Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** na dozvoli
da skeniram sažetak predavanja "Geometrijske konstrukcije trokuta"
i objavim na svojim web stranicama.

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

Luka Čeliković, prof.

GEOMETRIJSKE KONSTRUKCIJE TROKUTA

Pod geometrijskom konstrukcijom neke zadaće podrazumijevat ćemo njenu konstrukciju pomoću ravnala i šestara. Međutim, svaka konstrukcija izvodljiva ravnalom i šestarom, jednostavnije se može izvesti pomoću dva trokuta i šestara, što se u praksi najčešće i čini.

Može se pokazati da svaka geometrijska konstrukcija izvodljiva ravnalom i šestarom, izvodljiva je i samo šestarom (tzv. Mohr[1] -Masheroni[2]-jeve konstrukcije).

Svaka geometrijska konstrukcija izvodljiva ravnalom i šestarom, nije izvodljiva samo ravnalom.

Međutim, ako je u ravnini dana (nacrtana) jedna kružnica sa njenim središtem, tada je to moguće

(tzv. Poncelet[3]-Steiner[4]-ove konstrukcije).

Uobičajeno, konstruktivnu zadaću rješavamo u 4 koraka:

1° Raščlamba (analiza) konstrukcije zadaće,
2° Konstrukcija zadaće,
3° Dokaz ispravnosti konstrukcije zadaće,
4° Rasprava (diskusija) rješenja zadaće.

U praksi se često spajaju 1° i 3°.

Postoje različite metode rješavanja konstruktivnih zadaća:

1. **Metoda presjeka skupova (geometrijskih mjesta) točaka**
2. **Metode geometrijskih transformacija**
   - **2.1 Metode izometrija**
     - **2.1.1 Metoda translacije**
     - **2.1.2 Metoda rotacije**
     - **2.1.3 Metoda osne simetrije**
     - **2.1.4 Metoda centralne simetrije**
   - **2.2. Metoda sličnosti**
     - **2.2.1. Metoda homotetije**
   - **2.3. Metoda inverzije**
3. **Algebarska metoda**

U ovom izlaganju ograničit ćemo se samo na geometrijske konstrukcije trokuta primjenom nekih od spomenutih metoda.

Pod osnovnim (temeljnim) konstrukcijama trokuta podrazumijevamo konstrukcije trokuta komu je zadano:

- duljine sve tri stranice,
- duljine dviju stranica i veličina kuta između njih,
- duljina jedne stranice i veličine dva kuta uz tu stranicu,
- duljine dviju stranica i veličina kuta nasuprot većoj od tih stranica

Promotrimo sada sljedeće zadatke i primjere

__Zadatak 1.__ Konstruirati trokut ABC komu je zadano:

a) $|BC| = a = 3$ cm, $|CA| = b = 4$ cm, $|AB| = c = 5$ cm,
b) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 8$ cm,
c) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 7$ cm,
d) $b = 4$ cm, $c = 5$ cm, $\measuredangle CAB = \alpha = 30°$
e) $a = 3$ cm, $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$
f) $a = 3$ cm, $\beta = 120°$, $\gamma = 75°$
g) $a = 3$ cm, $\beta = 120°$, $\gamma = 60°$,
h) $a = 3$ cm, $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$
i) $a = 4$ cm, $c = 6$ cm, $\gamma = 60°$

(1) Georg Mohr (1640.-1697.), danski matematičar
(2) Lorenzo Masheroni (1750.-1800.), talijanski matematičar
(3) Jean Victor Poncelet (1788.-1867.), francuski matematičar
(4) Jakob Steiner (1796.-1862.), njemački matematičar

Zadatak 2. Konstruirati trokut ABC komu je zadano:

a) a, b, c,
b) b, c, α,
c) a, β, γ,
d) $a, c\ (a<c), \gamma$.

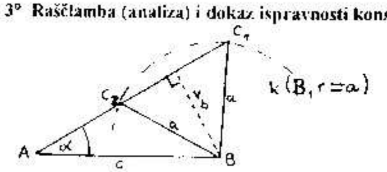
Zadatak 3. Konstruirati trokut ABC komu je zadano:

a) $a = 4$ cm, $c = 6$ cm, $\alpha = 30°$,
b) $a = 3$ cm, $c = 6$ cm, $\alpha = 30°$,
c) $a = 2$ cm, $c = 6$ cm, $\alpha = 30°$

Primjer 1. Konstruirati trokut ABC komu su zadane duljine dviju stranica i veličina kuta nasuprot manjoj od tih stranica (na primjer, $a, c\ (a<c), \alpha$).

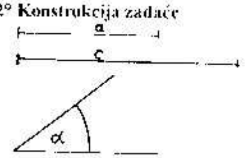
Rješenje:

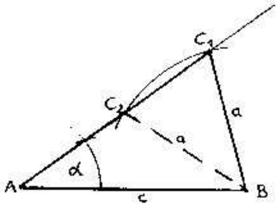
1° i 3° Raščlamba (analiza) i dokaz ispravnosti konstrukcije zadaće



Opišite tijek konstrukcije i izvršite njen dokaz !
(Pripomena: $a<c \Rightarrow \alpha<\gamma \Rightarrow \alpha<90°$)

2° Konstrukcija zadaće





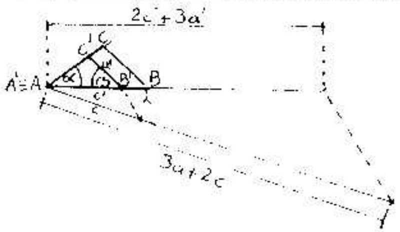
4° Rasprava (diskusija) rješenja zadaće
$a<c$ i $\alpha<90°$
1. $a > v_b \Rightarrow$ postoje dva rješenja
2. $a = v_b \Rightarrow$ postoji jedno rješenje
3. $a < v_b \Rightarrow$ nema rješenja.

Pripomena za srednjoškolce: $v_b = c \sin\alpha$

Zadatak 4. Konstruirati trokut ABC komu je zadano c, α, v_c.

Primjer 2. Konstruirati trokut ABC komu je zadano: $\alpha, \beta, 3a+2c$
Rješenje:

1° i 3° Raščlamba (analiza) i dokaz ispravnosti konstrukcije zadaće



Prvo konstruiramo pomoćni trokut $A'B'C'$ (poznato α i β). Zatim na polupravcu AB nanesemo dužinu duljine $3a'+2c'$. Poznavajući $3a+2c$ (zadano je), pomoću Talesovog poučka o pramenu pravaca (sličnost trokuta) konstruiramo dužinu duljine c. Na zraci $A'B'$ odredimo točke A i B tako da je $A = A'$ i $|AB| = c$, a na zraci $A'C'$ točku C tako da je $BC \| B'C'$. Zbog $BC \| B'C'$ je $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C' = \beta$ (kutovi sa paralelnim kracima), pa je $\triangle ABC$ traženi trokut.

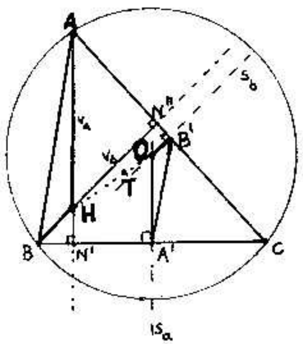
2° Konstrukcija zadaće
Izvršite konstrukciju trokuta !

4° Rasprava (diskusija) rješenja zadaće
Zadaća ima jedinstveno rješenje za $\alpha + \beta < 180°$.

Zadatak 5. Konstruirati trokut ABC komu je zadano: $a+b+c, \alpha, \beta$.

