) $x\ge0 \wedge y\ge0 \Rightarrow xy\ge0 \wedge |x|=x \wedge |y|=y \Rightarrow$
$\Rightarrow |xy|=xy \wedge |x|=x\wedge|y|=y \Rightarrow |xy|=xy=|x|\cdot|y| \Rightarrow$
$\Rightarrow |x\cdot y|=|x|\cdot|y|$;

2°) $x\le0\wedge y\ge0 \Rightarrow xy\le0 \wedge |x|=-x\wedge|y|=y\Rightarrow$
$\Rightarrow |xy|=-xy \wedge |x|=-x\wedge|y|=y \Rightarrow |xy|=-xy=(-x)y=|x|\cdot|y| \Rightarrow$
$\Rightarrow |x\cdot y|=|x|\cdot|y|$;

3°) $x\le0\wedge y\le0 \Rightarrow xy\ge0\wedge|x|=-x\wedge|y|=-y\Rightarrow$
$\Rightarrow |xy|=xy\wedge|x|=-x\wedge|y|=-y\Rightarrow|xy|=xy=(-x)(-y)=|x|\cdot|y|$
$\Rightarrow|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$;

4°) $x\ge0\wedge y\le0 \Rightarrow |x\cdot y|=|y\cdot x|=|y|\cdot|x|$ (prema 2°) $=|x|\cdot|y|\Rightarrow$
$\Rightarrow|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.

Korolar 3: $|x|^2=|x^2|=x^2,\ \forall x\in R$.

Dokaz:

Dokaz neposredno slijedi iz T5 stavljajući $y=x$ i iz D1.

Teorem 6: $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|},\ \forall x,y\in R,\ y\ne0$.

Dokaz:

Dokaz provodimo analogno dokazu T5 razmatrajući slučajeve
$x\ge0\wedge y>0,\ x\le0\wedge y>0,\ x\le0\wedge y<0,\ x\ge0\wedge y<0$.

Zadatak 1: Dokažite tvrdnju T6.

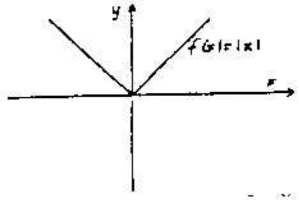
Primjene funkcije apsolutna vrijednost pokazati ćemo u slijedećim primjerima.

Primjer 1: Nacrtati grafove slijedećih funkcija $f: R\rightarrow R$:

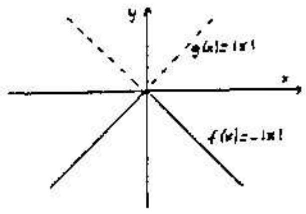
a) $f(x)=|x|$,
b) $f(x)=-|x|$,
c) $f(x)=|x-4|$,
d) $f(x)=|x|-3$,
e) $f(x)=|x-4|-3$,
f) $f(x)=2\cdot|x|$,
g) $f(x)=(1/2)\cdot|x|$,
h) $f(x)=-2\cdot|x|$,
i) $f(x)=2\cdot|x-4|-3$.

Rješenja:

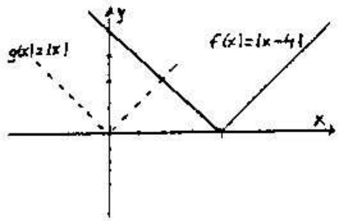
a) $f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & za\ x\le0\\ x, & za\ x\ge0\end{cases}$



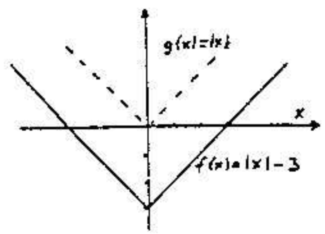
b) $f(x)=-|x|=\begin{cases}x, & za\ x\le0\\ -x, & za\ x\ge0\end{cases}$



c) $f(x)=|x-4|=\begin{cases}-x+4, & za\ x\le4\\ x-4, & za\ x\ge4\end{cases}$

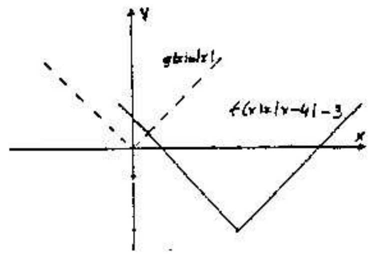


d) $f(x)=|x|-3=\begin{cases}-x-3, & za\ x\le0\\ x-3, & za\ x\ge0\end{cases}$

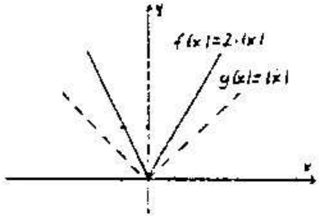


e) $f(x)=|x-4|-3=$

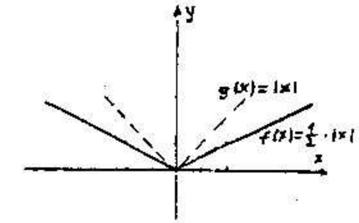
$=\begin{cases}-(x-4)-3=-x+1, & za\ x\le4\\ (x-4)-3=x-7, & za\ x\ge4\end{cases}$



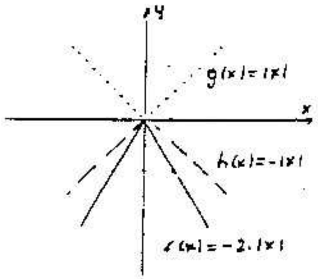
f) $f(x)=2\cdot|x|=\begin{cases}-2x, & \text{za } x\leq 0\\ 2x, & \text{za } x\geq 0\end{cases}$



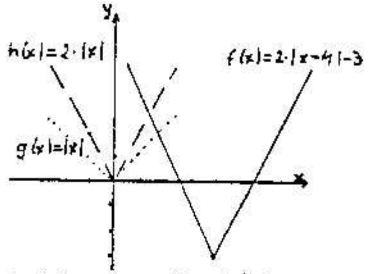
g) $f(x)=\frac{1}{2}\cdot|x|=\begin{cases}(-1/2)x, & \text{za } x\leq 0\\ (1/2)x, & \text{za } x\geq 0\end{cases}$



h) $f(x)=-2\cdot|x|=\begin{cases}2x, & \text{za } x\leq 0\\ -2x, & \text{za } x\geq 0\end{cases}$



i) $f(x)=2\cdot|x-4|-3=$
$=\begin{cases}-2(x-4)-3=-2x+5, & \text{za } x\leq 4\\ 2(x-4)-3=2x-11, & \text{za } x\geq 4\end{cases}$



Usporedbom grafa svake od ovih funkcija sa grafom funkcije $g(x)=|x|$ dolazimo do slijedećeg zaključka:

b) Graf funkcije $f(x)=-|x|$ nastaje osnom simetrijom (zrcaljenjem) u odnosu na os x grafa funkcije $g(x)=|x|$;

c) Graf funkcije $f(x)=|x-4|$ nastaje translacijom grafa funkcije $g(x)=|x|$ u smjeru osi x za 4;

d) Graf funkcije $f(x)=|x|-3$ nastaje translacijom grafa funkcije $g(x)=|x|$ u smjeru osi y za -3;

e) Graf funkcije $f(x)=|x-4|-3$ nastaje translacijon grafa funkcije $g(x)=|x|$ u smjeru osi x za 4 i u smjeru osi y za -3;

f) Graf funkcije $f(x)=2\cdot|x|$ nastaje rastezanjem (dilatacijom) grafa funkcije $g(x)=|x|$ u smjeru osi +y sa koeficijentom rastezljivosti 2;

g) Graf funkcije $f(x)=(1/2)\cdot|x|$ nastaje stezanjem (kontrakcijom) grafa funkcije $g(x)=|x|$ prema osi x sa koeficijentom stezanja (1/2);

h) Graf funkcije $f(x)=-2\cdot|x|$ nastaje rastezanjem grafa funkcije $h(x)=-|x|$ u smjeru osi $-y$ sa koeficijentom rasteza - nja 2,...

i) Graf funkcije $f(x)=2\cdot|x-4|-3$ nastaje translacijom grafa funkcije $h(x)=2\cdot|x|$ u smjeru osi x za 4 i u smjeru osi y za -3,...

