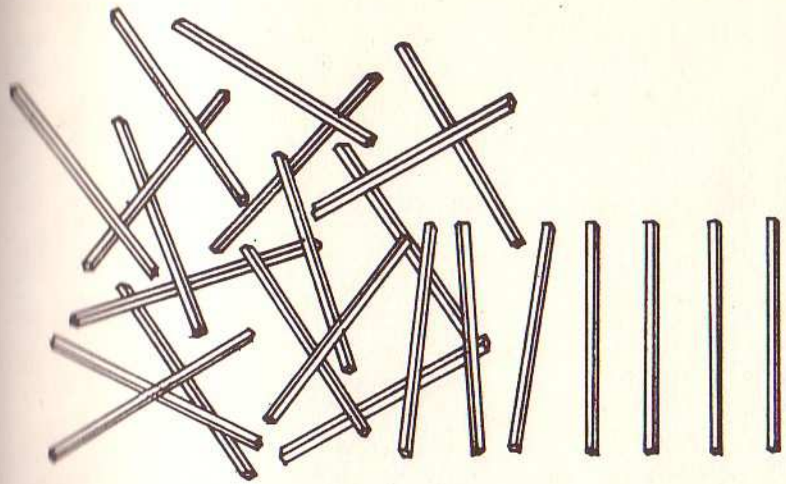
Najtoplije zahvaljujem **prof. Milanu Šariću** na dozvoli da skeniram "Glavolomije" i objavim ih na svojim web stranicama.

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate
http://public.carnet.hr/mat-natj

MILAN ŠARIĆ

GLAVOLOMIJE



DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

MILAN ŠARIĆ

GLAVOLOMIJE

DMM »PITAGORA«

Recenzenti

dr Dragan Trifunović
mr Boško Damjanović

Lektor

Nikola Živković prof.

PREDGOVOR

Poslije knjige »Najljepši logički zadaci — gimnastika uma« koja je naišla na lijep prijem kod čitalaca, »Glavolomije« donose novi izbor zadataka iz područja zanimljive, rekreativne, glavolomne matematike. Zanimljiva matematika je prije svega matematika i kao takva pridonosi popularizaciji matematike općenito, razbijajući tradicionalni stav o matematici kao »neinteresantnoj« i »teškoj«.

Ugledni engleski matematičar Litlle Wood je jednom prilikom rekao da je dobra matematička šala, bolja od gomile nekog rada objavljenog bez srca. Mnogi veliki matematičari odabrali su matematiku kao svoj životni poziv oduševivši se u mladosti upravo nekim od ovakvih problema.

»Glavolomije« nije klasična knjiga za čitanje ili neko lako štivo koje se čita od prve do posljednje strane, već u njoj čitaoci biraju sadržaj prema uzrastu, želji, sposobnostima, intelektualnoj radoznalosti. Kao takva namijenjena je svima: učeniku počev od IV razreda osnovne škole pa sve do IV razreda srednjih škola, inženjeru, ekonomisti, a posebno nastavniku, kao materijal za natjecanje učenika. »Svaka porodica koja brine za organizaciju umnog razvoja svoje djece osjeća potrebu za takvim materijalom, koji će slobodno vrijeme kod djece ispuniti korisnim, privlačnim i raznovrsnim intelektualnim sadržajem«, rekao je sovjetski matematičar B. A. Kordemski.

Porijeklo zadataka je raznovrsno. (20-ak zadataka su originalni, dok su ostali modifikacije problema poznatih svjetskih majstora glavolomija (Sam Loyd, Henry Dudeney, Martin Gardner itd.).

Određeni dio zadataka potječe iz usmene predaje. Sakupljeni su u raznim situacijama (seminarima, raznim skupovima), a porijeklo im je često nepoznato. U posljednje se vrijeme u cijelom svijetu povećao interes za zanimljivu matematiku, što je djelomično povezano s tim što su mnogi problemi dovoljno teški i za odrasle, a najbolje rješenje je često nepoznato. Najboljim rješenjem se smatra ono koje dovodi do cilja u najmanjem broju koraka. Iako je u posljednje vrijeme izašlo nekoliko lijepih knjiga iz područja zanimljive matematike, još uvijek smo siromašni takvom literaturom.

Na našem jeziku je dosad objavljeno:

Ž. Kostić: »Između igre i matematike« (1959)

J. I. Pereljman: »Zanimljiva matematika« (prevod)

J. I. Pereljman: »Zanimljiva geometrija« (prevod)

V. Devide: »Sto elementarnih ali težih zadataka« (1964, 1971)

D. Klepić: »Zabavna matematika« (prevodi ruskih zadataka)

M. Polonijo: »Matematički problemi za znalce i radoznalce« (1979)

B. Marinković: »Mala zbirka zanimljivih matematičkih zadataka za izoštravanje uma (1981)

S. Loyd: »Male priče za bistre glave« (prevod)
M. Šarić: »Najljepši logički zadaci — gimnastika uma« (1982)
M. Petković: »Zanimljivi matematički problemi« (1985)

Ugodna mi je dužnost da se zahvalim recenzentima dr Draganu Trifunoviću prof. univ. iz Beograda, mr Bošku Damjanoviću asist. univ. iz Beograda koji su savjesno pregledali rukopis te su mi svojim savjetima i prijedlozima pomogli da podignem stručni i metodski nivo knjige.

Također se zahvaljujem prof. Luki Čelikoviću iz Belog Manastira i dipl. ing. Vesni Jemrić iz Vinkovaca koji su pročitali rukopis, uklonili mnoge greške i pomogli mi svojim kritičkim napomenama.

Dugujem zahvalnost i nastavniku Milanu Jovčić, inače šahovskom FIDE majstoru, iz Seče Reke na pomoći pri šahovskim glavolomijama.

Bit ću zahvalan svakom čitaocu koji mi ukaže na propust, grešku, originalnije rješenje ili pošalje novu glavolomiju.
Moja adresa je: Radnička 20, 54302 Kneževo.

Milan Šarić

I GLAVOLOMIJE ZA NAJMLAĐE

1.
Kocka

Kocka stranice jedan metar sadrži 1000 litara vode. Koliko litara sadrži kocka upola manje stranice?

2.
Katnica

Ivica i Vlado stanuju na prvom katu. Koliko puta veći put prevali Ivica koji ide na deseti kat nego Vlado koji ide na peti kat (podrazumijeva se da obojica krenu sa prvog kata)?

3.
Požar

Nalazite sa na pustom otoku. Prema vama se širi požar koji zahvaća cijelu širinu otoka. More je duboko i puno ajkula. Da nesreća bude veća, vi ne znate plivati. Kako ćete se spasiti ako ste prije pola sata jeli prženu ribu?

4.
Utrka

Pored atletske staze je postavljeno 20 zastavica na jednakim rastojanjima. Startuje se od prve zastavice. Atletičar je deset sekundi poslije starta bio kod desete zastavice. Za koliko će sekundi, ne mijenjajući brzinu, biti kod dvadesete zastavice?

5.
Lift

Neki dječak stanuje na desetom katu. Ali, kad sam ulazi u lift on se njime vozi samo do osmog kata, a dalje nastavlja put pješice. Šta mislite, zbog čega?

6.
Bez računanja

Odredite bez računanja čija je ploština najmanja:
a) trokuta stranica 14, 17, 31 cm.
b) pravokutnika stranica 2 i 4 cm.
c) kvadrata stranice 1 cm.

7.
Ostavština

Imao otac dva sina. Svaki sin je imao prekrasnog konja. Na samrti im otac reče: — Obojica otiđite Vilinom dvorcu. Čiji konj bude posljednji stigao u Vilin dvorac pripast će mu sva moja ostavština.
Uto sinovi galopom krenuše ka Vilinom dvorcu. Što je razlog ovog neobičnog ponašanja sinova?

8.
Veliki i mali čovjek

Jednog lijepog sunčanog dana krenuli u šetnju veliki čovjek i mali čovjek. Veliki čovjek je nosio veliku torbu, a mali čovjek malu torbu. Veliki čovjek je imao veliki nos, a mali čovjek mali nos. Veliki čovjek je imao velike uši, a mali čovjek male uši. Veliki čovjek je nosio velike naočale, a mali čovjek male naočale.

Veliki čovjek je imao veliku glavu, a mali čovjek malu glavu. Veliki čovjek je u desnoj ruci nosio veliki kišobran, a mali čovjek u lijevoj ruci mali kišobran. Tko je od njih dvojice manje pokisao?

9.
Jeziva priča

Dvojica sjede u kavani. — Jesi li čuo šta se dogodilo kod Kovačevih? — kaže jedan. — Nisam — odgovori drugi. — Zašto? Što se dogodilo? Bili su gosti kod njih i domaćin je zaspao usred razgovora, a njegova žena, da gosti ne bi primijetili kako spava, prstom je oprezno dodirnula vrat svog muža, nastojeći da ga tako probudi. Jadni Kovač upravo je snivao kako se krvnik sprema da mu odrubi glavu, pa kad su hladni prsti njegove žene dotakli vrat, on ih je osjetio kao oštricu krvnikove sjekire te je od straha i šoka umro...

Ne luduj, ovo ne može biti istina.

Ma kako ne bi bila istina...

I sad, odlučite vi, je li istina ili nije?

10.
Čudna trgovina

Koliko stoji jedan?

— Trideset dinara — odgovori trgovac.

Koliko stoji deset?

— Šezdeset dinara — odgovori trgovac.

Koliko stoji 125?

— Devedeset dinara — odgovori trgovac

Šta je kupovao kupac?

11.
Zagonetna riječ

Pronađite riječ koja kada se čita obrnuto (tj. s desna na lijevo) nema prvo slovo.

12.
Nećak

Doputovao Vlado kod svog rođenog brata Dušana. Sutradan oni otputuju u Osijek. Kada su prolazili pored Pravnog fakulteta, Dušan kaže Vladi:

— Ovdje studira moj nećak Petar; hoćemo li ga posjetiti?

— Ja ne bih. Petar nije moj nećak. — odgovori Vlado.

Kako je moguće da Petar nije Vladin nećak, a Vlado je rođeni Dušanov brat?

13.
Veste

Dva klinca u jednakim vestama razgovaraju:

— Tebe još mama oblači, ili se već sam oblačiš? — upita jedan.

— Sam se oblačim! — odgovori drugi.

— Pa dobro, kladimo se da vestu ne možeš sam skinuti.

— Zašto ne bih mogao. Svake večeri je sam skidam!

— Da vidim, možeš li?

Uzalud se trudio; ipak sam nije skinuo vestu.

Odgovorite zašto?

14.
Kavez

Da li je teži prazan kavez, ili kavez sa papagajem koji leti unutar kaveza?

15.
Kratak život

Arist je rođen 10. januara 10. godine prije nove ere. Umro je 10. januara 10. godine poslije nove ere. Koliko godina je živio?

16.
Kad polovina nije polovina

Da li možemo dvanaest podijeliti na dva jednaka dijela tako da svaki dio iznosi sedam?

17.
Zaboravni taksist

Taksist je skrenuo u ulicu u kojoj je zabranjeno kretanje svim motornim vozilima. Prošavši pored saobraćajnog milicionera, ovaj ga samo pozdravi. Zašto nije zaustavljen i kažnjen taksista?

18.
Čudan račun

Produkt broja godina blizanaca Milenka i Slobodana iznosi 100. Njihova sestra Bosiljka je godinu dana starija od njih, tj. ima 11 godina. Kada Bosiljka bude stara kao sada Milenko i Slobodan zajedno, Milenko će imati 11 godina.

Da li je račun ispravan?

19.
Eskimi

Ako grupa Eskima koja je stigla na sjeverni pol otpješači 5 km sjevernije, koliko će biti udaljeni od sjevernog pola?

20.
Kratka godina

Neke godine imaju 365, a neke 366 dana. Međutim, jedna je godina imala samo tri sedmice! Koja?

21.
Lopov

U luksuznom hotelu »Albatros« odsjela je grupa američkih turista. Među njima i milijarder John, koji je sa sobom ponio skupocjeni nakit. Među turistima se nalazio lopov koji se spremao da ukrade Johnov nakit. Znajući to, služba bezbjednosti hotela upozorila je Johna da prijavi svaki neobičan susret sa gostima.

Sutradan je John službenicima bezbjednosti ispričao slijedeće:

— Poslije doručka Lewis me je pozvao na piće i usput priupitao koji mi je broj sobe.

Prije ručka netko je pokucao na vrata moje sobe. Bio je to Bil. Ispričao se i objasnio da je pogriješio vrata. Naime, kao što sam se i sam uvjerio, na njegovim i na mojim vratima je naslikan isti cvijet. Poslije večere, predstavljajući se kao moj daljnji rođak, Carl me je pozvao u šetnju, što sam ja, naravno, odbio.

Službi bezbjednosti hotela sada nije bilo teško da utvrdi tko je lopov.

Tko je to?

22.
Snoviđenje

Rano ujutro, kad je generalni direktor ušao u kancelariju, u tajništvu ga je čekao noćni čuvar tvornice.

— Šta ima novo Joži-bači? — upita direktor malo iznenađen, jer starkelja nije imao običaj dolaziti u ured.

— Nemojte se smijati — gužvao je kapu smeteni posjetilac — ali noćas sam imao strašan san...

— No, a što ste sanjali?

— Da je gospodin generalni, ovaj drug direktor, sjeo u avion za Pariz i da se avion srušio... Kasnije, kad mi je istekla smjena, čuo sam na porti da zaista putujete u Pariz i da već imate kartu. Preklinjem vas, radije putujte vlakom. Moji snovi se uvijek obistinjuju.

Generalni direktor nije bio praznovjeran, ali ga je to predskazivanje ipak neugodno pogodilo. Odgodio je putovanje. Sutradan je iz novina saznao da se zaista srušio avion kojim je namjeravao putovati.

Čim je stigao u tvornicu, odmah je pozvao Jožija.

— Vi ste imali pravo stari moj! — stiskao mu je ruku. — Vi ste mi spasili život...

I rekavši to, bogato ga nagradi uz jedno pismo. U pismu je bio otkaz. Zbog čega?

Napomena. (9. 13. i 22. zadatak su preuzeti iz KVIZOLOGIE od Erszebet Kun)

II GLAVOLOMNE GLAVOLOMIJE

1.
Nova škola

Zgrada Osnovne škole »Beljska mladost« iz Kneževa je prilično trošna. Često se vodi razgovor o tome kada će biti sagrađena nova škola. Prisustvujemo jednom takvom razgovoru nastavnika.

Emil: — Kada bude sagrađena nova škola, meni će biti toliko godina koliko je sada tebi, Jelice.

Jelica: — Produkt tvojih, mojih i broja godina koje moramo čekati do useljenja u novu školu, umanjen za broj mojih godina daje registarski broj mojeg automobila.

Za koliko godina će biti sagrađena nova škola u Kneževu, ako znamo da je registarski broj Jeličinog automobila četveroznamenkast broj sa različitim znamenkama djeljiv sa 765, a zbroj prve dvije znamenke za jedan je veći od produkta ostalih dviju?

2.
Krug

U krugu na jednakim rastojanjima trče jedan iza drugog: Antun, Branko, Cvijeta, Danko, Emil, Franjo i Goran. Među njima sam i ja. Sljedbenik mog sljedbenika je prethodnik onoga koji je jednako udaljen od Emila kao i onaj čiji je sljedbenik prethodnik mog prethodnika.

Prezime mi je Branković, a ime?

3.
Problem Smitove starosti

(Sam Loyd je ovaj problem objavio krajem 1896. godine)
29. II 1896. se odvijao ovakav razgovor među supružnicima Smit:

— Tome, ti si bio triput stariji od mene u vrijeme kad smo se upoznali, a ja sam sada upravo onoliko stara koliko si ti bi ou ono vrijeme.

— Kada budem imala triput više godina nego sada imat ćemo ravno 100 godina.

Recite koliko će godina imati Smit idućeg 29. II?

4.
Zbrka oko godina

— Susrela sam tri osobe. Možeš li odgonetnuti koliko je stara svaka od njih, ako je produkt njihovih godina jednak 420, a svaka je starija od godine dana? — upitala je Ana Maju.

— Zbroj njihovih godina je dvostruko veći od tvog kućnog broja— dopunila je Ana.

— Razmislit ću i odgovoriti — bila je samouvjerena Maja. Međutim, nakon računanja i razmišljanja, nije mogla otkriti godine tih triju osoba.

— Dobro, reći ću ti još nešto, samo jedan od njih je stariji od tvoje tetke — rekla je Ana. Nakon toga Maja je lako riješila zadatak. Koliko godina ima Majina tetka, ako znamo da je tetka za vrijeme svog školovanja uvijek bila odlična učenica?

5.
Izlet

Na zajedničkom izletu učenika V, VI, VII, VIII razreda pod vodstvom nastavnika Ivice, Stipe, Josipa i Mirjane bio je jednak broj učenika svakog odjeljenja. Za vrijeme doručka učenici su se raštrkali po obližnjoj šumi.

Prilikom prebrojavanja učenika čulo se:

Stipo: — Nestala je polovina učenika V razreda.

Ivica: — Ostalo je toliko učenika VI razreda, koliko je nestalo učenika VII razreda.

Josip: — Broj svih nestalih učenika je 1,5 puta veći od broja preostalih učenika VIII razreda.

Mirjana: — Kad bi barem jedan razred bio kompletan mogli bismo održati sat matematike u prirodi.

Nažalost, Mirjana nije bila matematičar i u nečemu je pogriješila.

U čemu je pogriješila Mirjana?

6.
Zaboravni Damir

Dijana kaže Damiru:

— Evo ti kutija šibica. U njoj je 50 palidrvaca. Uzmi određeni broj palidrvaca, najmanje 1, a najviše 10 i to stavi u desni džep. Zatim izbroji preostala palidrvca i uzmi onoliko palidrvaca koliko iznosi zbroj jedinice i desetice broja preostalih palidrvaca i to stavi u lijevi džep. Nakon što je sve to Damir obavio, Dijana ga upita:

— Da li znaš koliko ti je preostalo palidrvaca u kutiji?

— Ali ja sam zaboravio koliko sam stavio u desni džep — uzdahnu Damir.

Pomozite vi zaboravnom Damiru i recite koliko je palidrvaca ostalo u kutiji!

7.
Zamijenjeni dresovi

Prije početka trening utakmice između »Mladosti« i »Jedinstva« ustanovljeno je da su neki igrači uzeli dresove protivničkog tima. (»Mladost« je imala plave dresove, a »Jedinstvo« bijele).

U ekipi »Mladosti« je ustanovljeno da je 1/7 igrača uzelo bijele dresove. Za igrače iz ekipe »Jedinstva« ništa ne znamo.

Treneri su odlučili da utakmicu počnu jedadnaestorica iz svake ekipe koji nisu zamijenili dresove.

Na klupi za rezervne igrače se nalazi jednak broj igrača »Mladosti« i »Jedinstva«. Međutim, po dresovima se to ne bi moglo zaključiti. Kad bi na klupu došao još jedan igrač u bijelom dresu bilo bi ih dvostruko više nego igrača u plavim dresovima.

Da li je centarfor Jedinstva zamijenio dres?

8.
Sportaš Baranje

U tradicionalnom izboru za sportaša godine u Baranji u najuži izbor ušli su Janković, Perić i Marić.

Svaki član glasačkog žirija je na listiću ispisao imena trojice sportaša. Treće mjesto na glasačkom listiću donosi određeni broj pozitivnih bodova. Drugo mjesto donosi veći broj, a prvo mjesto najveći broj bodova.

Nakon pregleda svih glasačkih listića ustanovljeno je da je pobijedio Janković sa 17 bodova, drugo mjesto osvojio je Perić sa 10 bodova, a treće Marić sa 8 bodova.

Također je ustanovljeno da Perić i Janković nisu bili jednak broj puta ispred Marića.

Koliko je bilo članova žirija i kakav je raspored sportaša na svakom listiću?

9.
Okrugli stol

Ne znamo da li za okruglim stolom sjedi 12 ili 13 učenika. Među njima su: Branko, Ivica i Milan. Ivica je prebrojao učenike ulijevo od sebe do Milana i taj broj pomnožio sa brojem učenika koji sjede desno od njega do Milana. Dobio je za 9 veći broj od Branka koji je to isto učinio.

Koliki produkt bi dobio Ivica da je umjesto do Milana brojao do Branka?

10.
Nepoznati brojevi

Veselin je rekao Zoranu i Siniši — Zamislio sam dva broja. Svaki od njih je veći od 1, a zbroj im je manji od 100.

Zatim je Veselin rekao Zoranu produkt ta dva broja, a Siniši zbroj.

Između Zorana i Siniše poveo se slijedeći razgovor:

Zoran: — Ne znam koji su to brojevi.

Siniša: — Ja sam i ranije znao da ih ne znaš.

Zoran: — U tom slučaju ja ih znam.

Siniša: — Kad ih ti znaš onda ih i ja znam.

Koje je brojeve zamislio Veselin?

11.
Tri sina

Imam tri sina: Ivicu, Vladu i Petra.

Ivica ide u vrtić, a Vlado i Petar u osnovnu školu.

Kada dvaput zaredom napišem Ivičine godine, dobijem godine moje starosti. Kada broj mojih godina podijelim sa Vladinom ocjenom iz matematike dobijem godine starosti jednog mog djeteta.
Produkt broja godina moje djece iznosi 440.

Koliko godina ima Ivica ako znamo da je Petar bolji matematičar od Vlade?

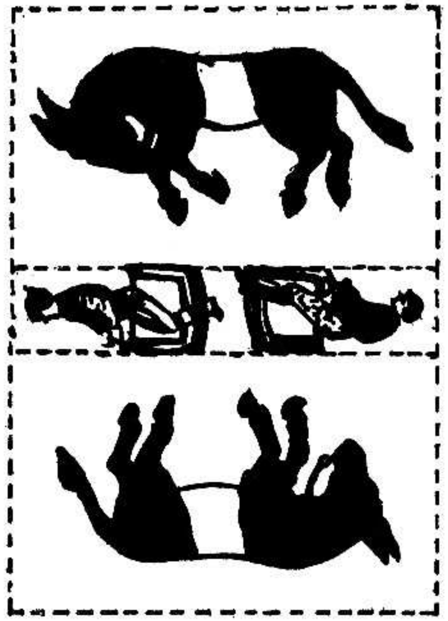
III GLAVOLOMIJE U SLICI

Loydovi konji

Sam Loyd (1841 — 1911), jedan od najvećih svjetskih majstora na području glavolomne, rekreativne, zabavne matematike je 1861. komponirao zadatak koji mu je donio prvi komercijalni uspjeh.

1.

Razrezati sliku (crtkanim linijama) na tri djela, zatim složiti te dijelove, tako da svaki jahač jaše na konju.
Nije dozvoljeno presavijanje papira.

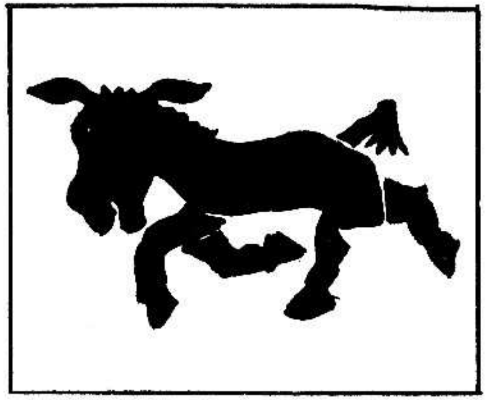


Slika 1.

I drugi Loydov problem je prodan u velikom broju primjeraka.

2.

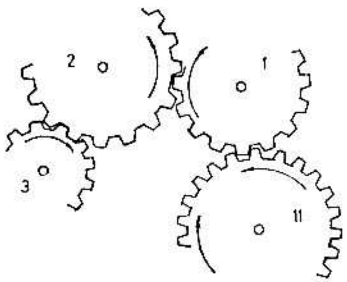
Prekopirajte sliku ponija (slika 2.) na papir i izrežite ga u šest dijelova (kao što je prikazano na slici). Pokušajte od tih šest dijelova slaganjem dobiti novu sliku konja.



Slika 2.

3.
Zupčanici

U ravnini je smješteno 11 zupčanika, tako da je prvi povezan sa drugim (okretanjem prvog okrećemo i drugi), drugi sa trećim, treći sa četvrtim, itd. Posljednji jedanaesti, povezan je i sa prvim zupčanikom.
Mogu li se okretati zupčanici ovog sistema?



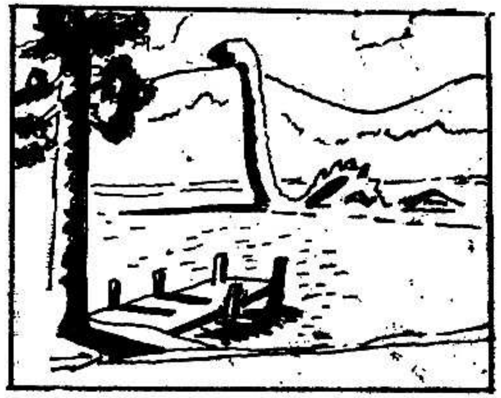
Slika 3.

4.
Fotografija godine

Na natječaj za fotografiju godine prijavio se Lažić Lazo sa svojom fotografijom.

— Na ovoj fotografiji snimio sam dosad nepoznato morsko čudovište — reče Lažić.

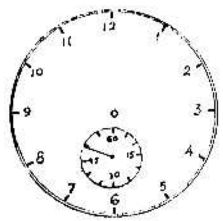
Ubrzo je komisija utvrdila da je Lažić obična varalica. Na osnovu čega je to komisija utvrdila?



Slika 4.

5.
Gradski sat

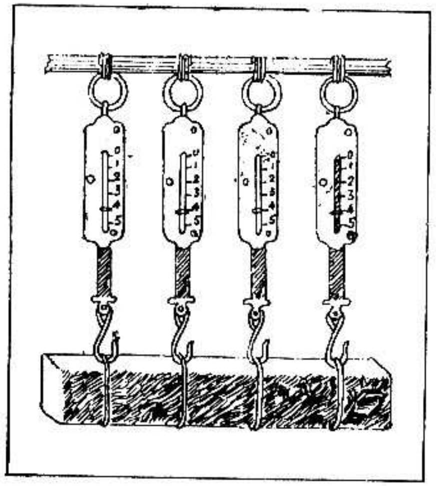
Gradski sat je stao u momentu kada je minutna kazaljka poklopila satnu. Urar je pola sata nakon toga izvadio obje kazaljke da ih izravna, jer su bile savijene. Koliko sati je pokazivao gradski sat u momentu kad je stao?



Slika 5.

6.
Željezni kvadar

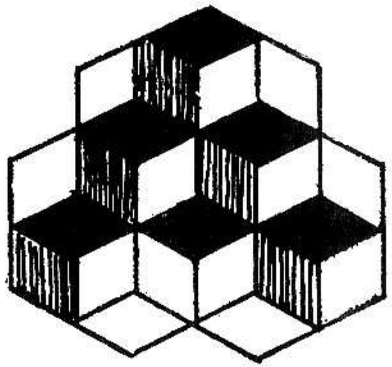
Koliko kiloponda je težio željezni kvadar na slici?



Slika 6.

7.
Kocka

Koliko kocaka vidite na slici?

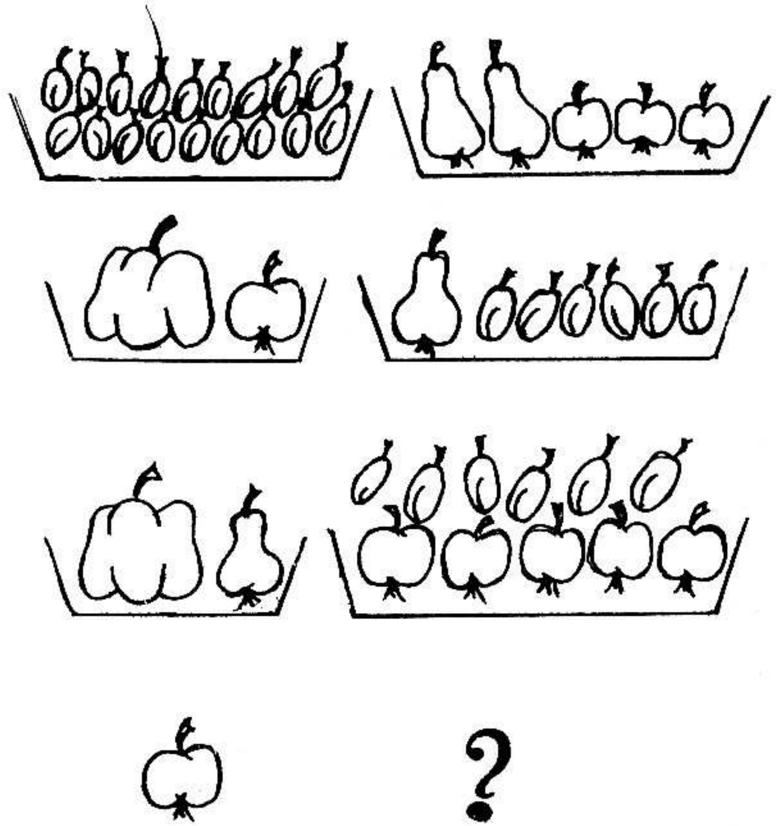


Slika 7.

8.
Vaga

Na slici vidite da su tri jabuke i dvije kruške jednako teške kao 18 šljiva. Dunja i jabuka su u ravnoteži sa kruškom i šest šljiva. Dunja i kruška su u ravnoteži s pet jabuka i šest šljiva.

Koliko šljiva treba uravnotežiti s jednom jabukom?



Slika 8.

IV GLAVOLOMNI KRIPTOGRAMI

U slijedećim primjerima znamenke su zamijenjene slovima, pri čemu različitim znamenkama odgovaraju različita slova, a istim znamenkama ista slova.

1.
Ukusno voće

```
  J A B U K A
+ K R U Š K E
-------------
  P R O B A J
```

2.
Ljetovanje

```
   V E T A
+ H O Ć E
---------
 H O T E L
```

3.
Ilija je žedan

```
   I L I J I
+ L I T A R
-----------
 P I J A Č E
```

4.
Veliki matematičar

```
R D R — E M = R A E
  :     —       —
  I   · R H = D R
-------------------
E H   + M R = A R M
```

Odredivši vrijednost svakog slova poredati odgovarajuće znamenke u rastućem nizu počevši sa najmanjim. Ako se ispod svake znamenke napiše odgovarajuće slovo, dobit ćete ime jednog slavnog matematičara i fizičara.

(»ARHIMEDES« — naučno-popularni matematički list I-1 Beograd 1973.)

5.
Engleska aritmetika

20+20+20+10+10=80. Na engleskom jeziku to možemo zapisati ovako:

```
  T W E N T Y
  T W E N T Y
  T W E N T Y
        T E N
      + T E N
-------------
  E I G H T Y
```

Odredite koje znamenke predstavljaju slova T, W, E, N, Y, E, I, G, H. (Marie Berrondo: Les jeux mathematiqes d' eureka, Donod, Paris 1979.)

6.
Španjolska aritmetika

4+4+4+4+4=20. Na španjolskom to možemo zapisati:

```
  C U A T R O
  C U A T R O
  C U A T R O
  C U A T R O
+ C U A T R O
-------------
  V E I N T E
```

Odredite koje znamenke predstavljaju slova C, U, A, T, R, O, V, E, I, N. (Marie Berrondo: Les jeux mathematiqes d'eureka, Dunod, Paris 1979.)

7.
Jugoslavenska aritmetika

```
  J E D A N
  J E D A N
  J E D A N
  J E D A N
  J E D A N
    N U L A
    N U L A
+     P E T
-----------
  D E S E T
```

Odredite nepoznate znamenke.

8.
Samo šestice

```
   Š E S T x Š E S T
   -----------------
    o o o o T
   o o o o S
  o o o o E
  o o o Š
 ---------------
 o o o o o o o
```

9.
Samo sedmice

```
          S E D A M x S E D A M
          ---------------------
          o o o o o o
        o o o o o o
      o o o o o o
    o o o o o o
  ----------------------
    o o o o o S E D A M
```

10.
Novi grad

```
       N O V I x G R A D
       -----------------
       o o o o I
       o o o V
     o o o o O
   o o o o N
   -------------------
   o o o o o o o o
```

11.
Novi Sad

```
      N O V I x S A D
      ---------------
   H A o o I
       o o o O
       A o o I I
   ---------------
   o o o o o o o
```


12.
Kriptogram Stivena Barra

```
       o o x o o
     -----------
     o o o
   o o o
   -----------
   o o o o
   + 1 o o
   -----------
   o o o o o
```

(gdje je o bilo koja znamenka. Neke znamenke se mogu ponavljati a neke ne moraju biti upotrijebljene)

Interesantno, rješenje je jedinstveno!

13.
Kriptogram Henry E. Dudeneya

```
   o o x o
   -------
     o o
   + o o
   -------
     o o
```

(gdje je o bilo koja znamenka od 1 do 9. Sve znamenke su različite)
Rješenje je jedinstveno.

14.
Kriptogram Frederic Shoo-a

```
   o o o x o o o
   -------------
 o o o
   o o o
     o o o
 -----------
   o o o o o
```

(gdje o predstavlja bilo koju znamenku od 0 do 9. Svaka znamenka se ponavlja dvaput.)

Rješenje je također jedinstveno.

15.
Jedinstvena osmica

Aprila 1954. časopis »The American Monthly« objavio je vrlo zanimljiv zadatak kojeg je poslao R. L. Shesen.

```
X X X X  X X X X : X X X = X X 8 X X
— X X X
─────────
    X X X X
  — X X X
  ──────────
       X X X X
     — X X X X
     ──────────
```

(gdje je X bilo koja znamenka od 0 do 9)
Interesantno, zadatak ima jedinstveno rješenje. Nadam se da ćete ga i vi naći.

V NUMERIČKE GLAVOLOMIJE

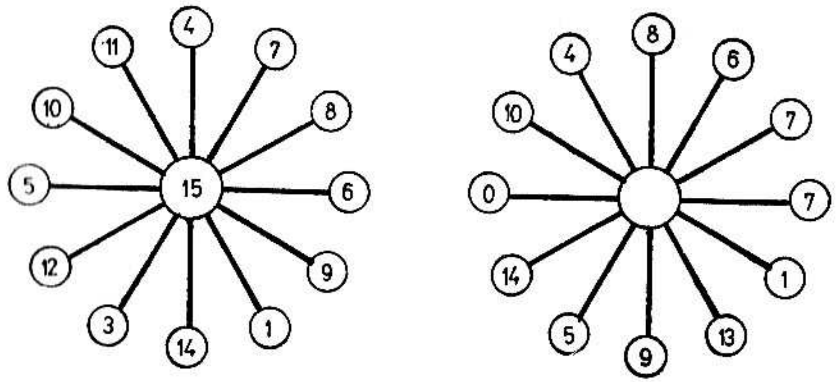
1
Isti odnos

Pronađite par brojeva koji stoje u istom odnosu kao prvi, podvučeni par!

313-133
―――
414-414
613-361
566-665
818-881
977-797

2.
Prazan kružić

Koji broj treba upisati u prazan kružić, ako ispisani brojevi podliježu istoj zakonitosti?



Slika 9.

(Miloš Zapletel: Kniha hlavolamu. Albatros, Praha 1983.)

3.
Prazan kvadratić

Ako ste uočili zakonitost brojeva u prva dva slučaja, onda upišite broj koji nedostaje.

7	
13	15

8	
14	18

15	29

Slika 10.

4.
Suvišan kvadrat

Kod tri od četiri nacrtana kvadrata brojevi u kvadratićima su povezani po istom pravilu, dok kod jednog kvadrata ta zakonitost ne vrijedi. Kod kojeg?

6	1
26	106

10	2
42	170

18	4
74	298

22	5
112	662

Slika 11.

5.
Neispunjeni kvadrat

Treba otkriti zakonitost po kojoj su napisani brojevi i upisati preostale brojeve u prazne kvadratiće.

	2			
		18		
		25		7
			21	
13				

Slika 12.

6.
Broj koji nedostaje

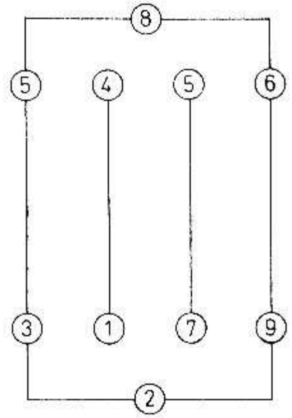
Upišite broj koji nedostaje.

1 3 5
2 4 8
3 6 12
4 7 —

7.
Povezati brojeve

Povezati linijama po dva broja sa slike tako da je zadovoljeno slijedeće:

Svi povezani parovi daju istu sumu, linije koje povezuju dva broja ne izlaze iz zadanog pravokutnika, međusobno se ne presijecaju i ne sijeku dvije dužine koje spajaju brojeve 4 i 1 i brojeve 5 i 7.



Slika 13.

8.
Križaljka

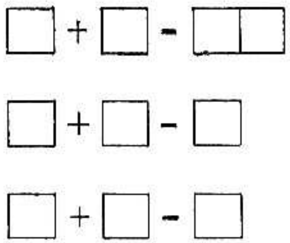
U prazna polja križaljke dopišite brojeve koji nedostaju, tako da sve jednakosti budu ispravne.

	:	2	-		=	
x		+		x		x
	+		-	4	=	5
:		-		+		-
4	+		-		=	
=		=		=		=
	-	3	+		=	8

Slika 14.

9.
Deset znamenaka

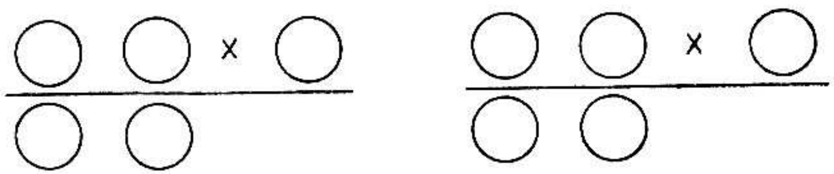
Deset znamenaka od 0 do 9 ispišite u kvadratiće tako da se dobiju tri ispravne jednakosti.



Slika 15.

10.

Svih deset znamenaka od 0 do 9 razmjestite u kružiće tako da bi oba primjera množenja bila ispravna.

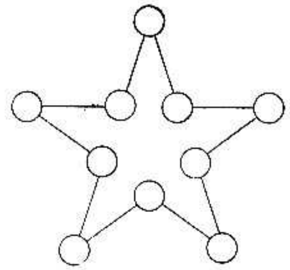


Slika 16.

11.
Zvijezda

U kružiće na vanjskim i unutrašnjim vrhovima zvijezde upišite sve brojeve od 1 do 10 tako da suma nikoja dva susjedna broja nije djeljiva ni sa 3, ni sa 5, ni sa 7.

Slika 17.



12.
Kvadrat u kvadratu

Razmjestite napisane znamenke po kvadratićima tako da bi tri vodoravno čitana troznamenkasta broja bila potpuni kvadrati.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

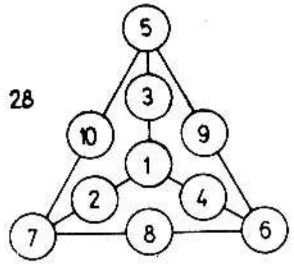
Slika 18.

13.
Interesantan razmještaj

U deset kružića raspoređenih uzduž stranica i uzduž polumjera opisane kružnice istostraničnog trokuta (na slici), moguće je razmjestiti 10 brojeva od 1 do 10 tako da zbroj brojeva raspoređenih na stranicama i vrhovima svakog od tri mala trokuta bude 28, kao na slici.

$(1+2+7+8+6+4=1+4+6+9+5+3=1+3+5+10+7+2=28)$

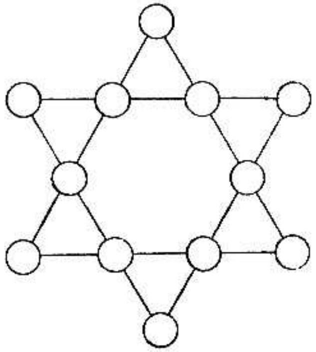
No, najzanimljivije je to što je od tih deset brojeva drugačijim rasporedom moguće dobiti nove i nove skupine tako da za svaki od tri mala trokuta dobijemo zbroj i 29, i 30, i 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37 i 38. Kako će u tih deset slučajeva biti raspoređeni brojevi po kružićima?



Slika 19.

14.
Zvijezda

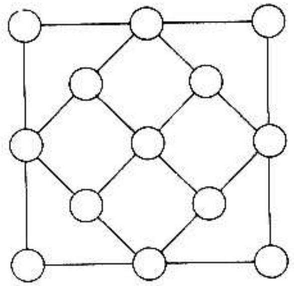
U kružiće na šesterokrakoj zvijezdi ispišite brojeve od 1 do 12 tako da bi zbroj brojeva u tri kružića na vrhovima svakog nasuprotnog trokuta na krakovima zvijezde bio jednak.



Slika 20.

15.
Kvadrat

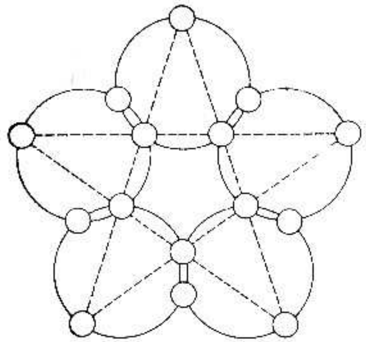
U kružiće na slici ispišite 13 cijelih brojeva, od kojih je 11 različitih, a dva jednaka, tako da zbroj brojeva na svakoj stranici velikog i svakoj stranici malog kvadrata i zbroj brojeva na središnjim linijama manjeg kvadrata bude 20. Najmanji od traženih brojeva je 1, a najveći 15.



Slika 21.

16.
Ukrasna zvijezda

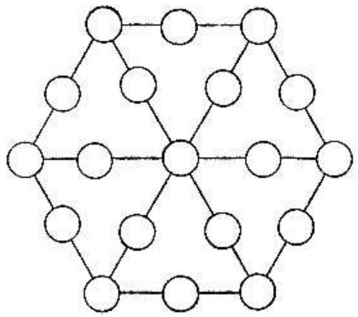
Ispisati brojeve od 1 do 15 u kružiće raspoređene na pet većih krugova tako da zbroj svih pet brojeva na svakom većem krugu iznosi 40.



Slika 22.

17.
Šesterokut

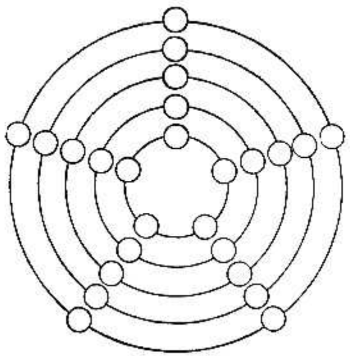
U kružiće u šesterokutu ispisati brojeve od 1 do 19 tako da zbroj brojeva (triju) na svakoj stranici i svakom polumjeru opisane kružnice iznosi 22.



Slika 23.

18.
Planetarij

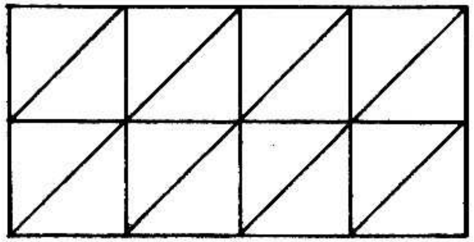
U kružiće smještene na polumjerima kruga ispišite brojeve od 1 do 25 tako da zbroj pet brojeva smještenih na svakom polumjeru bude 65.



Slika 24.

19.
Pravokutnik

U pravokutniku je nacrtano 16 malih trokuta koji čine šest većih trokuta. U svaki mali trokut upišite brojeve od 1 do 16 tako da zbroj brojeva u svakom od šest većih trokuta bude 34.



Slika 25.

VI GLAVOLOMIJE NA ŠAHOVSKOJ TABLI

1.
Legenda o šahu

Prema legendi izumitelj šaha je, nakon što mu je kralj dao da bira nagradu, zatražio od kralja slijedeće:
Za prvo polje šahovske ploče jedno zrno, a za svako slijedeće dvostruko više (za drugo 2, treće 4, četvrto 8, itd), sve do 64 polja. Kralju se ova nagrada učinila skromnom. Da li je baš tako?

2.
Bolji od Karpova i Kasparova

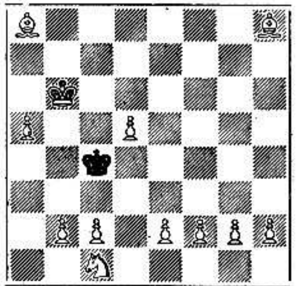
Neki čovjek (N), koji nije bio dobar šahista, izjavio je da prihvata da igra na dvije table istovremeno protiv Karpova i Kasparova uz uvjet da jedan od ove dvojice igra bijelim, a drugi crnim figurama. Pri tome je tvrdio da će on u toj igri (simultanci) osvojiti 50% poena, bez obzira na formu Karpova i Kasparova. Kako je on namjeravao da igra?
(»ARHIMEDES« — naučno-popularni matematički list II-5 1975 Beograda)

3.
Šah u prvom potezu

Jedan igrač tvrdi da će svom protivniku dati šah u prvom potezu. Da li je to moguće?

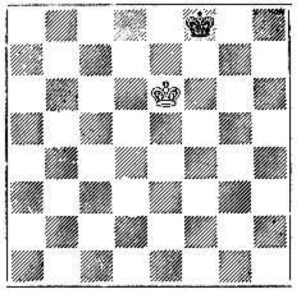
4.
Mat u nula poteza

Bijeli daje mat u nula poteza!



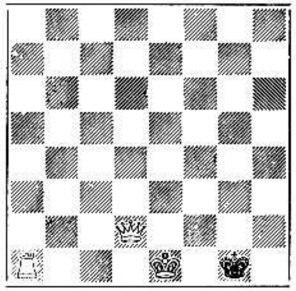
Slika 26.

5.
Mat u pola poteza
Bijeli vuče pola poteza i time matira crnog!



Slika 27.

6.
Mat u prvom potezu
Bijeli igra i daje mat u prvom potezu!



Slika 28.

7.
Kralj
Koliki je minimalan, a koliki maksimalan broj kraljeva i kako ih treba postaviti da sva polja budu tučena?

8.
Problem osam dama
Na šahovskoj ploči postavite osam dama tako da se nikoje dvije ne napadaju.

9.
Top
Koliki je maksimalni broj topova i kako ih treba postaviti na šahovskoj ploči da se međusobno ne napadaju? Koliko ima načina?

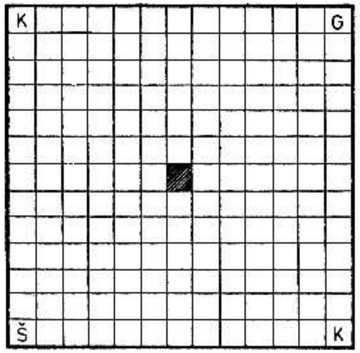
10.
Skakač
Koliki je maksimalan broj skakača i kako ih treba postaviti na šahovskoj ploči da se međusobno ne napadaju?

11.
Lovac

Koliki je maksimalan broj topova i kako ih treba postaviti na šahov-hovskoj ploči da se međusobno ne napadaju?

12.
Gargamel i Štrumpf

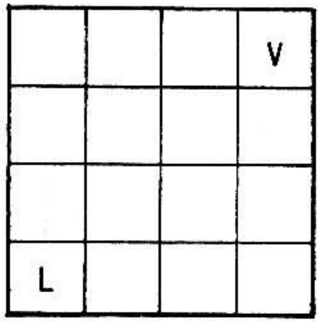
U lijevom donjem kutu ploče 13x13 nalazi se Štrumpf, a u desnom gornjem uglu strašni Gargamel. I Štrumpf i Gargamel kreću se po jedno polje vertikalno, horizontalno ili koso. Na sredini ploče je rupa i na to polje ne može ni jedan.
Može li Štrumpf ispred Gargamela pobjeći u jednu od kućica koje se nalaze u druga dva kuta ploče?



Slika 29.

13.
Vuk i lisica

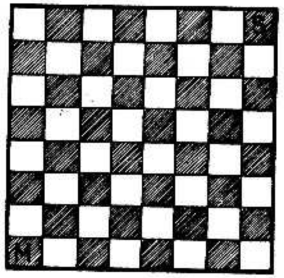
U lijevom donjem kutu ploče 4x4 nalazi se lisica, a u suprotnom vuk. I vuk i lisica kreću se (izmjenično jedno za drugim) lijevo, desno, gore ili dolje po dva polja, ili koso gore ili koso dolje po jedno polje. Može li lisica pobjeći vuku?



Slika 30.

14.
Miš i sir

U jednom kutu šahovske ploče 8x8 nalazi se miš, a u suprotnom sir. Može li miš doći do sira, tako da prethodno obiđe sva polja samo jednom, ako se kreće po jedno polje na susjedno polje (susjedna polja imaju zajedničku stranicu)?



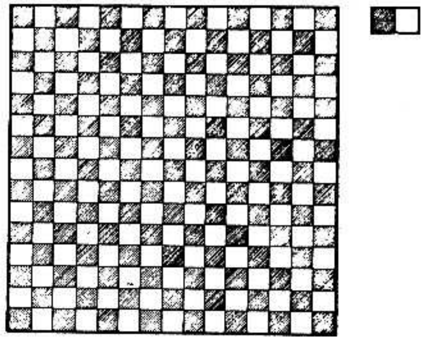
Slika 31.

15.
Igra

U jednom kutu ploče n x n nalazi se pješak. Dva igrača izmjenično pomiču pješaka na susjedno polje. Na svako polje pješak može doći najviše jednom. Gubi onaj igrač koji nema više gdje igrati (bilo da nema više »slobodnih« polja jer je pješak obišao sva polja, bilo da »slobodna« polja nisu susjedna).
Dokazati: Ako igrači najbolje igraju pobjeđuje drugi igrač za n neparno, a prvi igrač za n parno.

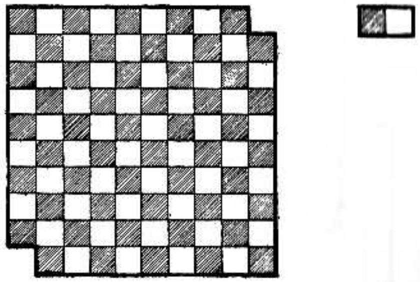
16.
Šahovska ploča 15x15

Može li se šahovska ploča 15x15 prekriti domino pločicama 2x1 (slika 32)?


Slika 32.

17.
Šahovska ploča 10x10

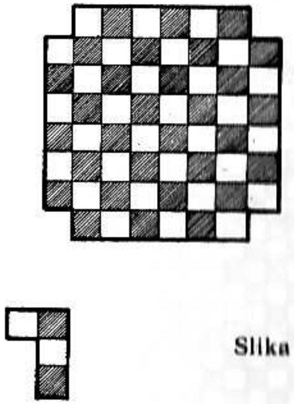
Može li se šahovska ploča 10x10, kojoj su odstranjena dva polja na suprotnim vrhovima, prekriti domino pločicama 2x1 (slika 33)?



Slika 33.

18.
Tetramino pločice

Može li se šahovska ploča 8x8, iz koje je u svakom vrhu izbačeno jedno polje, prekriti L tetramino pločicama (slika 34.)?



Slika 34.

19.
Pješaci

Na svako polje šahovske ploče 7x7 stavi se jedan pješak. Mogu li se pješaci razmjestiti da svaki pješak dođe na susjedno polje?

20.
Skakači

U donjem desnom i gornjem lijevom kutu šahovske ploče 8x8 nalaze se skakači crni i bijeli. Igrači povlače poteze naizmjenično. Bijeli počinje igru, a cilj igre je uzeti protivničkog skakača. Igra se završava neriješeno kada se ista pozicija ponovi tri puta. Dokazati da se igra mora završiti remijem ako oba igrača igraju najbolje!

21.
Igra pješacima

Na šahovskoj ploči 8x8 nalazi se u prvom i osmom redu 8 bijelih i 8 crnih pješaka respektivno. Bijeli počinje igru. Igrači izmjenično pomiču po jednog pješaka za jedno ili više polja u svom stupcu u bilo kojem smjeru, ali najdalje do ruba ploče, ili do protivničkog pješaka. Igru gubi onaj koji prvi dođe u situaciju da ne može povući potez. Dokazati da crni može da pobijedi bez obzira kako igrao bijeli.

22.
Delfin

Delfin se kreće po šahovskoj ploči ili jedno polje gore, ili jedno polje desno, ili jedno polje dijagonalno lijevo dolje. Može li delfin, polazeći iz donjeg lijevog kuta šahovske ploče 8x8, vratiti se na polazno mjesto, ali tako da svako polje obiđe točno jednom?

VII GLAVOLOMIJE I LOGIČKI ZADACI SA MATEMATIČKIH NATJECANJA

1. Zemljoradnk treba da izore svoje polje. On predvidi početi rano izjutra i završiti do 10 sati prije podne i da svaki sat izore 10 ari. Međutim, kad je završio polovinu svog posla, desi mu se neki kvar tako da je kod oranja druge polovine polja mogao izorati samo 5 ari na sat. Zemljoradnik je završio oranje u 12 sati. Kolika je bila veličina polja? Kada je počeo orati? Koliko sati je orao prvu polovinu polja, a koliko drugu?

(Republičko natjecanje SR Hrvatske, VII razred, 1974.)

.2 U tri posude nalazi se neka količina vode. Ako se 1/3 vode iz prve posude prelije u drugu posudu, a zatim 1/4 dobijene vode u drugoj posudi prelije u treću posudu, i na kraju 1/10 ukupne vode u trećoj posudi prelije u prvu posudu, onda će u svakoj posudi biti po 9 litara. Koliko je u početku bilo vode u svakoj posudi?

(Republičko natjecanje SR Srbije, VIII razred, 1975. god.)

3. U ribnjaku se nalazi 25 gladnih štuka. Jedna gladna štuka da bi se zasitila, mora da pojede tri štuke (bilo kakve — gladne ili site). Koliko je najviše moguće da ostane štuka u ribnjaku, a da sve štuke koje ostanu u ribnjaku budu site!

(Republičko natjecanje SR Crne Gore, VII razred, 1977. god.)

4. U jednom redu stoji 1000 učenika. Dozvoljeno je da svoja mjesta u redu zamijene samo oni učenici (tj. parovi učenika) koji imaju zajedničkog susjeda.
Da li je ovakvom promjenom mjesta moguće da učenik koji stoji na jednom kraju reda dospije na drugi kraj?
Odgovor obrazložiti!

(Savezno natjecanje, VII razred, 1977. god.)

5. Neki turistički brod ima 29 kabina sa ukupno 86 ležaja. Kabine su sa 2, 3 i 4 ležaja. Dokazati da je broj trokrevetnih kabina paran?

(Republičko natjecanje SR BiH, VIII razred, 1977. god.)

6. Na nekom natjecanju bilo je 13 zadataka. Za svaki pravilno riješen zadatak učenik dobiva 7 poena, a za svaki neriješeni zadatak dobiva 3 negativna poena.
Koliko zadataka je učenik ispravno riješio, ako je na kraju natjecanja dobio 51 poen?

(Republičko natjecanje SR Srbije, VIII razred, 1977. god.)

7. Prvi traktor može izorati neko polje za 15 sati, a drugi za 20 sati. Nakon jednog sata oranja prvim traktorom u pomoć je došao drugi traktor i zajedno su poorali cijelo polje. Koliko su sati ovi traktori orali zajedno?
(Republičko natjecanje SR Hrvatske, VIII razred, 1978. god.)

8. Strijelac gađa u metu i za svaki uspješan pogodak dobiva 5 bodova, a za svaki promašaj oduzimaju mu se tri boda. Kako je očito imao loš dan, strijelac je nakon serije hitaca, kojih je bilo više od 10, a manje od 20, postigao nula bodova.
Koliko hitaca je bilo u toj seriji i koliko je od njih bilo uspješnih?
(Savezno natjecanje, VII razred, 1979. god.)

9. Majka je, krenuvši u kupovinu, imala kod sebe samo novčane bonove u vrijednosti od 15 i 20 dinara. Petinu novca je potrošila za doručak plativši ga sa dva bona, a polovicu preostalog novca dala je za osnovne dnevne namirnice i platila ih je sa tri bona.
Kolika je ukupna novčana vrijednost bonova koje je majka imala kada je krenula od kuće?
(Savezno natjecanje, VII razred, 1980. god.)

10. Učenik je krenuo u školu između 8 i 9 sati ujutro i to u trenutku kada su se velika i mala kazaljka poklopile. Vratio se kući između 2 i 3 sata popodne u trenutku kada su kazaljke zatvarale ispruženi kut. Koliko je vremena proteklo od polaska do povratka?
(Republičko natjecanje SR Hrvatske, VII razred, 1980. godine)

11. Da li je moguće ivice kocke numerirati brojevima 11 ,12, 13, 14...22 tako da je zbroj brojeva pridružen trima bridovima koji izlaze iz istog vrha kocke, jednak? Obrazložiti odgovor.
(Pokrajinsko natjecanje SAP Vojvodina, VIII razred, 1980. god.)

12. Dan mladosti 1981. je u ponedjeljak. U koji dan će biti Dan mladosti 2000. godine.
(Republičko natjecanje SR BiH, VII razred, 1981. god.)

13. U razredu ima 20 dječaka. Četrnaestorica imaju plave oči, petnaestorica tamnu kosu, sedamnaestorica teže više od 40 kp, a osamnaestorica su viši od 160 cm. Dokazati da bar četvorica imaju sve navedene osobine.
(Pokrajinsko natjecanje SAP Kosovo, VIII razred, 1981. god.)

14. Na udaljenosti 125 metara pas je opazio zeca i pojurio za njim. Istog trenutka zec se dao u bijeg. Jednim skokom zec preskače pola metra, a pas 2 metra. Osim toga, u vremenu u kome zec 7 puta skoči, pas skoči dva puta. Koliku udaljenost je pretrčao pas od trenutka kad je ugledao zeca, do trenutka kad ga je ulovio?
(Republičko natjecanje, SR BiH, VII razred, 1982. god.)

15. Jedne godine 1. I i 1. IV pali su u četvrtak. Koliko u toj godini ima mjeseci sa 5 petaka?
(Savezno natjecanje, VII razred, 1983. god.)

16. Za obilježavanje stranica jednog rječnika upotrebljeno je 6821 znamenka. Koliko stranica ima taj rječnik?
(Pokrajinsko natjecanje, SAP Kosovo, VII razred 1983. god.)

17. Sa koliko nula se završava produkt svih prirodnih brojeva od 1 do 49?
(Republičko natjecanje, SR Hrvatske, VII razred, 1983. god.)

18. Iz jedne željezne šipke može se napraviti lanac od 80 karika, ili pak lanac od 100 karika, pri čemu jedna karika u lancu od 100 karika ima za 5 grama manju masu od jedne karike u lancu od 80 karika.
Kolika je masa željezne šipke?
(Republičko natjecanje SR Hrvatske, VII razred, 1984. god.)

19. Vozeći paralelno sa gradskom autobusnom linijom između dva dijela grada, biciklista je primijetio da ga je svakih 9 minuta stizao, a svakih 6 minuta susretao autobus te linije. U kojim vremenskim intervalima autobusi te linije kreću sa polazne stanice? (Autobusi sa stanice kreću u jednakim vremenskim razmacima i kreću se približno jednakim brzinama; biciklista se također kreće jednolikom brzinom).
(Republičko natjecanje SR Makedonije, VIII razred, 1984. god.)

20. U izgradnji vodovoda učestvuju dva bagera. Prvi bi iskopao jedan kanal za 20 sati, a drugi bi ga zasuo za 30 sati. Oba bagera su počela da rade istovremeno. Poslije 48 sati su prekinuli sa radom. Koliko jarka je ostalo nezasuto? (Svi kanali na kojima su bageri radili imaju jednake dimenzije).
(Republičko natjecanje, SR Slovenija, VII razred, 1984. god.)

21. Konopac dugačak 120 m razrezati na 120 jednakih komada. Uzimam makaze i svake sekunde činim jedno rezanje. Ako započnem u 12 h, kada ću završiti?
(Matematički turnir KMM »Arhimedes«, VI razred, 1979. god.)

22. Imam dvije hrpe kuglica: na jednoj su plave, a na drugoj crvene kuglice (ne znamo koliko ih ima u kojoj hrpi). Sa prve hrpe uzmemo određeni broj kuglica (koliko želimo) i stavimo ih na drugu hrpu; onda sa druge hrpe uzmemo isti broj kuglica (ma kojih) i stavimo ih na prvu hrpu. Ovu »operaciju« ponovimo deset puta. Čega će poslije toga biti više: plavih kuglica u drugoj hrpi ili crvenih kuglica u prvoj hrpi?
(Matematički turnir KMM »Arhimedes«, VII razred, 1976. god.)

23. Lice A uvijek govori istinu, a lice B uvijek laže. Koje pitanje im treba postaviti da bi oba lica dala isti odgovor? (Pretpostavljamo da oni odgovaraju samo sa »da« ili »ne«).
(Matematički turnir KMM »Arhimedes«, VII razred, 1975. god.)

24. Zadatak iz priče »Crna Maska iz Al-Džebre«, objavljene u »Arhimedesu«: »Koliko sam imala zrna graška, ako je Nulčić pojeo 1/3 zrna, a zatim je uzeo ili 2 ili 4 ili 6 zrna, polovinu ostatka sam izgubila, a Nulčić mi je vratio polovinu onoga što je uzeo; zatim sam dva zrna poklonila susjedu, a posljednje zrno je odnio vjetar? Rješavači velikih problema, čekam vaš odgovor! Mahuna.«
(Matematički turnir KMM »Arhimedes«, VIII razred, 1982. god.)

25. Tri ribara ulovila su ukupno 29 riba. Počeli su da prave riblju čorbu. Kada je jedan za čorbu dao 5 riba, drugi 4 ribe i treći 2 ribe, onda je svakome ostao isti broj riba. Koliko je riba svaki od njih ulovio?
(Matematički turnir KMM »Arhimedes«, V razred, 1984. god.)

RJEŠENJA

I GLAVOLOMIJE ZA NAJMLAĐE

1. Kocka
125 litara

2. Katnica
Ivica će prijeći 9, a Vlado 4 međuprostora između dva kata. Prema tome, Ivica je u odnosu na Vladu prešao 2,25 puta veći put.

3. Požar
Zapalit će vatru i stat će na mjesto gdje izgori. Pošto je pržio ribu kod sebe je imao šibice.

4. Trka
Kada bude kod desete zastavice atletičar će prijeći devet jednakih rastojanja. Kada, pak, bude kod dvadesete zastavice on će prijeći devetnaest takvih rastojanja. Iz razmjera $9:19=10:x$ izlazi, $x=190/9$.

5. Lift
Bio je malen rastom te dirku za IX kat nije mogao dohvatiti.

6. Bez računanja
Trokut, jer je to degenerirani trokut ploštine o.

7 Ostavština
Nijedan sin nije uzeo svog konja.

8. Veliki i mali čovjek
Vrijeme je bilo sunčano.

9. Jeziva priča
Da je umro niko ne bi mogao saznati šta je sanjao.

10. Čudna trgovina
Kupovao je kućni broj. Cijena jedne znamenke iznosi 30 dinara.

11. Zagonetna riječ
KAMEN — NEMA K

12. Nećak
Petar je Vladin sin.

13. Veste
Skinuo je vestu i drugi klinac, tj. obojica su skinula vestu; prema tome, nije je skinuo sam.

14. Težina kaveza
Neznatno je teži sa papagajem u letu, jer će papagaj mahanjem svojih krila stvarati udare na dno kaveza i sila tih udara će na vagi pokazivati razliku u težini između punog i praznog kaveza.

15. Kratak život
Arist je živio svega 19 godina (nema nulte godine)

16. Kad polovina nije polovina

Ako rimsko XII — vodoravnim pravcem presiječemo popola.

17. Zaboravni taksist

Išao je pješice.

18. Čudan račun

Račun je ispravan u binarnom sistemu

$10_2 \cdot 10_2 = 100_2$, produkt broja godina Milenka i Slobodana
$10_2 + 1_2 = 11_2$, broj godina Milenka nakon godinu dana
$10_2 + 10_2 = 100_2$, broj godina Slobodana i Milenka zajedno sada
$11_2 + 1_2 = 100_2$, broj godina Bosiljke nakon godinu dana.

19. Eskimi

Kako mogu ići sjevernije od sjevernog pola.

20. Kratka godina

777. godina ima tri sedmice.

21. Lopov

Nitko ne kuca na svoja vrata. Prema tome, lopov je Bil.

22. Snoviđenje

Zato što je spavao za vrijeme radnog vremena.

II GLAVOLOMNE GLAVOLOMIJE

1. Nova škola

Neka je registarski broj Jeličinog automobila abcd. Pošto je abcd djeljiv sa 765, djeljiv je sa 5; 9 i 17. Posljednja znamenka broja abcd je 5, tj. d=5.

Za d=5 imamo:
(1) $a+b = 5c+1$

Odmah se uočava da je c različit od nule.
a) Neka je c=1. Jednakost (1) postaje:
(1.1) $a+b = 6$

No, pošto je $a+b+c+d = 12$, broj nije djeljiv sa 9, a to se protivi početnim uvjetima.
b) Neka je c = 2. Jednakost (1) postaje:
(1.2) $a+b = 11$

Sada je zbroj $a+b+c+d$ djeljiv sa 9, a znamenke a i b mogu biti 3 i 8, 8 i 3, 7 i 4, 4 i 7.

Od četiri moguća broja abcd samo je 3825 djeljiv sa 17 i on zadovoljava sve uvjete.
c) Neka je c = 3. Jednakost (1) postaje:
(1.3) $a+b = 16$

No, pošto je $a+b+c+d = 24$, broj abcd nije djeljiv sa 9, a to se protivi početnim uvjetima.

Prema tome, registarski broj Jeličinog automobila je 3825.

Neka je:
x — broj godina Jelice
y — broj godina Emila
z — broj godina za koje će biti sagrađena nova škola

Iz početnih uvjeta imamo slijedeće jednakosti:
(2) $x-y=z$
(3) $xyz-x=3825$, odnosno, $x(yz-1)=3^2 \cdot 5^2 \cdot 17$

Budući da se radi o cijelim brojevima, imamo slijedeće slučajeve:

x = 3	yz = 1276
x = 5	yz = 766
x = 9	yz = 426
x = 15	yz = 256
x = 17	yz = 226
x = 25	yz = 154
x = 45	yz = 86
x = 51	yz = 76
x = 75	yz = 52

$x = 85 \quad yz = 46$
$x = 153 \quad yz = 26$
$x = 225 \quad yz = 18$
$x = 255 \quad yz = 16$
$x = 425 \quad yz = 10$
$x = 765 \quad yz = 6$
$x = 1275 \quad yz = 4$

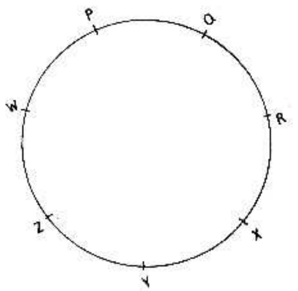
Pošto je x broj godina nastavnice Jelice, a y broj godina nastavnika Emila, mogući (logični) su samo slijedeći slučajevi:

(1) $x = 25$, $yz = 154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$, $y = 22, z = 7$
(2) $x = 45$, $yz = 86 = 2 \cdot 43$, $y = 43, z = 2$
(3) $x = 51$, $yz = 76 = 2^2 \cdot 19$, $y = 38, z = 2$
(4) $x = 75$, $yz = 52 = 2^2 \cdot 13$, $y = 26, z = 2$
(5) $x = 85$, $yz = 46 = 2 \cdot 23$, $y = 23, z = 2$

Uvjet (2) zadatka da je $x - y = z$ zadovoljava samo slučaj $x = 45$, $y = 43$, $z = 2$. Prema tome radnici O. Š. »Beljska mladost« će useliti u novu školu za dvije godine.

Napomena. Uvjete zadatka zadovoljava i slučaj $x = 25$, $y = 14$, $z = 11$, ali je nelogično da nastavnik ima 14 godina.

2. Krug



Slika 35.

Pretpostavimo da je Branković na mjestu X i da trkači trče u smjeru kazaljke na satu.

Trkač čiji je prethodnik ujedno sljedbenik Brankovićeva sljedbenika nalazi se na mjestu P, a trkač čiji je sljedbenik ujedno prethodnik Brankovićeva prethodnika nalazi se na mjestu W.

Kako su ta dva trkača jednako udaljena od Emila, proizlazi da je Emil na mjestu X, tj. ime Brankovića je Emil. Isto rješenje se dobije i u slučaju obrnutog kretanja.

3. Problem Smitove starosti

U vrijeme kad su se upoznali, Tom je imao 3x, a njegova supruga x godina. Kada je vođen razgovor Tom je imao 5x godina, a njegova supruga 3x godina.. Kada supruga bude triput starija ona će imati 9x godina, a Tom 11x.

$$9x + 11x = 100$$
$$x = 5$$

Prema tome, Tom ima 25 godina i idućeg 29. II bi trebao imati 29 godina, no kako 1900. godina nije prestupna, imat ćemo idućeg 29. II 33 godine.

4. Zbrka oko godina

Odmah zaključujemo da zbroj godina tih triju osoba mora biti paran broj. Iz produkta $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ se mogu izvesti ovi mogući slučajevi zbroja starosti tih osoba.

$$3 + 4 + 35 = 42$$
$$3 + 5 + 28 = 36$$
$$3 + 7 + 20 = 30$$
$$4 + 5 + 21 = 30$$
$$4 + 7 + 15 = 26$$
$$5 + 7 + 12 = 24$$

Pošto je Maja znala svoj kućni broj, a nije se mogla odlučiti, odmah uočavamo da se ona dvoumila između ove dvije mogućnosti:

$$3 + 7 + 20 = 30$$
$$4 + 5 + 21 = 30$$

Nakon što joj je Ana rekla da je samo jedna osoba starija od njene tetke, Maja je lako riješila zadatak.

Mi zaključujemo da je Majina tetka mogla imati 6 ili 20 godina. Pošto je rečeno na kraju zadatka da je Majina tetka bila odlična učenica, za vrijeme svog školovanja, zaključujemo da je Majina tetka stara 20 godina (sa 6 godina se tek polazi u školu).

5 Izlet

Neka je bilo x učenika iz svakog razreda, tj. 4 x ukupno. Iz Stipine izjave zaključujemo da je nestalo x/2 učenika V razreda. Iz Ivičine izjave zaključujemo da je nestalo x učenika VI i VII razreda. Neka je y broj nestalih učenika VIII razreda. Iz Josipove izjave zaključujemo da je:

$$(x/2 + x + y) = 1{,}5 \cdot (x - y)$$
$$1{,}5x + y = 1{,}5x - 1{,}5\,y$$

Ova jednakost je valjana samo za $y = 0$. Dakle, nije nestao nijedan učenik VIII razreda i za taj razred se mogao održati sat matematike u prirodi.

6. Zaboravni Damir

Damir je mogao uzeti bilo koji broj palidrvaca od 1 do 10. U kutiji je preostalo: 49, 48, 47, 46, 45, 44, 43, 42, 41 ili 40 palidrvaca. Kada od bilo kojeg od ovih brojeva oduzmemo zbroj njegove desetice i jedinice uvijek dobivamo 36.

Prema tome, Damiru je preostalo 36 palidrvaca.

7. Zamijenjeni dresovi

Kako je i na terenu i na klupi jednak broj jednih i drugih igrača, zaključujemo da je prije početka utakmice bio isti broj igrača »Mladosti« i »Jedinstva«. Neka je x broj igrača »Mladosti«, odnosno »Jedinstva«, a y broj igrača »Jedinstva« koji su uzeli plave dresove.

Znajući da je 1/7 igrača »Mladosti« uzela bijele dresove i podatak da na klupi za rezervne igrače nedostaje jedan igrač u bijelom dresu da ih bude dvaput više, imamo slijedeću jednakost:

$$(8/7\ x - y - 11) + 1 = 2\ .\ (6/7\ x + y - 11)$$

Odavde sređivanjem imamo:

$$x = \frac{84 - 21y}{4}$$

Ova jednadžba ima rješenje samo za y = 0 (x je prirodan broj, a y nula, ili prirodan broj).

Prema tome, nijedan igrač »Jedinstva« nije uzeo plavi dres, pa ni centarfor.

8. Sportaš Baranje

Ukupan broj bodova sve trojice sportaša iznosi 17 + 10 + 8 = 35. Rastavimo ukupan broj bodova na proste faktore

$$35 = 5\ .\ 7$$

Odavde se odmah zaključuje da je bilo pet članova žirija, odnosno, da je zbroj bodova na jednom listiću iznosio 7 (5 ne može biti jer je suma tri različita (prirodna) pribrojnika veća od pet).

No, pošto se sedam može jedinstveno rastaviti na zbroj tri različita (pr.) pribrojnika:

$$7 = 1 + 2 + 4$$

odmah uočavamo da I mjesto donosi 4 boda, II 2 boda, III 1 bod.

Imamo dvije mogućnosti koje zadovoljavaju uvjet da Janković ima 17, Perić 10, a Marić 8 bodova, te da I mjesto donosi 4 boda, II 2 boda, a treće 1 bod.

1)	Janković	4 4 4 4 1	2)	Janković	4 4 4 4 1
	Perić	2 2 2 2 2		Perić	1 2 2 1 4
	Marić	1 1 1 1 4		Marić	2 1 1 2 2

Iz podatka da Janković i Perić nisu bili jednak broj puta ispred Marića, odmah zaključujemo da svim uvjetima zadatka udovoljava druga mogućnost.

I	II	III	IV	V
1. Janković	1. Janković	1. Janković	1. Janković	1. Perić
2. Marić	2. Perić	2. Perić	2 Marić	2 Marić
3. Perić	3. Marić	3. Marić	3. Perić	3. Janković

9. Okrugli stol

Pretpostavimo da je bilo trinaest učenika. Tada Ivica, odnosno Branko, mogu dobiti slijedeće produkte:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 10 &= 10 \\ 2 \cdot 9 &= 18 \\ 3 \quad 8 &= 24 \\ 4 \cdot 7 &= 28 \\ 5 \cdot 6 &= 30 \\ 6 \cdot 5 &= 30 \\ 7 \cdot 4 &= 28 \\ 8 \cdot 3 &= 24 \\ 9 \cdot 2 &= 18 \\ 10 \cdot 1 &= 10 \end{aligned}$$

No, pošto se nijedan par produkata ne razlikuje za 9, zaključujemo da je bilo dvanaest učenika.
Mogući prdoukti Ivice, odnosno Branka su:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 9 &= 9 \\ 2 \cdot 8 &= 16 \\ 3 \cdot 7 &= 21 \\ 4 \cdot 6 &= 24 \\ 5 \cdot 5 &= 25 \\ 6 \cdot 4 &= 24 \\ 7 \cdot 3 &= 21 \\ 8 \cdot 2 &= 16 \\ 9 \cdot 1 &= 9 \end{aligned}$$

Odmah uočavamo da je Ivica imao produkt 5 . 5, a Branko 2 . 8 ili 8 . 2. Dakle, Ivica je mogao imati produkt 2 . 8 ili 8 . 2, zato što između Ivice i Branka sjede dva, odnosno osam učenika.
Prema tome, Ivica je dobio produkt 16.

10. Nepoznati brojevi

Iz Zoranovog prvog odgovora zaključujemo da traženi brojevi nisu oba istovremeno prosti. Iz Sinišine prve izjave zaključujemo da je njemu zadan zbroj, broj koji se ni na koji način ne može rastaviti na zbroj dvaju istovremeno prostih pribrojnika.

Dakle, taj zbroj je jedan od članova skupa S.

$S = \{11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53, 57, 59, 61, 65, 67, 71, 77, 79, 83, 87, 89, 93, 95, 97\}$

Zoran nakon Sinišine izjave zna da su traženi brojevi takvi da je samo jedan od njih paran, a drugi neparan, te da zbrojeni moraju dati kao zbroj isključivo neki od brojeva iz skupa S i to mu je dovoljno da odredi te brojeve i izjavi : »Ja sada znam koji su to brojevi«.

To znači da je Zoranov broj takav da je od svih mogućih rastava na paran i neparan faktor, samo jedan takav da zbrojeni daju broj iz skupa S. Nakon Zoranove izjave da on sada zna koji su to brojevi i Siniša ih zna i izjavljuje: »Ako ih ti znaš, znam ih i ja«.

To znači da Sinišin zbroj ima jedinstven rastav na paran i neparan pribrojnik koji pomnoženi daju broj koji omogućuje Zoranu da odredi o kojim se brojevima radi.

Zbog toga iz skupa S možemo odmah eliminirati sve one zbrojeve koji se na dva ili više načina mogu rastaviti na pribrojnike oblika $2k + p$, gdje je k prirodan broj veći od 1, a p prost broj.

Ako je, naime, za neki zbroj $S = 2^k + p = 2^n + q$, $n \neq k$, $p \neq q$, Siniša ne bi mogao znati o kojim se brojevima radi, dok bi Zoran i za produkt $2^k \cdot p$ i za produkt $2^n \cdot q$ odmah znao koji su to brojevi.

Kao mogući zbrojevi iz skupa S preostaju ovi:

$$Z = \{17, 29, 41, 53, 59, 65, 89, 97\}$$

Od ovih brojeva, opet, možemo eliminirati sve one koji osim rastava $Z = 2^k + p$ imaju i rastav $Z = a + b$ na paran i neparan pribrojnik takav da kad pomnožimo a i b dobiveni produkt $a \cdot b$ ima samo rastav na a koji je paran i b koji je neparan i daju zbroj iz skupa S. Na primjer broj $97 = 8 + 89 = 14 + 83$. Ako Zoran dobije $712 = 8 \cdot 89$ njemu će biti dovoljan podatak da je jedan od faktora paran a drugi neparan da bi znao da se radi o brojevima 8 i 89.

Također, ako Zoran dobije produkt $1162 = 14 \cdot 83$ znat će da se radi o brojevima 14 i 82 jer od svih mogućih rastava broja 1162 na paran i neparan faktor samo faktori 14 i 83 daju produkt iz skupa S.

U tom bi slučaju Siniša znao da Zoran može odrediti brojeve i u jednom i u drugom slučaju i ne bi rekao: »Ako ih ti znaš znam ih i ja«. Dakle, 97 nije Sinišin zadan broj.

Na isti način mogu se isključiti brojevi (zbog navedenih dvostrukih rastava).

$$\begin{aligned} 89 &= 16 + 73 = 18 + 71 \\ 65 &= 4 + 61 = 12 + 53 \\ 59 &= 16 + 43 = 18 + 41 \\ 53 &= 16 + 37 = 12 + 41 \\ 41 &= 4 + 37 = 12 + 29 \\ 29 &= 16 + 13 = 11 + 18 \end{aligned}$$

Preostaje broj 17 kod kojeg je samo rastav $17 = 4 + 13$ takav, da Zoran kada dobije produkt $52 = 4 \cdot 13$ može znati o kojim se brojevima radi.

Svi drugi rastavi broja 17 na paran pribronjik a i neparan pribrojnik b su takvi da produkt $a \cdot b$ osim ovog rastava ima još jedan rastav $c \cdot d$ na paran i neparan faktor takav da je $c + d$ kao $a + b$ iz skupa S. U takvom slučaju Zoran ne bi mogao odrediti o kojim se brojevima radi. Npr. $17 = 2 + 15$. Ako Zoran dobije produkt 30 $(2 \cdot 15 = 6 \cdot 5)$, neće se moći odlučiti između ova dva rastava jer $11 = (6 + 5)$ i $17 = (2 + 15)$ su iz S. Dakle, traženi brojevi su 4 i 13.

11. Tri sina

Neka je:

x — broj godina Ivice
y — Vladina ocjena iz matematike
z — starost jednog djeteta

Imamo jednakost:

$$11x = yz$$

Odavde zaključujemo da je $z = 11$, $x = y$.
Prema tome, jedno dijete ima 11 godina, a Ivica ima onoliko godina kolika je Vladina ocjena iz matematike.
Rastavimo 440 na proste faktore.

$$440 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$$

Uvjete zadatka (da jedno dijete ide u vrtić a dva u osnovnu školu) zadovoljavaju ova dva slučaja:

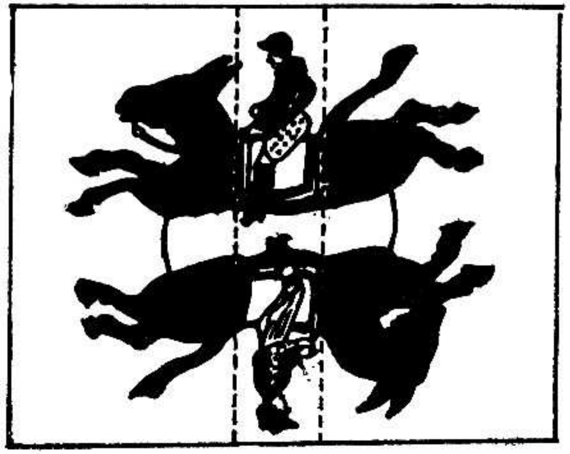
$$\begin{aligned} 440 &= 4 \cdot 10 \cdot 11 \\ 440 &= 5 \cdot 8 \cdot 11 \end{aligned}$$

Prema tome, Vlado ima ocjenu 4 iz matematike (5 ne može imati jer je Petar bolji matematičar od Vlade).

Dakle, Ivica ima 4 godine.

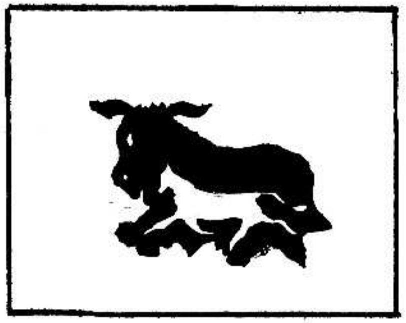
III GLAVOLOMIJE U SLICI

1. Loydovi konji



Slika 36.

2.



Slika 37.

3. Zupčanici

Svaka dva povezana zupčanika okretat će se u suprotnom smjeru. U istom smjeru okretat će se svi parni, odnosno svi neparni zupčanici. Pošto je posljednji, jedanaesti, povezan sa prvim, on bi se trebao okretati u suprotnom smjeru u odnosu na prvi, što je protivurječno prethodnim zaključcima.
Dakle, zupčanici ovog sistema ne mogu se okretati.

4. Fotografija godine

Na osnovu sjene.

5. Gradski sat

Navedimo sve momente poklapanja minutne i satne kazaljke u toku 12 sati.

(zaokruž. na cijele sekunde)

1)	0 h 0 min		
2)	1 h 5 5/11 min	=	1 h 5 min 27 sek
3)	2 h 10 10/11 min	=	2 h 10 min 54 sek
4)	3 h 16 4/11 min	=	3 h 16 min 22 sek
5)	4 h 21 9/11 min	=	4 h 21 min 49 sek
6)	5 h 27 3/11 min	=	5 h 27 min 16 sek
7)	6 h 32 8/11 min	=	6 h 32 min 44 sek
8)	7 h 38 2/11 min	=	7 h 38 min 11 sek
9)	8 h 43 7/11 min	=	8 h 43 min 38 sek
10)	9 h 49 1/11 min	=	9 h 49 min 6 sek
11)	10 h 54 6/11 min	=	10 h 54 min 32 sek
12)	12 h 0 min		

Sekundna kazaljka na slici 5. je pokazivala 49 sekundi.
Dakle, bilo je 4 h 21 min i 49 sekundi.

6. Željezni kvadar

Težio je 16 kp.

7. Kocka

Vidimo 6 ili 7 kocaka, zavisno pod kojim kutom gledamo.

8. Vaga

Neka je:

x — težina jabuke
y — težina kruške
z — težina šljive
w — težina dunje

Postavimo jednadžbu:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & 3x + 2y = 18z \\
(2) & w + x = y + 6z \\
(3) & w + y = 5x + 6z \\
\hline
(1) & 3x + 2y = 18z \\
(2) - (3) & 6x = 2y, \text{ odnosno } 3x = y
\end{array}
$$

Rješavanjem ovog sistema dobivamo:

$x = 2z$, odnosno jabuka je teška kao dvije šljive.

IV GLAVOLOMNI KRIPTOGRAMI

1. Ukusno voće

Iz jednakosti $A + E = J$ (odnosno $A + E = 10 + J$) i $A + R + 1 = 10 + R$ zaključujemo da je $A = 9$. Dalje, iz $2K + 1 = 9$ proizlazi da je $K = 4$.
Lako uočavamo da E može biti samo 2 ili 3, a J samo 1 ili 2.
Pretpostavimo li da je $J = 1$, tada je $E = 2$, $P = 6$.
Prema tome, svakom od preostalih slova B, O, R, Š, U može biti pridružena jedna od preostalih znamenaka 0, 3, 5, 7, 8.
Koristeći to i jednakosti $Š+U=10+B$, $B+U+1=10+0$ zaključujemo da je $B=5$, $O=3$, $R=0$, $U=7$, $Š=8$.
Pretpostavka $J=2$ dovodi nas do kontradikcije.
Dakle, imamo:

$$
\begin{array}{r}
195749 \\
+\;407842 \\
\hline
603591
\end{array}
$$

2. Ljetovanje

Odmah uočavamo da je $H=1$, $O=0$, dok V može biti 8, ili 9. Ako je $V=8$, onda je $E+O+1=10+T$, pa E mora biti 9, a T 0, što se protivi činjenici da je T različito od 0.
Dakle, $V=9$. Tada imamo jednakosti $T+Ć=10+E$ (odnosno $T+Ć+1=10+E$) i $E+1=T$. Ako bi bilo $T+Ć=10+E$, onda bi bilo $Ć=9$, a to je nemoguće jer Ć mora biti različito od V.
Iz $T+Ć+1=10+E$ proizlazi da je $Ć=8$.
Sada imamo:

$$
\begin{array}{r}
9\,E\,T\,A \\
+\;1\,0\,8\,E \\
\hline
1\,0\,T\,E\,L
\end{array}
$$

Dalje uočavamo da E mora biti 5, odnosno $T=6$. Imajući u vidu to kao i da je $A+E$ veće od 10, utvrđujemo da je $A=7$, $L=2$.
Konačno rješenje glasi:

$$
\begin{array}{r}
9567 \\
+\;1085 \\
\hline
10652
\end{array}
$$

3. Ilija je žedan

$$
\begin{array}{r}
69656 \\
+\;96078 \\
\hline
165734
\end{array}
$$

4. Veliki matematičar

ARM je zbroj dva dvoznamenkasta broja, pa je A=1. 1RM+DR=RAE je manje od 300 pa zaključujemo da je R=2. Dalje se lako uočava da je D=9, H=3, I=4, M=5, E=7. Rješenje zadatka je:

1 2 3 4 5 7 9
A R H I M E D

5. Engleska aritmetika

Imamo slijedeće jednakosti:

(1) $2N+2Y=10x$
(2) $2T+2E+x=10y$
(3) $3N+2T+y=H+10z$
(4) $3E+z=G+10u$
(5) $3W+u=I+10v$
(6) $3T+v=E$

Iz (1) imamo da je N+Y jednako 5, 10 ili 15, kada je x jednako 1, 2 ili 3. Iz (2) zaključujemo da je x paran broj, tj. da je x=2. Sada imamo: N+Y=10. Jednakost (2) postaje:

$T+E=5y-1$

Odavde se dosta lako uočava da T+E može biti 4, 9 ili 14. No iz (6) izlazi da je T manje ili jednako od 3, što znači da T+E može biti samo 4 ili 9. Pretpostavimo da je T+E=4. Iz (6) se lako vidi da je T=1, E=3, v=0. Dalje se lako uviđa da je W=2 (jer ne može biti niti 0, niti 1, niti 3), dok N može biti 4 ili 6. Za N=6 bilo bi G=1, što je nemoguće zbog T=1. Znači N=4. Odmah vidimo da je Y=6 i na kraju H=5. Konačno imamo:

$$\begin{array}{r} 123416 \\ 123416 \\ 123416 \\ 134 \\ +\ 134 \\ \hline 370516 \end{array}$$

Pretpostavka T+E=9 dovodi nas nas do kontradikcije.

6. Španjolska aritmetika

Imamo slijedeće jednakosti:

(1) $5O=E+10x$
(2) $5R+x=T+10y$
(3) $5T+y=N+10z$
(4) $5A+z=I+10u$
(5) $5U+u=E+10v$
(6) $5C+v=V$

Odmah se uočava da je C=1. Iz (1) proizlazi da je E jednako 0 ili 5.

Ako je E=0, onda je i A=0, a to je nemoguće. Prema tome E=5, zbog čega je ponovo A=0. Dalje uočavamo da su U i O neparni, da I

može biti samo 2, 3 ili 4, da U može biti 3 ili 7 (9 ne može biti jer bi onda i V bilo 9). O može biti 3, 7 ili 9, V je 6 ili 8.

Ako je I=4, onda je T=9, ali je tada i O=9 što je nemoguće.

Ako je I=3, onda je T=6, ali je i O=3 što je opet nemoguće.

Prema tome, I=2, T=4, O=9. Dalje se lako uviđa da je R=6, V=8, U=7.

Rješenje zadatka je:

$$\begin{array}{r} 170469 \\ 170469 \\ 170469 \\ 170469 \\ +\ 170469 \\ \hline 852345 \end{array}$$

7. Jugoslavenska aritmetika

Imamo slijedeće jednakosti:

(1) $5N+2A=10x$
(2) $5A+2L+x=10y$
(3) $5D+2U+P+y=10z+S$
(4) $4E+2N+z=10u$
(5) $5J+u=D$

Iz (1), (3), (4), (5) proizlazi.

J=1.

A je jednako 0 ili 5.

N je paran broj, a različit od 0. (jer bi onda NULA bio troznamenkast), D je veće ili jednako od 6, u manje ili jednako od 4, dok je z 4 ili 6 (2 ne može biti zbog D je veće ili jednako od 6).

a) Pretpostavimo da je A=0.

Tada jednakosti (1) i (2) postaju:

(1.1) $5N=10x$
(2.1) $2L+x=10y$

Odavde se uočava slijedeće:

x je paran broj i to 2 ili 4.

N je 4 ili 8.

1) Neka je N=4. Tada iz (1.1) proizlazi da je x=2, a iz (2.1) L=9 i y=2.

Jednakost (4) postaje:

(4.1) $4E+8+z=10u$

Ako je z=6, onda E može biti ili 4, što je nemoguće zbog N=4, ili 9, što je također nemoguće zbog u je manje ili jednako od 4.

Ako je $z=4$, onda je $E=2$, $u=2$, $D=7$, pa jednakost (3) postaje:

(3.1) $2U+P=3+S$

U, P, S i T mogu biti 3, 5, 6 ili 8.

Jednakost (3.1) je zadovoljena za $U=3$, $P=5$, $S=8$. Preostala je znamenka 6. Dakle, $T=6$.

Prema tome: $A=0$, $N=4$, $E=2$, $D=7$, $J=1$, $U=3$, $P=5$, $S=8$, $L=9$, $T=6$.

```
 12704
 12704
 12704
 12704
 12704
  4390
  4390
 + 526
 -----
 72826
```

2) Neka je $N=8$. Tada je $x=4$.

Jednakost (4) postaje:

(4.2) $4E+16+z=10u$

Jednakost (4.2) je zadovoljena za: $E=5$, $z=4$, $u=4$, (tj. $D=9$).
Iz (2.1) slijedi da je za $y=1$, $L=3$.
Jednakost (3) postaje:

(3.2.1) $6+2U+P=S$, za $y=1$

Odavde se lako vidi da jednakost (3.2.1) ne udovoljava uvjetima zadatka. Prema tome, za $A=0$ i $N=8$ zadatak nema rješenja.

b) Pretpostavimo da je $A=5$.

Tada jednakosti (1) i (2) postaju:

(1.2) $5N+10=10x$
2.2.) $25+2L+x=10y$

Jednakosti (1.2) i (2.2) zadovoljavaju uvjete zadatka ako je $x=3$, $y=4$, $N=4$, $L=6$.

Jednakost (4) postaje:

(4.3.) $4E+8+z=10u$

Ako je $z=6$, nema rješenja ($u=3$, $E=4$, a to je nemoguće jer je $N=4$).
Ako je $z=4$, imamo dva rješenja: $u=2$, $E=2$, odnosno $u=4$, $E=7$.
U slučaju $u=2$, $E=2$, jednakost (3) postaje:

(3.3.) $2U+P=1+S$

Jednakost (3.3) je zadovoljena ako je $U=0$, $S=8$, $P=9$. Preostala je znamenka 3.

Prema tome, $T=3$.

Za slučaj $u=4$, $E=7$ nemamo rješenja.

Prema tome drugo rješenje glasi:

$J=1$, $A=5$, $L=6$, $N=4$, $E=2$, $U=0$, $S=8$, $P=9$, $D=7$, $T=3$.

```
 12754
 12754
 12754
 12754
 12754
  4065
  4065
 + 923
 -----
 72823
```

8. Samo šestice

Imamo slijedeće jednakosti:

(1) $T \times T=T+10a$
(2) $S \times T=S+10b$
(3) $E \times T=E+10c$
(4) $Š \times T=Š+10d$

Uočavamo: T može biti samo 6. Iz (2), (3), (4) slijedi da su E, S i Š parni i to 2, 4 ili 8.

Dalje lako uočavamo da Š mora biti 2 (jer u protivnom produkt Š x ŠEST ne bi bio četveroznamenkast. Dalje imamo $E=8$, $S=4$.

Prema tome:

```
   2846x2846
   ---------
    15076
   11384
  22768
 +5692
 -------
  8099716
```

9. Samo sedmice

```
  90625x90625
 ------------
 815625
    543750
     181250
      453125
 ------------
 8212890625
```

10. Novi grad

Imamo slijedeće jednakosti:

(1) $D \times I = I + 10a$
(2) $A \times I = V + 10b$
(3) $R \times I = O + 10c$
(4) $G \times I = N + 10d$

Odmah vidimo da je $D=6$, a slovima I, N, O, V su pridružene znamenke 0, 2, 4, 8. Pretpostavimo da je $I=2$. A x NOVI daje četveroznamenkast broj, a pošto A ne može biti 0, 1, 2, a N može biti samo 4 ili 8, dolazimo da kontradikcije. Pretpostavimo da je $I=4$. Tada N mora biti 2, ali A ne može biti 0, 1, 2, 3, 4 te opet dolazimo da kontradikcije.

Prema tome, $I=8$, $N=2$, $A=3$, i lako dolazimo do rješenja.

```
   2048x9536
   ---------
   12228
   6144
  10240
 18432
 --------
 19529728
```

11. Novi Sad

```
4065x327
--------
12195
 8130
+28455
-------
1329255
```

12. Kriptogram Stivena Barra

```
 99x99
 -----
 891
891
----
9801
+190
-----
10000
```

13. Kriptogram Henry Dudeneya

```
 17x4
 ----
 68
+25
---
 93
```


14. Kriptogram Frederic Shoo-a

```
  179x224
  -------
   716
  358
+358
-----
40096
```

15. Jedinstvena osmica

Odmah uočavamo da su druga i četvrta znamenka kvocijenta nule. Posljednja znamenka kvocijenta mora biti 9 (jer samo 9 x XXX daje četveroznamenkast broj).

Divizor mora biti manji od 125 (jer 8 x 125 daje četveroznamenkast broj). Prva znamenka kvocijenta mora biti veća od 7 (jer kad 7 x divizor oduzmemo od prve četiri znamenke dividenda, dobivamo troznamenkast broj, a to se protivi zadanim uvjetima).

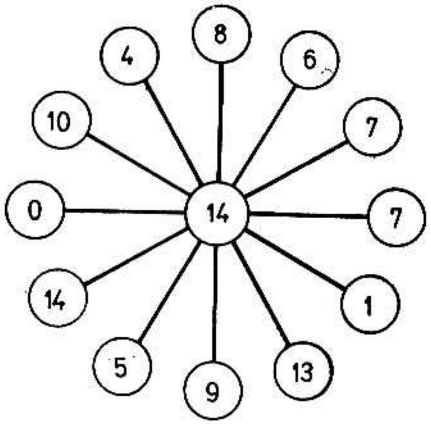
Prema tome, prva znamenka kvocijenta je 8, tj. kvocijent iznosi 80809. Divizor mora biti veći od 123, jer 80809 x 123 daje sedmeroznamenkast broj. Dakle, divizor je 124, pa je rješenje zadatka:

```
10020316:124 = 80809
-992
----
  1003
  -992
  ----
   1116
  -1116
  -----
      0
```

V NUMERIČKE GLAVOLOMIJE

1. Isti odnos
566-665

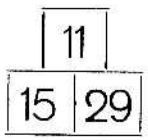
2. Prazan kružić



Slika 38.

3. Prazan kratratić

(13+15): 7=4
(14+18): 8=4
(15+29):11=4



Slika 38.

4. Suvišan kvadrat

$4 \cdot 1 + 2 = 6$
$4 \cdot 6 + 2 = 26$
$4 \cdot 26 + 2 = 106$

$4 \cdot 5 + 2 = 22$
$4 \cdot 22 + 2 \neq 112$

22	5
112	662

Slika 39.

5. Neispunjeni kvadrat

1	2	3	4	5
16	17	18	19	6
15	24	25	20	7
14	23	22	21	8
13	12	11	10	9

Slika 40.

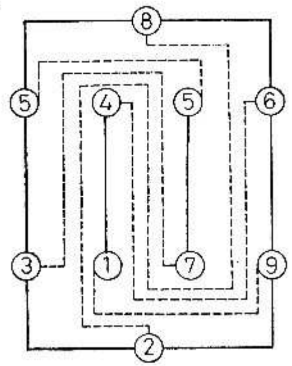
6. Broj koji nedostaje

Nedostaje broj 15. Broj u prvoj koloni pomnožimo sa 2 i tome dodamo broj u drugoj koloni.

7. Povezati brojeve

1+2+3+4+5+6+7+8+9=45+5=50
50:5=10

Svaki par mora davati zbroj 10.



Slika 41.

8. Križaljka

8	:	2	−	1	=	3
×		+		×		×
2	+	7	−	4	=	5
:		−		+		−
4	+	6	−	3	=	7
=		=		=		=
4	−	3	+	7	=	8

Slika 42.

9. Deset znamenaka

$\boxed{4} + \boxed{6} = \boxed{1}\boxed{0}$

$\boxed{2} + \boxed{7} = \boxed{9}$

$\boxed{3} + \boxed{5} = \boxed{8}$

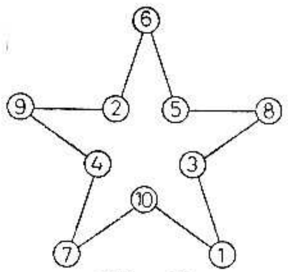
Slika 43.

10.

$$\frac{1\quad 5 \times 4}{6\quad 0} \qquad \frac{2\quad 9 \times 3}{8\quad 7}$$

Slika 44.

11. Zvijezda



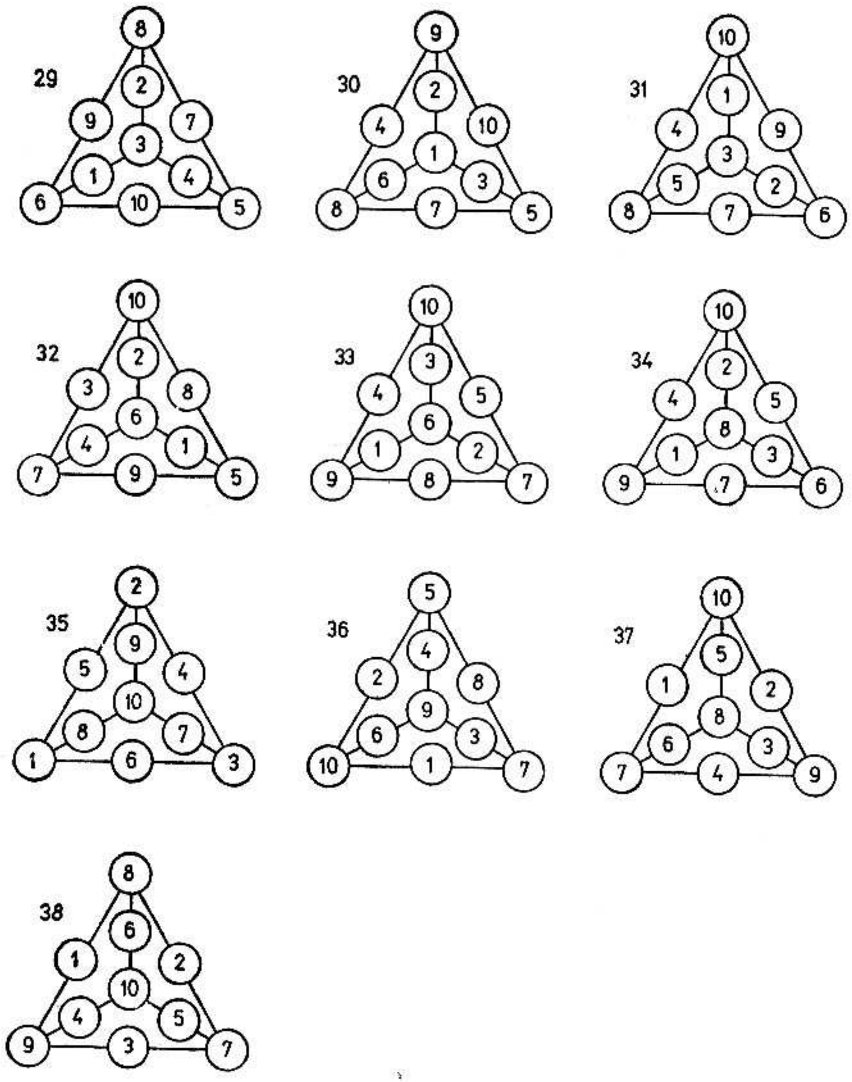
Slika 45.

12. Kvadrat u kvadratu

3	6	1
5	2	9
7	8	4

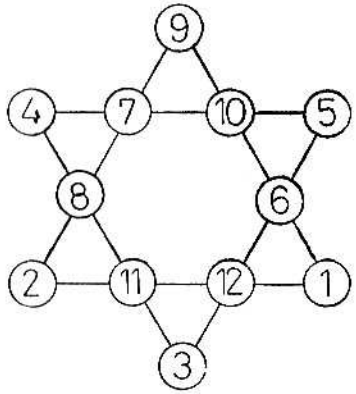
Slika 46.

13. Interesantan razmještaj



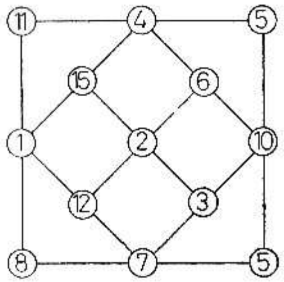
Slika 47.

14. Zvijezda



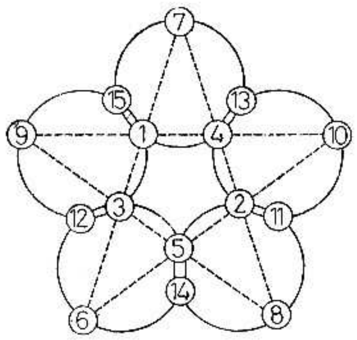
Slika 48.

15. Kvadrat



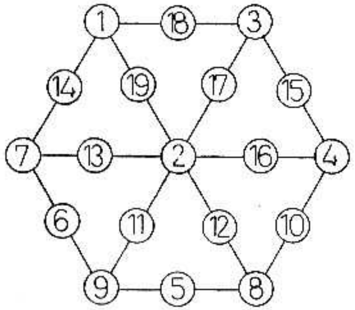
Slika 49.

16. Ukrasna zvijezda



Slika 50.

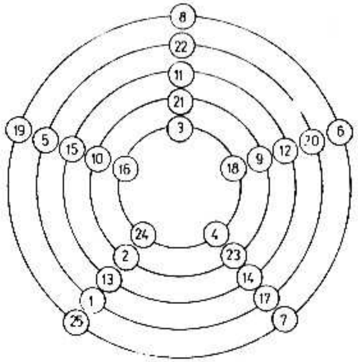
17. Šesterokut



Slika 51.

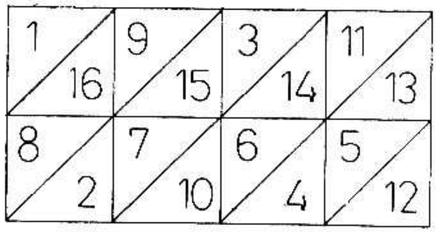
18. Planetarij

Jedno od rješenja je prikazano na slici.



Slika 52.

19. Pravokutnik



Slika 53.

VI GLAVOLOMIJE NA ŠAHOVSKOJ TABLI

1. Legenda o šahu

Ukupan broj zrna pšenice bio bi:

$S = 1+2+2^2+2^3+2^4+ \ldots . + 2^{63} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ zrna pšenice, što daleko premašuje svjetsku proizvodnju pšenice.

2. Bolji od Karpova i Kasparova

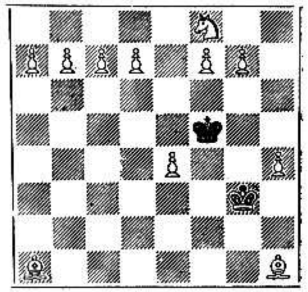
Neka Karpov ima bijele, a Kasparov crne figure. Kada Karpov (kao bijeli) povuče prvi potez, onda N (kao bijeli) protiv Kasparova povuče taj isti potez i čeka da Kasparov povuče potez, pa tim potezom odgovori Karpovu,... Na taj način, u stvari, igra teče između Karpova i Kasparova i N će izvući ili oba remija, ili će jednu partiju dobiti, a drugu izgubiti. Prema tome, njegova tvrdnja je istinita.

3. Šah u prvom potezu

Uzet će šah (šahovsku ploču sa figurama) i dati mu ga.

4. Mat u nula poteza

Na dijagramu u zadatku je postavljena matna slika ako bi tabla bila obrnuto postavljena. Da tabla mora biti obrnuto postavljena zaključujemo po tome što lovac (La8) nikako nije mogao do dođe na a8, a da se pritom ne pomjere pješaci (e2 i g2).
Prema tome, potrebno je samo tablu okrenuti.



Slika 54.

5. Mat u pola poteza

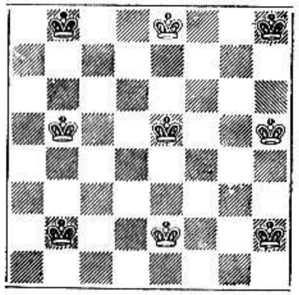
Naime, bijeli je promovisao svog pješaka u damu. Odigrao je taj polupotez, tj. sklonio je pješaka i potrebno je samo još da uzme damu.

6. Mat u prvom potezu

Bijeli vrši veliku rokadu i matira crnog.

7. Kralj

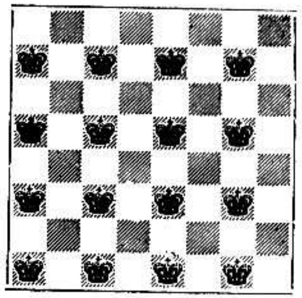
Kralj može najviše tući 9 polja (ako ga stavimo u srednje polje kvadrata 3 x 3). Podijelimo šahovsku ploču 8 x 8 na kvadrate 3 x 3. Vidimo da imamo četiri takva kvadrata i 28 preostalih polja koje možemo podijeliti na dva pravokutnika 2 x 3, dva pravokutnika 3 x 2, jedan kvadrat 2 x 2. U svaki taj dio možemo staviti jednog kralja. Prema tome, najmanje mora biti 9 kraljeva da bi sva polja bila tučena. Jedno od rješenja je:



Slika 55.

Podijelimo šahovsku ploču na 16 kvadrata 2 x 2 i stavimo 16 kraljeva u isto polje kvadrata 2 x 2.

Prema tome, najviše može biti 16 kraljeva da sva polja budu tučena. Jedno od rješenja je:

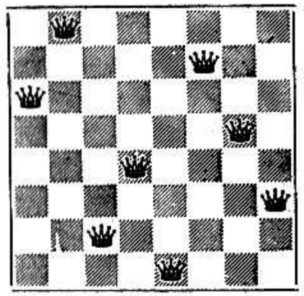


Slika 56.

8. Problem osam dama

Ovaj problem se prvi puta zvanično pojavljuje 1848. u njemačkom časopisu »Berliner Schachzeitung«. Interesantno je napomenuti da se njime bavio i veliki njemački matematičar K. F. Gauss koji je pronašao 72 rješenja od ukupno 92. