Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** na dozvoli da skeniram sažetak predavanja
"Gauss-Jordanova metoda eliminacije s primjenom na raspravu (diskusiju) rješenja višelinearnih sustava jednadžaba"
i objavim na svojim web stranicama.

Isprintajte materijal obostrano, te presavinite papir.

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

3°1. a = 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -y + 1 \\ z = 0 \\ y \ \ R \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -t + 1 \\ y = t \\ z = 0 \\ t \in R \end{array}\right. \text{, tj. } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \in R.$$

3°2. a ≠ 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \ (\neq 0) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \emptyset \text{ (druga jednadžba je nemoguća).}$$

4° b = a = 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{I.+II.} \\ \text{II.:(-2)} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -y \\ z = 1/2 \\ y \ \ R \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -t \\ y = t \\ z = 1/2 \\ t \in R \end{array}\right. \text{, tj.}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \ t \in R.$$

Napomena 2. Ukoliko su učenici upoznati sa metodom determinanata rješavanja sustava linearnih jednadžaba, zbog uočavanja svih slučajeva, preporučuje se učenicima raspraviti (diskutirati) rješenja ovog sustava u kombinaciji sa metodom determinanata (u slučaju jednakog broja jednadžaba i nepoznanica). Prednost metode determinanata je u tome što se primjenom Cramerova pravila preciznije uočavaju svi mogući slučajevi višelinearnog sustava jednadžaba (moguć, neodređen i nemoguć sustav), no veliki je nedostatak metode determinanata što samo otkriva kada je sustav neodređen, dok ne daje eksplicitno sva njegova rješenja. Također se može primijeniti samo kada je broj nepoznanica jednak broju jednadžaba. Pri tome treba imati na umu da se vrlo lako rješavaju determinante drugoga reda i Sarusovim pravilom determinante trećega reda, dok rješavanje determinanti četvrtog i viših redova zadaje dosta posla.
U prethodnom primjeru je glavna determinanta bila D=(a-b)(2-a), a sporedne determinante D(x)=(2-a)(1-b), D(y)=(2-a)(a-1) i D(z)=0, pa iz x=D(x)/D, y=D(y)/D i z=D(z)/D lako raspravimo (diskutiramo) rješenja zadanog sustava jednadžaba.

ZADACI ZA VJEŽBU:

Zadatak 1. Riješiti sustav jednadžaba x-2y+z-u1, x+y-2z+2u=2, 2x-y-z+u=3, x+4y-5z+5u=3, x,y,z,u R.
(R: x=v-w+5/3, y=v-w+1/3, z=v, u=w, v,w∈R).

Zadatak 2. U ovisnosti od parametra a R raspraviti (diskutirati) rješenja sustava jednadžaba ax+y+z+u=1, x+ay+z+u=1, x+y+az+u=a, x+y+z+au=a, x,y,z,u R.
(R: Za a∈R\{-3;1} sustav jednadžaba je moguć, a rješenje mu je x=-1/(a+3), y=-1/(a+3), z=(a+2)/(a+3), u=(a+2)/(a+3); za a=1 sustav jednadžaba je neodređen, a rješenja su mu x=1-p-q-r, y=p, z=q, u=r, p,q,r∈R; dok je za a=-3 sustav jednadžaba nemoguć (nema rješenja)).

Luka Čeliković, prof.

GAUSS-JORDANOVA METODA ELIMINACIJE S PRIMJENOM NA RASPRAVU (DISKUSIJU) RJEŠENJA VIŠELINEARNIH SUSTAVA JEDNADŽABA

U ovom izlaganju prvo ćemo se upoznati sa Gauss-Jordanovom metodom eliminacije rješavanja višelinearnih sustava jednadžaba. Zbog jednostavnosti pisanja rabit ćemo tzv. matrični oblik sustava jednadžaba, pri čemu će svaki redak matrice zapravo predstavljati jednu jednadžbu. Pošto sa jednadžbama možemo vršiti elementarne transformacije (zamjena mjesta dviju ili više jednadžaba, pomnožiti (podijeliti) jednadžbu bilo kojim brojem različitim od nule, dodati (oduzeti) jednadžbi bilo koju drugu jednadžbu pomnoženu bilo kojim brojem različitim od nule, dodati (oduzeti) jednadžbi linearnu kombinaciju ostalih jednadžaba), to isto možemo činiti i sa recima matrice.