Napomena 1: Uočite da graf funkcije $f(x)=a\cdot|x-x_o|+y_o$ nastaje translacijom grafa funkcije $g(x)=a\cdot|x|$ u smjeru osi x za x_o i u smjeru osi y za y_o. Pri tome graf funkcije $g(x)=a\cdot|x|$ nastaje rastezanjem grafa funkcije $h(x)=|x|$ u pozitivnom smjeru osi y u slučaju $a>1$, odnosno njegovim stezanjem u slučaju $0<a<1$. Pri $a<0$ graf funkcije $g(x)=a\cdot|x|$ nastaje rasteza - njem grafa funkcije $h(x)=-|x|$ u negativnom smjeru osi y kada je $a<-1$, odnosno njegovim stezanjem kada je $-1<a<0$.

Zadatak 2: Dokažite N1.

Primjer 2: Nacrtati graf funkcije $f:R\to R$, $f(x)=(-1/2)\cdot|2x+3|+4$.

Rješenje:

Izraz $2x+3$ je nula za $x=-3/2$, negativan za $x<-3/2$, a pozitivan za $x>-3/2$, što se može prikazati slijedećom tablicom

x	$-\infty<x<-3/2$	$x=-3/2$	$-3/2<x<\infty$
2x+3	−	0	+

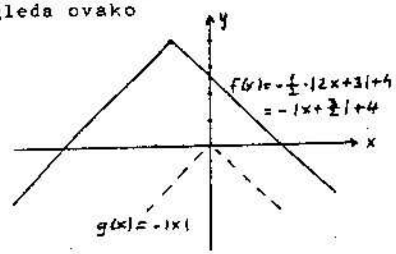
Na osnovu definicije apsolutne vrijednosti imamo

$$f(x)=(-1/2)\cdot|2x+3|+4=\begin{cases}(1/2)\cdot(2x+3)+4=x+11/2, & \text{za } x\leq -3/2\\ (-1/2)\cdot(2x+3)+4=-x+5/2, & \text{za } x\geq -3/2\end{cases}.$$

Primjetimo da smo zadanu funkciju mogli transformirati i ovako:

$$f(x)=(-1/2)\cdot|2x+3|+4=(-1/2)\cdot|2|\cdot|x+3/2|+4=-|x+3/2|+4=$$
$$=\begin{cases}x+3/2+4=x+11/2, & \text{za } x\leq -3/2\\ -(x+3/2)+4=-x+5/2, & \text{za } x\geq -3/2\end{cases}.$$

Njen graf izgleda ovako



Usporedite graf ove funkcije sa grafom funkcije $g(x)=(-1/2)\cdot|2x|=-|x|$.

Napomena 2: Uočite da graf funkcije $f(x)=a\cdot|bx+c|+d=a\cdot|b|\cdot|x+c/b|+d$ nastaje translacijom grafa funkcije $g(x)=a\cdot|bx|=a\cdot|b|\cdot|x|$ u smjeru osi x za $x_o=-c/b$ i u smjeru osi y za $y_o=d$.

Zadatak 3: Dokažite N2.

<u>Zadatak 4</u>: Usporedite grafove funkcija $y=f(x)$, $y=A\cdot f(x)$, $y=A\cdot f(x-x_o)+y_o$, $y=f(Bx)$, $y=A\cdot f(Bx+C)+D=A\cdot f(B(x+C/B))+D$ u slijedećim primjerima:

(1) $y=x^2$, $y=Ax^2$, $y=A(x-x_o)^2+y_o$, $y=(Bx)^2$, $y=A(Bx+C)^2+D=$ $=A(B(x+C/B))^2+D$;

(2) $y=a^x$ $(a>0)$, $y=Aa^x$, $y=Aa^{x-x_o}+y_o$, $y=a^{Bx}$, $y=Aa^{Bx+C}+D=$ $=Aa^{B(x+C/B)}+D$;

(3) $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$, $y=A\cdot\log_a x$, $y=A\cdot\log_a(x-x_o)+y_o$, $y=\log_a(Bx)$, $y=A\cdot\log_a(Bx+C)+D=A\cdot\log_a(B(x+C/B)+D$;

(4) $y=\sin x$, $y=A\cdot\sin x$, $y=A\cdot\sin(x-x_o)+y_o$, $y=\sin(Bx)$, $y=A\cdot\sin(Bx+C)+D=A\cdot\sin(B(x+C/B))+D$;

(5) $y=\operatorname{ctg}x$, $y=A\cdot\operatorname{ctg}x$, $y=A\cdot\operatorname{ctg}(x-x_o)+y_o$, $y=\operatorname{ctg}(Bx)$, $y=A\cdot\operatorname{ctg}(Bx+C)+D=A\cdot\operatorname{ctg}(B(x+C/B))+D$;

(6) $y=|x|$, $y=A\cdot|x|$, $y=A\cdot|x-x_o|+y_o$, $y=|Bx|$, $y=A\cdot|Bx+C|+D=$ $=A\cdot|B(x+C/B)|+D$.

<u>Primjer 3</u>: Nacrtati graf funkcije $f\colon R\to R$, $f(x)=$ $=2\cdot|x-3|-|1-2x|+|x+1|+x+2$.

Rješenje:

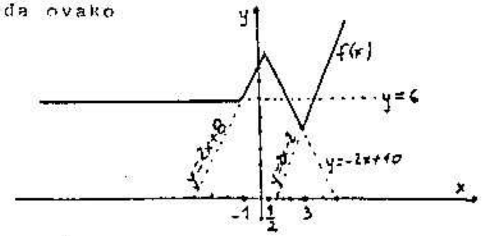
Izraz $x-3$ je nula za $x=3$, za $x<3$ je negativan, dok je za $x>3$ pozitivan. Analogno izlazi za $1-2x$ i $x+1$, što se može prikazati slijedećom tabelom

	$-\infty<x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1/2$	$x=1/2$	$1/2<x<3$	$x=3$	$3<x<\infty$
$x-3$	−	−	−	−	−	0	+
$1-2x$	+	+	+	0	−	−	−
$x+1$	−	0	+	+	+	+	+