Primjer3. Konstruirati trokut ABC komu su zadani položaji vrha A, ortocentra H i središta O opisane kružnice.
Rješenje:

1° i 3° Raščlamba (analiza) i dokaz ispravnosti konstrukcije zadaće



Neka je H ortocentar, a O središte opisane kružnice k $\triangle ABC$ i neka su redom A' i B' središta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$, a N' i N'' nožišta visina iz vrhova A i B. Tada je $AN' \| s_a$ i $BN'' \| s_b$ (zbog $AN', s_a \perp BC$ i $BN'', s_b \perp CA$) i $A'B' \| AB$ (svojstvo srednjice $\overline{A'B'}$ trokuta ABC), pa su trokuti HAB i $OA'B'$ slični.
Kako je $|AB| = 2\,|A'B'|$ (svojstvo srednjice trokuta), tada je $|AH| = 2\,|OA'|$.
(Pokažite da se trokut HAB homotetijom preslika u trokut $OA'B'$, pri čemu je težište T trokuta ABC centar, a $k = -1/2$ koeficijent te homotetije !)

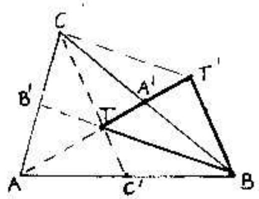
Neka su dani položaji točaka A, H, O. Konstruiramo prvo trokutu ABC opisanu kružnicu $k(O, r = |OA|)$. Zatim konstruiramo s_a, $s_a \| AH$, $O \in s_a$, te nađemo točku A', $A' \in s_a$, $|OA'| = (1/2)\cdot|AH|$. Sjecišta pravca koji prolazi točkom A' okomito na pravac s_a sa kružnicom k su vrhovi B i C trokuta ABC.

2° Konstrukcija zadaće
Konstruirajte trokut !

4° Rasprava (diskusija) rješenja zadaće
Izvršite raspravu rješenja zadaće !

Primjer 4. Konstruirati trokut komu su zadane duljine t_a, t_b, t_c sve tri težišnice.
Rješenje:

1° i 3° Raščlamba (analiza) i dokaz ispravnosti konstrukcije zadaće

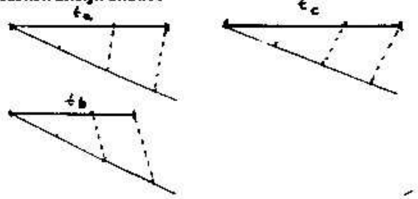


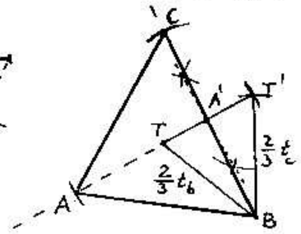
Neka je ABC traženi trokut, A', B', C' redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ i T težište tog trokuta (sjecište težišnica $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$). Neka je nadalje T' centralnosimetrična točka točki T u odnosu na centar A'. Tada je $|TA'| = |A'T'| = (1/3)t_a$ (težište trokuta dijeli težišnicu u omjeru 2:1, računajući od vrha trokuta), tj. $|TT'| = (2/3)t_a$. Nadalje je $|BT| = (2/3)t_b$ i $|T'B| = 2\cdot|TC'| = (2/3)t_c$ ($\overline{TC'}$ je srednjica trokuta ABT')

Prvo konstruiramo trokut $BT'T$ (poznato: $|T'T| = (2/3)t_a$, $|TB| = (2/3)t_b$, $|BT'| = (2/3)t_c$) i nađemo središte A' stranice $\overline{T'T}$. Zatim dobivamo redom:

- vrh C trokuta ABC kao centralnosimetričnu sliku točke B u odnosu na centar simetrije A',
- vrh A trokuta ABC kao centralnosimetričnu sliku točke T' u odnosu na centar simetrije T.

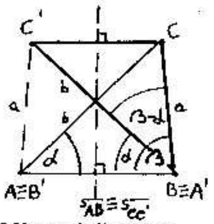
2°Konstrukcija zadaće





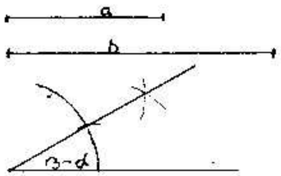
4°Rasprava (diskusija) rješenja zadaće
Pod uvjetom da je zbroj duljina dviju težišnica veći od duljine treće težišnice, postoji jedinstveno rješenje.

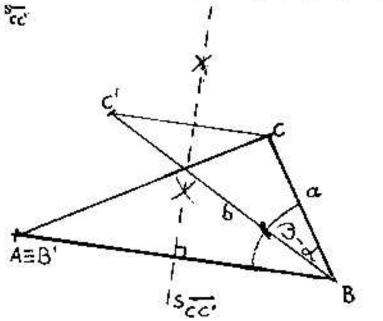
<u>**Primjer 5.**</u>Konstruirati trokut ABC komu je zadano: a, b, β-α. (Specijalno: a = 3 cm, b = 5 cm, β-α = 30°).
Rješenje:
1° i 3° Raščlamba (analiza) i dokaz ispravnosti konstrukcije zadaće



Osnom simetrijom obzirom na simetralu $s_{\overline{AB}}$ stranice $\overline{AB}$ trokut ABC preslika se u trokut A'B'C', pri čemu je A' ≡ B, B' ≡ A i ∢C'BC = β-α.
Prvo konstruiramo trokut BCC' (poznato je: |BC| = a, |BC'| = b i ∢C'BC = β-α, pa je trokut BCC' po poučku SKS o sukladnosti trokuta jednoznačno određen).
Zatim nađemo simetralu $s_{\overline{CC'}}$ stranice $\overline{CC'}$. Vrh A trokuta ABC dobivamo kao osnosimetričnu sliku vrha B u odnosu na os simetrije $s_{\overline{CC'}}$.

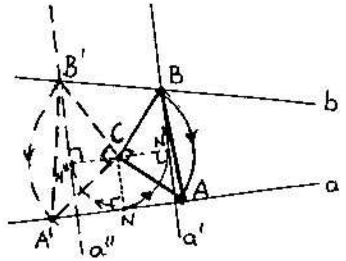
2° Konstrukcija zadaće





4° Rasprava (diskusija) rješenja zadaće
Za b>a postoji jedinstveno rješenje

<u>**Primjer 6.**</u> Dana su dva neparalelna pravca a i b i točka C koja im ne pripada. Konstruirati jednakokračan pravokutan trokut ABC komu vrh pravog kuta leži u točki C, a svaki od preostala dva vrha leže na po jednom od danih pravaca.
Rješenje:
1° i 3° Raščlamba (analiza) i dokaz ispravnosti konstrukcije zadaće
Rotacijom pravca a oko točke C za 90° dobivamo pravac a'. Presjek a'∩b = B je drugi vrh traženog trokuta ABC. Kako je B∈a', to će točka A, dobivena inverznom rotacijom (oko C za -90°) točke B, biti na pravcu a i za nju će vrijediti |CA| = |CB| (rotacija je izometrija), te će na taj način predstavljati treći vrh jednakokračnog pravokutnog trokuta ABC



Drugo rješenje se dobiva rotacijom pravca a oko C za -90°.
Pošto je pravac određen sa svoje dvije točke, da dobijemo pravac a', dovoljno je rotirati dvije točke, M i N, pravca a.

2° Konstrukcija zadaće
Izvršite konstrukciju trokuta.

4° Rasprava (diskusija) rješenja zadaće
1. a ∦ b ⇒ postoje dva rješenja
2. a ⊥ b
   2.1. $C \in s_{\angle(a,b)}$ (a' ≡ b) ⇒ postoji beskonačno mnogo rješenja
   2.2. $C \notin s_{\angle(a,b)}$ (a'∩b = ∅) ⇒ nema rješenja

<u>**Zadatak 6.**</u> Konstruirati jednakostraničan trokut ABC kojemu po jedan vrh leži na tri dana paralelna pravca.

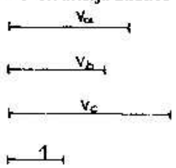
<u>**Primjer 7.**</u> Konstruirati trokut komu su dane duljine svih triju visina: v_a, v_b, v_c
Rješenje:
1° i 3° Raščlamba (analiza) i dokaz ispravnosti konstrukcije zadaće
Neka traženi trokut ABC ima duljine stranica |BC| = a, |CA| = b, |AB| = c i neka su duljine visina na te stranice redom v_a, v_b, v_c.
Iz formula $P_{\Delta ABC} = av_a/2 = bv_b/2 = cv_c/2$ za površinu trokuta ABC slijedi $av_a = bv_b = cv_c$, tj.

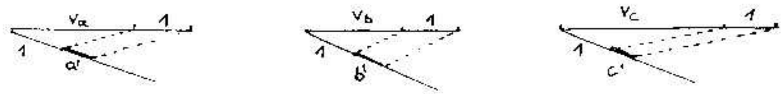
$$a:(1/v_a) = b:(1/v_b) = c:(1/v_c). \qquad (*)$$

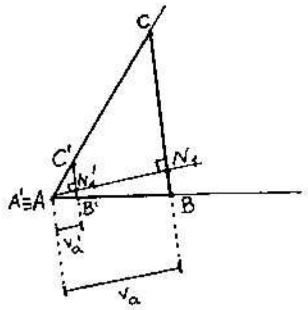
Neka trokut A'B'C' ima duljine stranica a' = |B'C'| = $1/v_a$, b' = |C'A'| = $1/v_b$, c' = |A'B'| = $1/v_c$.
Tada iz (*) slijedi da su trokuti ABC i A'B'C' slični.
Označimo sa v_a', v_b', v_c' redom visine iz vrhova A', B', C' trokuta A'B'C'.

Prvo konstruiramo stranice a', b', c'. Iz a' = $1/v_a$ slijedi $v_a : 1 = 1 : a'$, pa se a' konstruira kao četvrta geometrijska proporcionala. Analognom se konstruiraju b' i c'.
Zatim se konstruira trokut A'B'C'.
Na kraju se konstruira i trokut ABC, kao sličan trokut trokutu A'B'C', uzimajući koeficijent sličnosti $k = v_a : v_a' = a : a'$.

2° Konstrukcija zadaće







4° Rasprava (diskusija) rješenja zadaće

Zbog sličnosti trokuta ABC i A'B'C', trokut ABC postoji (može se konstruirati) kada postoji i trokut A'B'C'.

Za $1/v_a + 1/v_b > 1/v_c$, $1/v_b + 1/v_c > 1/v_a$ i $1/v_c + 1/v_a > 1/v_b$ postoji jedinstveno rješenje.

Zadatak 7. Konstruirati trokut ABC komu je zadano: a, v_a, α
(Uputa: Rabiti odnos središnjeg i obodnog kuta).

Zadatak 8. Konstruirati trokut ABC komu su zadane duljine visine, težišnice i simetrale kuta (unutar trokuta) iz istog vrha A: v_a, t_a, $s'_\alpha = s_\alpha \cap \triangle ABC$.
(Uputa: Rabiti činjenicu da se $s_{\overline{BC}}$ i s_α sijeku na trokutu ABC opisanoj kružnici).

LITERATURA:

[1] Dominik Palman: Geometrijske konstrukcije (Element, Zagreb, 1995.).
[2] Dominik Palman: Trokut i kružnica (Element, Zagreb, 1994.),
[3] Margita Pavleković: Metodika nastave matematike s informatikom I (Element, Zagreb, 1997.),
[4] Anđelko Marić: Planimetrija - zbirka zadataka (Element, Zagreb, 1996.),
[5] Vlado Stošić: Matematička natjecanja učenika osnovnih škola (Element i Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 1994.),
[6] Boris Pavković - Darko Veljan: Elementarna matematika 1 (Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.),
[7] Boris Pavković - Darko Veljan: Matematika 1 - zbirka zadataka za prvi razred srednjih škola (Školska knjiga, Zagreb, 1991.),
[8] Zdravko Kurnik: Algebarska metoda rješavanja konstruktivnih zadaća (Društvo mladih matematičara "Pitagora", Beli Manastir, 1990. i Hrvatsko matematičko društvo - Podružnica Osijek, Osijek, 1994.),
[9] Boško Jagodić - Renata Svedrec: Matematika 7 za izbornu i dodatnu nastavu (Školske novine, Zagreb, 1994.)