U drugom dijelu izlaganja primijenit ćemo ovu metodu na raspravu (diskusiju) rješenja sustava linearnih jednadžaba.

Primjer 1. Riješiti sustav jednadžaba x+2y-z=2, x-y+2z=5, 2x+y-2z=-2, x,y,z R.
Rješenje:
Ovom sustavu jednadžaba pridružit ćemo tzv. proširenu matricu

$$A \text{ pr.} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right] \quad \text{matrice sustava } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad \text{Imamo}$$

$$\begin{array}{l} x+2y-z=2 \\ x-y+2z=5 \ /\text{II.-I.} \\ 2x+y-2z=-2 \ /\text{III.-2 I.} \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{II.-I.} \\ \text{III.-2 I.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+2y-z=2 \\ -3y+3z=3 \ /:(-3) \\ -3y=-6 \ /:(-3) \end{array} \qquad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{II.:(-3)} \\ \text{III.:(\_3)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+2y-z=2 \\ y-z=-1 \ /\text{-II.+III.} \\ y=2 \end{array} \qquad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{-II.+III.} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+2y-z=2 \ /\text{I.-2 II.+III.} \\ y=2 \\ z=3 \end{array} \qquad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{I.-2 II.+III.} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{array} \qquad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{array}} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Primjer 2. Riješiti sustav jednadžaba x+y-z=1, x+2y+2z=2, 2x+3y+z=3, x,y,z R.
Rješenje:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{II.-I} \\ \text{III.-I.-II.} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{I.-II.} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x \quad -4z=0 \\ y+3z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=4z \\ y=-3z+1 \\ z\in R \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} x=4t \\ y=-3t+1 \\ z=t \\ t\in R \end{matrix}\right. ,\ \text{tj.} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ t\in R.$$

Primjer 3. Riješiti sustav jednadžaba $x+y-z=1$, $x+2y+2z=2$, $2x+3y+z=4$, x,y,z R.

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \text{II.-I.} \\ \text{III.-I.-II.} \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Sustav jednadžaba je nemoguć (nema rješenja) jer je negoguća treća jednadžba (0=1).

Napomena 1. Učenike koji su upoznati sa pojmom ranga matrice podsjećamo da se rasprava (diskusija) rješenja sustava linearnih jednadžaba čini ovako:

- sustav je određen (ima jedinstveno rješenje) akko je rang A = rang Apr = broj nepoznanica;
- sustav je neodređen (ima beskonačno mnogo rješenja) akko je rang A = rang Apr < broj nepoznanica;
- sustav je nemoguć (nema rješenja) akko je rang A < rang Apr.

U našim primjerima smo imali:

- u primjeru 1: rA = rApr = n (broj nepoznanica) = 3;
- u primjeru 2: rA = rApr =2 < 3 = n (broj nepoznanica);
- u primjeru 3: rA =2 < 3 = rApr.

Primjer 4. U ovisnosti od parametra $k\in R$ raspraviti (diskutirati) rješenja suatava jednadžaba $x+y+kz=2$, $x+ky+z=-1$, $kx+y+z=-1$, $x,y,z\in R$.