Razmotrimo intervale $(-\infty,-1]$, $[-1,1/2]$, $[1/2,3]$ i $[3,\infty)$. U intervalu $(-\infty,-1]$ je $x-3<0$, $1-2x>0$ i $x+1<0$, pa je $|x-3|=-(x-3)$, $|1-2x|=1-2x$ i $|x+1|=-(x+1)$, tj. u tom intervalu je $f(x)=-2(x-3)-(1-2x)+(x+1)+x+2=6$. Razmatrajući redom sve spomenute intervale, imamo

$$f(x)=\begin{cases}-2(x-3)-(1-2x)-(x+1)+x+2= \quad 6, & \text{za } x\in(-\infty,-1]\\ -2(x-3)-(1-2x)+(x+1)+x+2=2x+8, & \text{za } x\in[-1,1/2]\\ -2(x-3)+(1-2x)+(x+1)+x+2=-2x+10, & \text{za } x\in[1/2,3]\\ 2(x-3)+(1-2x)+(x+1)+x+2=2x-2, & \text{za } x\in[3,\infty)\end{cases}$$

Njen graf izgleda ovako



<u>Napomena 3</u>: Uočite da je izraz $ax+b$ pri $a>0$ prvo negativan (za $x<-b/a$), zatim nula (za $x=-b/a$), pa pozitivan (za $x>-b/a$), dok je isti izraz pri $a<0$ prvo pozitivan (za $x<-b/a$), zatim nula (za $x=-b/a$), pa negativan (za $x>-b/a$).

<u>Zadatak 5</u>: Dokažite N3.

<u>Primjer 4</u>: Nacrtati graf funkcije $f\colon R\to R$,
$f(x)=|||x|-3|-1|-2|$.

Rješenje:

Prvi način (metoda razlikovanja slučajeva):

$f(x)=|||x|-3|-1|-2|$ (1)

Uočimo da je funkcija f parna ($f(-x)=f(x)$, $\forall x\in R$, tj. graf joj je osno simetričan u odnosu na os y), pa je dovoljno uzeti na pr. $x\in(-\infty,0]$. Imamo

$x\in(-\infty,0]$

(1) $\Rightarrow$ $f(x)=|||-x-3|-1|-2|$ (2)

x	$-\infty<x<-3$	$x=-3$	$-3<x\leq 0$
$-x-3$	+	0	−

1°) $x\in(-\infty,-3]$

(2) $\Rightarrow$ $f(x)=||-x-3-1|-2|$ $\Rightarrow$ $f(x)=||-x-4|-2|$ (3)

x	$-\infty<x<-4$	$x=-4$	$-4<x\leq -3$
$-x-4$	+	0	−

1°1) $x\in(-\infty,-4]$

(3) $\Rightarrow$ $f(x)=|-x-4-2|$ $\Rightarrow$ $f(x)=|-x-6|$ (4)

x	$-\infty<x<-6$	$x=-6$	$-6<x\leq -4$
$-x-6$	+	0	−

1°1.1) $x\in(-\infty,-6]$

(4) $\Rightarrow$ $f(x)=-x-6$ (5)

1°1.2) $x\in[-6,-4]$

(4) $\Rightarrow$ $f(x)=x+6$ (6)

1°2) $x\in[-4,-3]$

(2) $\Rightarrow$ $f(x)=|x+4-2|$ $\Rightarrow$ $f(x)=|x+2|$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (zbog $x+2<0$, $\forall x\in[-4,-3]$) $f(x)=-x-2$ (7)

2°) $x\in[-3,0]$

(2) $\Rightarrow$ $f(x)=||x+3-1|-2|$ $\Rightarrow$ $f(x)=||x+2|-2|$ (8)

x	$-3\leq x<-2$	$x=-2$	$-2<x\leq 0$
$x+2$	−	0	+

2°1) $x\in[-3,-2]$

(8) $\Rightarrow$ $f(x)=|-x-2-2|$ $\Rightarrow$ $f(x)=|-x-4|$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (zbog $-x-4<0$, $\forall x\in[-3,-2]$) $f(x)=x+4$ (9)

2°2) $x\in[-2,0]$

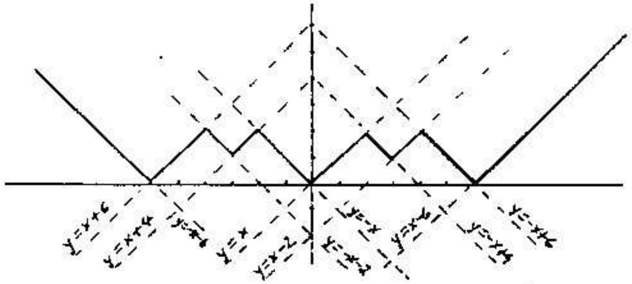
(8) $\Rightarrow$ $f(x)=|x+2-2|$ $\Rightarrow$ $f(x)=|x|$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (zbog $x\leq 0$, $\forall x\in[-2,0]$) $f(x)=-x$ (10)

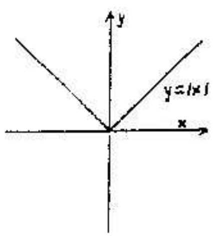
Iz (5),(6),(7),(9) i (10), uzevši u obzir parnost funkcije f, imamo

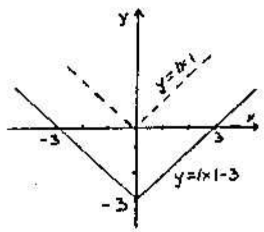
$$f(x)=\begin{cases}-x-6, & \text{za } x\in(-\infty,-6]\\ x+6, & \text{za } x\in[-6,-4]\\ -x-2, & \text{za } x\in[-4,-3]\\ x+4, & \text{za } x\in[-3,-2]\\ -x, & \text{za } x\in[-2,0]\\ x, & \text{za } x\in[0,2]\\ -x+4, & \text{za } x\in[2,3]\\ x-2, & \text{za } x\in[3,4]\\ -x+6, & \text{za } x\in[4,6]\\ x-6, & \text{za } x\in[6,\infty)\end{cases}$$

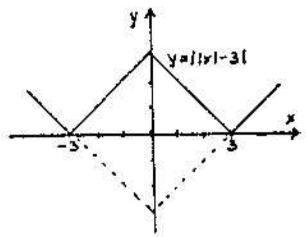
Graf ove funkcije izgleda ovako

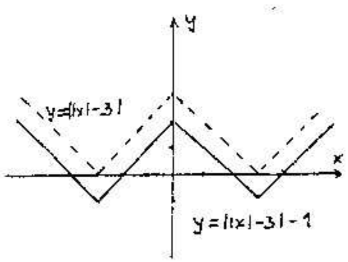


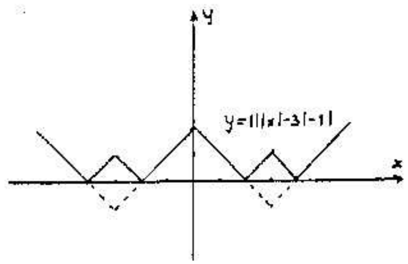
Drugi način (metoda razvoja grafa funkcije):

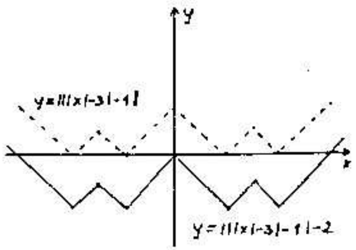


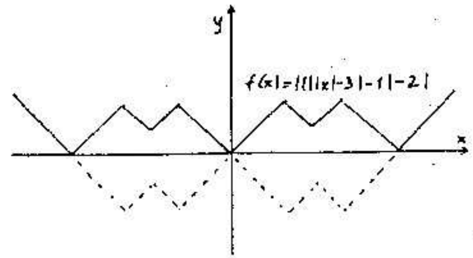












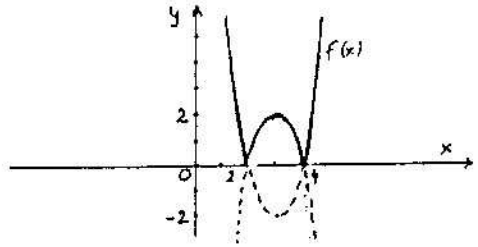
<u>Primjer 5</u>: Nacrtati graf funkcije $f:\ R\to R,\ f(x)=|2x^2-12x+16|$.

Rješenje:

$f(x)=|2x^2-12x+16|=|2(x^2-6x+8)|=2\cdot|(x-2)(x-4)|$

x	$-\infty<x<2$	x=2	$2<x<4$	x=4	$4<x<\infty$
x-2	-	0	+	+	+
x-4	-	-	-	0	+
(x-2)(x-4)	+	0	-	0	+

$$f(x)=\begin{cases}-(2x^2-12x+16)=-2x^2+12x-16, & \text{za } x\in[2,4]\\ 2x^2-12x+16, & \text{za } x\in(R\setminus(2,4))\end{cases}$$



<u>Napomena 4</u>: Uočite da graf funkcije $f(x)=|g(x)|$ nastaje od grafa funkcije $y=g(x)$ tako da negativan dio grafa funkcije $y=g(x)$ preslikamo osnosimetrično (zrcalimo) u odnosu na os x, dok nenegativni dio ostaje isti. Na taj način funkcija $f(x)=|g(x)|$ postaje nenegativna.

<u>Zadatak 6</u>: Dokažite N4.

<u>Primjer 6</u>: Nacrtati skup točaka (x,y) ravnine koje zadovoljavaju relaciju $|x|+|y|=1$.

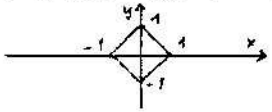
Rješenje:

$|x|+|y|=1$ (1)

1°) $x\geq 0,\ y\geq 0$

(1) $\Rightarrow$ $x+y=1$ $\Rightarrow$ $x/1+y/1=1$;

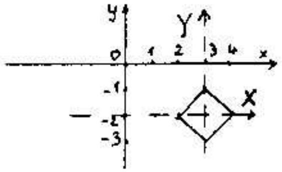
2°) $x \le 0,\ y \ge 0$
$(1) \Rightarrow -x+y=1 \Rightarrow x/(-1) + y/1 = 1;$
3°) $x \le 0,\ y \le 0$
$(1) \Rightarrow -x-y=1 \Rightarrow x/(-1) + y/(-1) = 1;$
4°) $x \ge 0,\ y \le 0$
$(1) \Rightarrow x-y=1 \Rightarrow x/1 + y/(-1) = 1.$



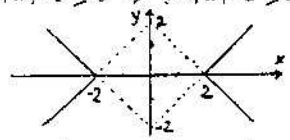
Zadatak smo mogli riješiti i ovako:
$|x|+|y|=1 \Rightarrow |y|=-|x|+1 \ge 0 \Rightarrow y=-|x|+1 \ge 0 \lor y=|x|-1 \le 0.$

Usporedite graf ove funkcije sa grafom kružnice $x^2+y^2=1^2$.

Primjer 7: Nacrtati skup točaka (x,y) ravnine koje zadovoljavaju relaciju $|x-3|+|y+2|=1$.
Rješenje:
Supstitucijom $X=x-3$, $Y=y+2$ (tj. $x=X+3$, $y=Y-2$) dobivamo $|X|+|Y|=1$.

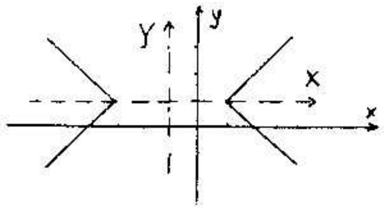


Primjer 8: Nacrtati skup točaka (x,y) ravnine koje zadovoljavaju relaciju $|x|-|y|=2$.
Rješenje:
$|x|-|y|=2 \Rightarrow |y|=|x|-2 \ge 0 \Rightarrow y=|x|-2 \ge 0 \quad y=-|x|+2 \le 0.$

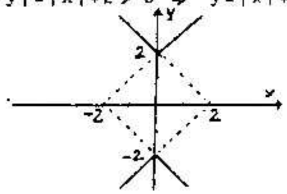


Riješite zadatak metodom razlikovanja slučajeva.
Usporedite graf ove relacije sa grafom jednakostrane hiperbole $x^2-y^2=2^2$.

Primjer 9: Nacrtati skup točaka (x,y) ravnine koje zadovoljavaju relaciju $|x+1|-|1-y|=2$.
Rješenje:
Supstitucijom $X=x-1$, $Y=y-1$ (tj. $x=X-1$, $y=Y+1$) dobivamo $|X|-|Y|=2$.

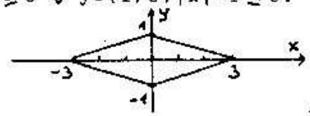


Primjer 10: Nacrtati skup točaka (x,y) ravnine koje zadovoljavaju relaciju $-|x|+|y|=2$.
Rješenje:
$-|x|+|y|=2 \Rightarrow |y|=|x|+2>0 \Rightarrow y=|x|+2>0 \lor y=-|x|-2<0.$



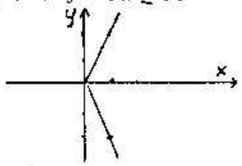
Usporedite ovaj graf sa graf⋯ jednakostrane hiperbole $-x^2+y^2=2^2$.

Primjer 11: Nacrtati skup točaka (x,y) ravnine koje zadovoljavaju relaciju $|x|+3|y|=3$.
Rješenje:
$|x|+3|y|=3 \Rightarrow |y|=(-1/3)|x|+1 \ge 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y=(-1/3)|x|+1 \ge 0 \lor y=(1/3)|x|-1 \le 0.$



Usporedite ovaj graf sa grafom elipse $x^2+3^2y^2=3^2$.

Primjer 12: Nacrtati skup točaka (x,y) ravnine koje zadovoljavaju relaciju $|y|=2x$.
Rješenje:
$|y|=2x \ge 0 \Rightarrow y=2x \ge 0 \lor y=-2x \le 0.$



Usporedite ovaj graf sa grafom parabole $y^2=2^2x$.

Primjer 13: Nacrtati skup točaka (x,y) ravnine koje zadovoljavaju relaciju $|x|+|y|+|x+y|=2$.

Rješenje:

$|x|+|y|+|x+y|=2 \quad (1)$

$1^\circ)$ $x \geq 0,\ y \geq 0$

$(1) \Rightarrow x+y+x+y=2 \Rightarrow x+y-1=0;$

$2^\circ)$ $x \leq 0,\ y \geq 0$

$2^\circ1)$ $x+y \geq 0$

$(1) \Rightarrow -x+y+x+y=2 \Rightarrow y=2;$

$2^\circ2)$ $x+y \leq 0$

$(1) \Rightarrow -x+y-x-y=2 \Rightarrow x=-1;$

$3^\circ)$ $x \leq 0,\ y \leq 0$

$(1) \Rightarrow -x-y-x-y=2 \Rightarrow x+y+1=0;$

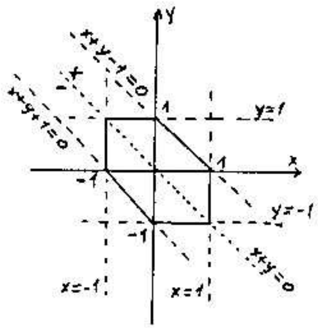
$4^\circ)$ $x \geq 0,\ y \leq 0$

$4^\circ1)$ $x+y \leq 0$

$(1) \Rightarrow x-y-x-y=2 \Rightarrow y=-1;$

$4^\circ2)$ $x+y \leq 0$

$(1) \Rightarrow x-y+x+y=2 \Rightarrow x=1.$

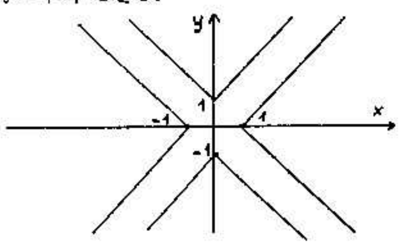


Primjer 14: Nacrtati skup točaka (x,y) ravnine koje zadovoljavaju relaciju $||x|-|y||=1$.

Rješenje:

$||x|-|y||=1 \Rightarrow |x|-|y|=\pm 1 \Rightarrow |y|=|x|\mp 1 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=|x|\mp 1 \geq 0 \vee y=-|x|\pm 1 \leq 0.$



Primjer 15: Nacrtati skup točaka (x,y) ravnine koje zadovoljavaju relaciju $|||x|-4|+|y|-4|=2$.

Rješenje:

Prvi način:

Očito je da je zadani skup točaka (x,y) osnosimetričan i u odnosu na os x i u odnosu na os y, pa je dovoljno promatrati na primjer $x \geq 0,\ y \geq 0$. Imamo

$|||x|-4|+|y|-4|=2 \quad (1)$

$x \geq 0,\ y \geq 0$

$||x-4|+y-4|=2 \quad (2)$

x	$0 \leq x < 4$	$x=4$	$4 < x < \infty$
$x-4$	$-$	0	$+$

$1^\circ)$ $x \in [0,4]$

$(2) \Rightarrow |-x+4+y-4|=2 \Rightarrow |-x+y|=2 \quad (3)$

$1^\circ1)$ $-x+y \leq 0$

$(3) \Rightarrow x-y=2 \Rightarrow x-y-2=0;$

$1^\circ2)$ $-x+y \geq 0$

$(3) \Rightarrow -x+y=2 \Rightarrow x-y+2=0;$

$2^\circ)$ $x \in [4,\infty)$

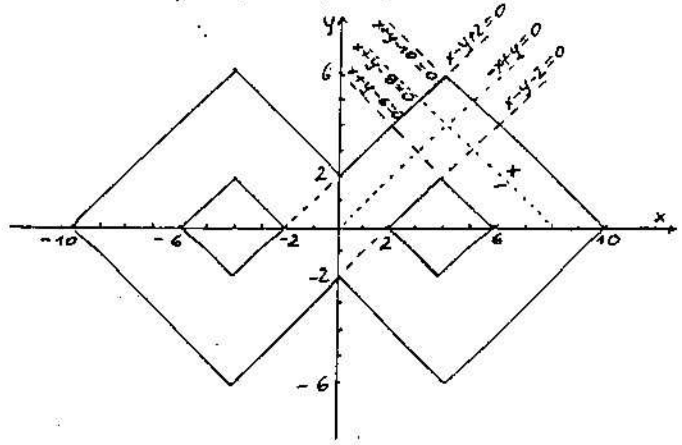
$(2) \Rightarrow |x-4+y-4|=2 \Rightarrow |x+y-8|=2 \quad (4)$

$2^\circ1)$ $x+y-8 \leq 0$

$(4) \Rightarrow -x-y+8=2 \Rightarrow x+y-6=0;$

$2^\circ2)$ $x+y-8 \geq 0$

$(4) \Rightarrow x+y-8=2 \Rightarrow x+y-10=0.$



Drugi način:

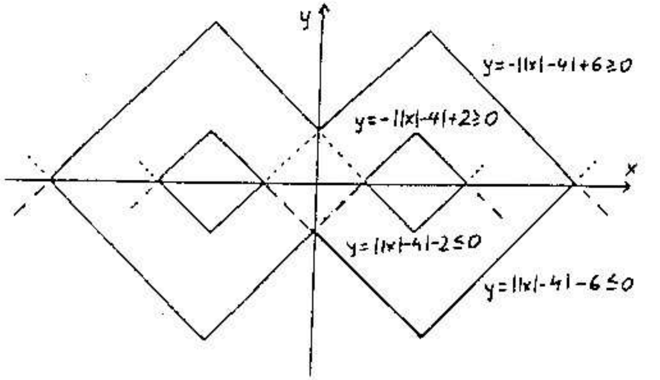
$|||x|-4|+|y|-4|=2 \Rightarrow ||x|-4|+|y|-4=\pm 2 \Rightarrow ||x|-4|+|y|=4\pm 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |y|=-||x|-4|+4\pm 2 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=-||x|-4|+4\pm 2 \geq 0 \vee y=||x|-4|-4\mp 2 \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=-||x|-4|+6 \geq 0 \vee y=-||x|-4|+2 \geq 0 \vee$

$\vee y=||x|-4|-6 \leq 0 \vee y=||x|-4|-2 \leq 0.$



Primjer 16: Riješiti jednadžbu $|x-3|+x=0,\ x\in R$.

Rješenje:

$|x-3|+x=0$ (1)

x	$-\infty<x<3$	$x=3$	$3<x<\infty$
x-3	-	0	+

1^o) $x\in(-\infty,3]$

(1) $\Rightarrow -(x-3)+x=0 \Rightarrow 0\cdot x=-3 \Rightarrow \emptyset$;

2^o) $x\in[3,\infty)$

(1) $\Rightarrow x-3+x=0 \Rightarrow x=3/2\notin[3,\infty) \Rightarrow \emptyset$.

Dakle, jednadžba nema rješenja.

Zadatak smo mogli riješiti i ovako:
Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku $|x-3|=-x$. Kako je lijeva strana posljednje jednakosti ≥ 0, tada je to i desna strana, tj. $-x\geq 0$, odnosno $x\leq 0$ (*).
Kvadriranjem jednadžbe $|x-3|=-x$ i sređivanjem dobivamo $x=3/2>0$, što je u kontradikciji sa (*).
Dakle, zadana jednadžba nema rješenja.

Primjer 17: Riješiti jednadžbu

$$2|x-3|-|1-2x|+|x+1|+x-4=0,\ x\in R.$$

Rješenje:
Prvi način (metoda razlikovanja slučajeva):
$2|x-3|+|1-2x|+|x+1|+x-4=0$ (1).
Razmotrit ćemo intervale $(-\infty,-1]$, $[-1,1/2]$, $[1/2,3]$ i $[3,\infty)$ (kao u primjeru 3). Imamo

1^o) $x\in(-\infty,-1]$

(1) $\Rightarrow -2(x-3)-(1-2x)-(x+1)+x-4=0 \Rightarrow 0\cdot x=0$ (neodređena jednadžba) $\Rightarrow x\in(-\infty,-1]$;

2^o) $x\in[-1,1/2]$

(1) $\Rightarrow -2(x-3)-(1-2x)+(x+1)+x-4=0 \Rightarrow x=-1\in[-1,1/2]$;

3^o) $x\in[1/2,3]$

(1) $\Rightarrow -2(x-3)+(1-2x)+(x+1)+x-4=0 \Rightarrow x=2\in[1/2,3]$;

4^o) $x\in[3,\infty)$

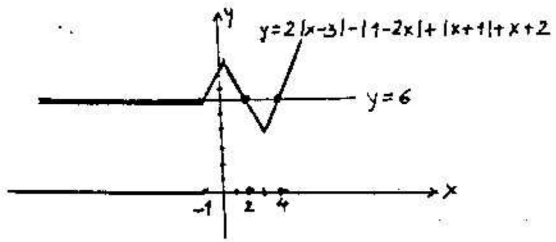
(1) $\Rightarrow 2(x-3)+(1-2x)+(x+1)+x-4=0 \Rightarrow x=4\in[3,\infty)$.

Rješenja jednadžbe su svi $x\in(-\infty,-1]\cup\{2;4\}$.

Drugi način (grafička metoda):
Jednadžbu (1) možemo pisati u obliku

$$2|x-3|-|1-2x|+|x+1|+x+2=6,\quad (2)$$

pa ćemo rješenja jednadžbe (2) grafički naći kao presjek grafova funkcija $y=2|x-3|-|1-2x|+|x+1|+x+2$ i $y=6$ (vidi primjer 3).



Očito je da je $x\in(-\infty,-1]\cup\{2;4\}$.

Primjer 18: Riješiti jednadžbu $|||||x|-3|-1|-2|=0,\ x\in R$.
Rješenje:
Grafički (vidi primjer 4) zadatak rješavamo kao presjek grafova funkcija $y=||||x|-3|-1|-2|$ i $y=0$. Izlazi $x\in\{-6;0;6\}$.
Riješite zadatak metodom razlikovanja slučajeva.

Primjer 19: Riješiti jednadžbu $\left|\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}\right|+|x-3|-5=0,\ x\in R$.

Rješenje:
Kako je $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ i $x^2-1=(x-1)(x+1)$, tada za $x\neq\pm1$ (nakon skraćivanja razlomka) zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku $|x+2|/|x+1|+|x-3|-5=0$. (1)

x	$-\infty<x<-2$	$x=-2$	$-2<x<-1$	$-1<x<1$	$1<x<3$	$x=3$	$3<x<\infty$
x+2	-	0	+	+	+	+	+
x+1	-	-	-	+	+	+	+
(x+2)/(x+1)	+	0	-	+	+	+	+
x-3	-	-	-	-	-	0	+

1°) $x \in (-\infty,-2] \cup (-1,1) \cup (1,3]$

(1) $\Rightarrow (x+2)/(x+1)-(x-3)-5=0 \Rightarrow x(x+2)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=0 \in (-\infty,-2] \cup (-1,1) \cup (1,3] \wedge$

$\wedge\, x_2=-2 \in (-\infty,-2] \cup (-1,1) \cup (1,3]$;

2°) $x \in [-2,-1)$

(1) $\Rightarrow -(x+2)/(x+1)-(x-3)-5=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow$

$x_{3,4}=-2 \in [-2,-1)$;

3°) $x \in [3,\infty)$

(1) $\Rightarrow (x+2)/(x+1)+(x-3)-5=0 \Rightarrow x^2-6x-6=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_5=3-\sqrt{15} \notin [3,\infty) \wedge x_6=3+\sqrt{15} \in [3,\infty)$.

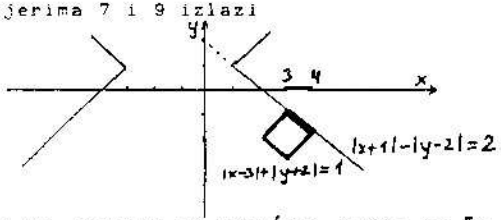
Dakle, rješenja zadane jednadžbe su $x \in \{-2;0;3+\sqrt{15}\}$.

Primjer 20: Riješite sustav jednadžbi

$$|x-3|+|y+2|=1,\ |x+1|-|1-y|=2,\ x,y \in R.$$

Rješenje:

Prema primjerima 7 i 9 izlazi



pa je rješenje zadatka $(x,y) \in \{(x,-x+2):\ x \in [3,4]\}$.

Riješite zadatak metodom razlikovanja slučajeva promatrajući intervale za x $(-\infty,-1]$, $[-1,3]$, $[3,\infty)$ i intervale za y $(-\infty,-2]$, $[-2,1]$, $[1,\infty)$ (ukupno $3\cdot 3=9$ slučajeva).

Primjer 21: Riješiti nejednadžbu $|x+2|+|3-x| \geq 0$, $x \in R$.

Rješenje:

x	$-\infty < x < -2$	$x=-2$	$-2<x<3$	$x=3$	$3<x<\infty$
x+2	−	0	+	+	+
3−x	+	+	+	0	−

$|x+2|+|3-x| \geq 0$ (1)

1°) $x \in (-\infty,-2]$ (2)

(1) $\Rightarrow -(x+2)-(3-x) \geq 0 \Rightarrow -5 \geq 0 \Rightarrow \emptyset$;

2°) $x \in [-2,3]$ (3)

(1) $\Rightarrow x+2-(3-x) \geq 0 \Rightarrow x \geq -1/2 \Rightarrow x \in [-1/2,\infty)$ (4)

(3) $\wedge$ (4) $\Rightarrow x \in [-1/2,3]$; (5)

3°) $x \in [3,\infty)$ (6)

(1) $\Rightarrow x+2+3-x \geq 0 \Rightarrow 5 \geq 0 \Rightarrow x \in R$ (7)

(6) $\wedge$ (7) $\Rightarrow x \in [3,\infty)$. (8)

(5) $\wedge$ (8) $\Rightarrow x \in [-1/2,3] \cup [3,\infty) \Rightarrow x \in [-1/2,\infty)$.

Riješite zadatak grafički uzimajući $f(x)=|x+2|+|3-x|$, $f(x) \geq 0$.

Primjer 22: Riješite nejednadžbu

$$2|x-3|-|1-2x|+|x+1|+x-4<0,\ x \in R.$$

Rješenje:

Zadana nejednadžba ekvivalentna je nejednadžbi

$2|x-3|-|1-2x|+|x-1|+x+2<6$, $x \in R$ (vidi primjere 3 i 17).

Zadatak ćemo riješiti grafičkom metodom uzimajući $f(x)=2|x-3|-|1-2x|+|x-1|+x+2$ i $f(x)<6$. Slijedi $x \in (2,4)$.

Riješite zadatak metodom razlikovanja slučajeva.

Primjer 23: Riješiti nejednadžbu

$$|x^2+5x+6|-|x-2|>|x^2+3x-4|,\ x \in R.$$

Rješenje:

Zadanu nejednadžbu možemo pisati u obliku

$|(x+2)(x+3)|-|x-2|-|(x-1)(x+4)|>0$, $x \in R$. (1)

x		−4		−3		−2		1		2	
x+2	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+
x+3	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+
x−1	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+
x+4	−	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
(x+2)(x−3)	+	+	+	0	−	+	+	+	+	+	+
x−2	−	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+
(x−1)(x+4)	+	0	−	−	−	−	−	0	+	+	+

1°) $x \in (-\infty,-4] \cup [1,2]$ (2)

(1) $\Rightarrow (x^2+5x+6)+(x-2)-(x^2+3x-4)>0 \Rightarrow x>-8/3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (-8/3,\infty)$ (3)

(2) $\wedge$ (3) $\Rightarrow x \in [1,2]$; (4)

2°) $x \in [-4,-3] \cup [-2,1]$ (5)

(1) $\Rightarrow (x^2+5x+6)+(x-2)+(x^2+3x-4)>0 \Rightarrow 2x^2+9x>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(2x+9)>0 \Rightarrow x \in (R \setminus [-9/2,0])$ (6)

(5) $\wedge$ (6) $\Rightarrow x \in (0,1]$; (7)

3°) $x \in [-3,-2]$ (8)

(1) $\Rightarrow -(x^2+5x+6)+(x-2)+(x^2+3x-4)>0 \Rightarrow x<-12 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (-\infty,-12)$ (9)

(8) $\wedge$ (9) $\Rightarrow \emptyset$;

4°) $x \in [2,\infty)$ (10)

(1) $\Rightarrow (x^2+5x+6)-(x-2)-(x^2+3x-4)>0 \Rightarrow x>-12 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (-12,\infty)$ (11)

(10) $\wedge$ (11) $\Rightarrow x \in [2,\infty)$. (12)

$(4) \wedge (7) \wedge (12) \Rightarrow x \in R^+$.

Primjer 24: Riješiti nejednadžbu $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| < 1, \quad x \in R.$

Rješenje:

$|(x^2-3x+2)/(x^2+3x+2)| < 1 \overset{(T4)}{\Rightarrow} -1 < (x^2-3x+2)/(x^2+3x+2) < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 < (x^2-3x+2)/(x^2+3x+2) \wedge (x^2-3x+2)/(x^2+3x+2) < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x^2+4)/(x^2+3x+2) > 0 \wedge (-6x)/(x^2+3x+2) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2+4)/(x+1)(x+2) > 0 \wedge x/(x+1)(x+2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)(x+2) > 0$ (zbog $x^2+4 > 0, \forall x \in R$) $\wedge\ x/(x+1)(x+2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)(x+2) > 0 \wedge x > 0$ (zbog $(x+1)(x+2) > 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x > 0$ (jer iz $x > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \wedge x+2 > 0 \Rightarrow (x+1)(x+2) > 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in R^+$.

Primjer 25: Riješiti nejednadžbu $\left|\dfrac{4^x-2^{x+1}-2}{2^x-4}\right| < 1, \ x \in R.$

Rješenje:

Supstitucijom $2^x = t$ slijedi

$|(t^2-2t-2)/(t-4)| < 1 \overset{(T4)}{\Rightarrow} -1 < (t^2-2t-2)/(t-4) < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 < (t^2-2t-2)/(t-4) \wedge (t^2-2t-2)/(t-4) < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (t-1)(t-2)/(t-4) < 0 \wedge (t-3)(t+2)/(t-4) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t \in (0,1) \cup (2,4) \wedge t \in (0,3) \cup (4,\infty) \Rightarrow t \in (0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x \in (0,1) \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$.

Primjer 26: Riješiti nejednadžbu

$$\sqrt{2^{x-2}+1} \geq |2^{x-1}-1| + 2^x \cdot \log_x \sqrt{x}, \ x \in R.$$

Rješenje:

Zbog $\log_x \sqrt{x} = 1/2$ zadanu nejednadžbu možemo pisati u obliku

$\sqrt{2^{x-2}+1} \geq |2^{x-1}-1| + 2^{x-1}$. (1)

Prema definiciji funkcije kvadratni korijen i logaritamske funkcije imamo $2^{x-2}+1 \geq 0$, $x \geq 0$, $x > 0$ i $x \neq 1$, odakle je $x \in (R^+ \setminus \{1\})$. (2)

Primjenimo sada metodu razlikovanja slučajeva. imamo

1^0) $x \in (0,1)$ (3)

(1) $\Rightarrow \sqrt{2^{x-2}+1} \geq -(2^{x-1}-1) + 2^{x-1} \Rightarrow \sqrt{2^{x-2}+1} \geq 1 > 0 \ |^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{x-2}+1 \geq 1 \Rightarrow 2^{x-2} \geq 0 \Rightarrow x \in R$ (4)

(3) $\wedge$ (4) $\Rightarrow x \in (0,1)$; (5)

2^0) $x \in (1, \infty)$ (6)

(1) $\Rightarrow \sqrt{2^{x-2}+1} \geq 2^{x-1} - 1 + 2^{x-1} \Rightarrow \sqrt{2^{x-2}+1} \geq 2 \cdot 2^{x-1} - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2^{x-2}+1} \geq 2^x - 1 > 0 \ |^2 \Rightarrow 2^{x-2}+1 \geq 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 \ |\cdot(-4) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x \leq 0 \ |: 2^x > 0 \Rightarrow 2^x \leq 9/4 \ |\log_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot \log_2 2 \leq 2 \cdot \log_2 3 - 2 \Rightarrow x \leq 2(\log_2 3 - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (-\infty, 2(\log_2 3 - 1))$ (7)

(6) $\wedge$ (7) $\Rightarrow x \in (1, 2(\log_2 3 - 1)]$. (8)

(5) $\wedge$ (8) $\Rightarrow x \in (0,1) \cup (1, 2(\log_2 3 - 1)]$.

Primjer 27: Dokazati jednakost

$$|(x+y)/2 - \sqrt{xy}| + |(x+y)/2 + \sqrt{xy}| = |x| + |y|, \forall x,y \in R, \ xy \geq 0.$$

Rješenje:

$xy \geq 0$ (*)

$(|(x+y)/2 - \sqrt{xy}| + |(x+y)/2 + \sqrt{xy}|)^2 =$

$= (|(1/2)(x+y-2\sqrt{xy})| + |(1/2)(x+y+2\sqrt{xy})|)^2 \overset{(T5)}{=}$

$\overset{(T5)}{=} (|1/2| \cdot |x+y-2\sqrt{xy}| + |1/2| \cdot |x+y-2\sqrt{xy}|)^2 =$

$= ((1/2)(|x+y-2\sqrt{xy}| + |x+y+2\sqrt{xy}|))^2 = (1/4)(|x+y-2\sqrt{xy}| + |x+y+2\sqrt{xy}|)^2$

$= (1/4)(|x+y-2\sqrt{xy}|^2 + |x+y+2\sqrt{xy}|^2 + 2|x+y-2\sqrt{xy}| \cdot |x+y+2\sqrt{xy}|) \overset{(K3,T5)}{=}$

$\overset{(K3,T5)}{=} (1/4)((x+y-2\sqrt{xy})^2 + (x+y+2\sqrt{xy})^2 + 2|(x+y-2\sqrt{xy})(x+y+2\sqrt{xy})|)$

$= (1/4)(2x^2+2y^2+12xy+2|x^2+y^2-2xy|) = (1/2)(x^2+y^2+6xy+|x-y|^2) \overset{(K3)}{=}$

$\overset{(K3)}{=} (1/2)(x^2+y^2+6xy+(x-y)^2) = (1/2)(2x^2+2y^2+4xy) = x^2+y^2+2xy \overset{(*)}{=}$

$\overset{(*)}{=} x^2+y^2+2|xy| \overset{(K3,T5)}{=} |x|^2+|y|^2+2|x| \cdot |y| = (|x|+|y|)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (|(x+y)/2 - \sqrt{xy}| + |(x+y)/2 + \sqrt{xy}|)^2 = (|x|+|y|)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow ||(x+y)/2 - \sqrt{xy}| + |(x+y)/2 + \sqrt{xy}|| = ||x|+|y|| \Rightarrow$

$\Rightarrow |(x+y)/2 - \sqrt{xy}| + |(x+y)/2 + \sqrt{xy}| = |x|+|y|$.

Primjer 28: Dokazati nejednakost

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq |x|+|y|+|z|, \forall x,y,z \in R.$$

Rješenje:

$|x|+|y|+|z| = ||x|+|y|+|z|| = \sqrt{(|x|+|y|+|z|)^2} =$

$= \sqrt{|x|^2+|y|^2+|z|^2+2(|x| \cdot |y| + |x| \cdot |z| + |y| \cdot |z|)} \geq$

$\geq \sqrt{|x|^2+|y|^2+|z|^2} \overset{(K3)}{=} \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, tj. vrijedi tvrdnja zadatka.

Primjer 29: Dokazati nejednakost

$$\frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|}, \ \forall x,y,z \in R.$$

Rješenje:

Prvo ćemo dokazati nejednakost

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}, \ \forall x,y \in R. \quad (*)$$

Imamo

$|x|/(1+|x|)+|y|/(1+|y|) \geq |x|/(1+|x|+|y|)+|y|/(1+|x|+|y|)=$

$=(|x|+|y|)/(1+|x|+|y|) \overset{(T1)}{\geq} |x+y|/(1+|x|+|y|)$.

Sada slijedi

$|x|/(1+|x|)+|y|/(1+|y|)+|z|/(1+|z|) \overset{(*)}{\geq} |x+y|/(1+|x+y|)+$

$+|z|/(1+|z|) \overset{(*)}{\geq} |x+y+z|/(1+|x+y+z|)$, tj. vrijedi tvrdnja zadatka.

<u>Primjer 30</u>: Neka su $a,b,c \in R$ i $x \in [-1,1]$. Dokazati da iz $|ax^2+bx+c| \leq 1$ slijedi $|cx^2+bx+a| \leq 2$.

Rješenje:

Označimo sa $f(x)=ax^2+bx+c$ i $g(x)=cx^2+bx+a$. Tada je $|f(x)| \leq 1$ za $x \in [-1,1]$, pa je i $|f(1)| \leq 1$, $|f(-1)| \leq 1$, $|f(0)| \leq 1$, tj.

$$|a+b+c| \leq 1, \quad (1)$$
$$|a-b+c| \leq 1, \quad (2)$$
$$|c| \leq 1. \quad (3)$$

Iz (1) i (2) je $|a+c|+|b| \leq 1$. (4)

Sada je

$|g(x)|=|cx^2+bx+a|=|c(x^2-1)+bx+c+a| \overset{(T1)}{\leq} |c(x^2-1)|+|bx+c+a| \overset{(T1)}{\leq}$

$|c(x^2-1)|+|bx|+|c+a| \overset{(T5)}{=} |c|\cdot|x^2-1|+|b|\cdot|x|+|c+a| \leq$

$\leq |c|\cdot 1+|b|\cdot 1+|c+a|$ (zbog $x \in [-1,1]$) $\overset{(3)}{\leq} 1+|b|+|c+a| \overset{(4)}{\leq} 1+1=2$,

$|g(x)| \leq 2$.

<u>Napomena 5</u>: Kao i na skupu realnih brojeva R, sada se može definirati funkcija apsolutna vrijednost i na skupu kompleksnih brojeva C

$$|\ |: C \rightarrow R_0^+, \ z=x+iy \ (x,y \in R) \mapsto |z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Za $z=x+0i=x \in R$ dobivamo $|z|=\sqrt{x^2+0^2}=\sqrt{x^2}=|x|$, što se podudara sa definicijom funkcije apsolutna vrijednost na skupu R. U daljnju teoriju apsolutne vrijednosti kompleksnog broja nećemo ulaziti.

<u>ZADACI ZA VJEŽBU</u>:

1. Za koju vrijednost $a \in R$ ima jednadžba $1-||x-1|-3|=a$ točno 3 rješenja ?
(Uputa: Nacrtati graf funkcije $f(x)=1-||x-1|-3|$ i vidjeti koji pravac $g(x)=a$ siječe graf $f(x)$ u 3 točke.
Rješenje: $a=-2$).

2. Nacrtati graf relacije $||x-1|-1|=|y+1|$, $x,y \in R$.
3. Nacrtati graf relacije $x|x|+y|y|=1$, $x,y \in R$.
4) Riješiti jednadžbu $(|2-x|-|2x-3|+4x+1)/|x+4|=1$, $x \in R$.
(Rješenje: $x \in [3/2,2]$).
5. Riješiti jednadžbu $|x^2-7x+10|-|x-3|=6$, $x \in R$.
(Rješenje: $x_1=3-2\sqrt{2}$, $x_2=7$).
6. Riješiti jednadžbu $|||x|-2|-1|-2|=2$, $x \in R$.
(Rješenje: $x \in \{-7,-3,-1,1,3,7\}$).
7) Riješiti sustav jednadžbi $|x-y|=2$, $|x|+|y|=4$, $x,y \in R$.
(Rješenje: $(x,y) \in \{(-3,-1),(-1,-3),(1,3),(3,1)\}$).
8) Riješiti sustav nejednadžbi $|x-1|+|x-2| < 2$,
$|x+1|+|2x+3| > 4$, $x \in R$.
(Rješenje: $x \in (1/2,5/2)$).
9) Riješiti nejednadžbu $|\sqrt{x-3}-1|+|\sqrt{x+5}-1| > 2$, $x \in R$.
(Rješenje: $x \in [3,4) \cup (4,\infty)$).
10) Dokazati jednakost $|x+y|+|x-y|=2\cdot\mathrm{Max}\{|x|,|y|\}$, $\forall x,y \in R$.
11) Dokazati nejednakost $|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}| \leq \sqrt{|x-y|}$, $\forall x,y \in R$.
12) Dokazati nejednakost $|a|+|b|+|c|+|a+b+c| \geq |a+b|+|b+c|+|c+a|$, $\forall a,b,c \in R$.

L I T E R A T U R A

[1] B. Pavković - D. Veljan: Matematika 1 - zbirka zadataka (Školska knjiga Zagreb, 1992.);
[2] B. Dakić: Matematika 2 - zbirka zadataka (Školska knjiga Zagreb, 1992.);
[3] P. Javor: Uvod u matematičku analizu (Školska knjiga Zagreb, 1990.);
[4] Zadaci sa natjecanja i prijemnih ispita.
[5] Matematičko-fizički list (Hrvatsko matematičko društvo Zagreb);
[6] L. Čeliković: Jednadžbe - nestandardni zadaci za mlade matematičare (Društvo mladih matematičara "Pitagora" B. Manastir, 1988.);
[7] Középiskolai matematikai és fizikai lapok (A Bolyai János matematikai társulat és az Eötvös Loránd társulat folyóirata, Budapest).