Rješenje:

Apr $\sim$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 1 & k & 1 & -1 \\ k & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \text{II.-I.} \\ \text{III.-k I.} \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & k-1 & 1-k & -3 \\ 0 & 1-k & (1-k)(1+k) & -1-2k \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \text{III.+II.} \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & k-1 & 1-k & -3 \\ 0 & 0 & (1-k)(2+k) & -2(2+k) \end{array}\right].$$

1° $k\in R\setminus\{-2;1\}$

$$\text{Apr}\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & k-1 & 1-k & -3 \\ 0 & 0 & (1-k)(2+k) & -2(2+k) \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \text{II.:(k-1)} \\ \text{III.:(1-k)(2+k)} \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3/(1-k) \\ 0 & 0 & 1 & -2/(1-k) \end{array}\right] \begin{matrix} \text{I.-k III.} \\ \text{II.+III.} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2/(1-k) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(1-k) \\ 0 & 0 & 1 & -2/(1-k) \end{array}\right] \begin{matrix} \text{I.-II.} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/(1-k) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(1-k) \\ 0 & 0 & 1 & -2/(1-k) \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(1-k) \\ 1/(1-k) \\ -2/(1-k) \end{bmatrix},\ \text{tj.} \left\{\begin{matrix} x=1/(1-k) \\ y=1/(1-k) \\ z=-2/(1-k) \end{matrix}\right. .\quad (*)$$

2° $k=-2$

$$\text{Apr}\sim\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \text{II.:(-3)} \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \text{I.-II.} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x \quad -z=1 \\ y-z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=z+1 \\ y=z+1 \\ z \quad R \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=t+1 \\ y=t+1 \\ z=t \\ t\in R \end{matrix}\right. ,\ \text{tj.} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ t\in R.\quad (**)$$

3° $k=1$

$$\text{Apr}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right] \Rightarrow \emptyset.\quad (***)$$

Dakle, za $k\in R\setminus\{-2;1\}$ sustav jednadžaba je određen, a rješenje mu je dano sa (*); za k=-2 sustav je neodređen, a rješenja su mu dana sa (**); dok je za k=-1 sustav jednadžaba nemoguć (nema rješenja).

Primjer 5. U ovisnosti od parametara $a,b\in R$ raspraviti (diskutirati) rješenja sustava jednadžaba $ax+by+az=1$, $x+y+az=1$, $x+y+2z=1$, $x,y,z\in R$.

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & a & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ a & b & a & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \text{II.-a I.} \\ \text{III.:(a-2)} \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & b-a & -a & 1-a \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{array}\right].$$

1° $b\neq a\neq 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & b-a & -a & 1-a \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \text{II.:(b-a)} \\ \text{III.-I.} \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a/(a-b) & (a-1)/(a-b) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \text{I.-2 III.} \\ \text{II.+(a/(b-a)) III.} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & (a-1)/(a-b) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \text{I.-II.} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (1-b)/(a-b) \\ 0 & 1 & 0 & (a-1)/(a-b) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=(1-b)/(a-b) \\ y=(a-1)/(a-b) \\ z=0 \end{matrix}\right. ,\ \text{tj.} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-b)/(a-b) \\ (a-1)/(a-b) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2° $b\neq a=2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & b-2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \text{II.:(b-2)} \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2/(b-2) & -1/(b-2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \text{I.-II.} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2(b-1)/(b-2) & (b-1)/(b-2) \\ 0 & 1 & -2/(b-2) & -1/(b-2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=(-2(b-1)/(b-2))z+(b-1)/(b-2) \\ y=(2/(b-2))z-1/(b-2) \\ z\in R \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=(-2(b-1)/(b-2))\,t+(b-1)/(b-2) \\ y=(2/(b-2))\,t-1/(b-2) \\ z=t \\ t\in R \end{matrix}\right. ,\ \text{tj.}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(b-1)/(b-2) \\ 2/(b-2) \\ 1 \end{bmatrix}\cdot t + \begin{bmatrix} (b-1)/(b-2) \\ -1/(b-2) \\ 0 \end{bmatrix},\ t\in R.$$

3° $b=a\neq 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -a & 1-a \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \text{II.:(a-2)} \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -a & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \text{I.-2 III.} \\ \text{II.+a III.} \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$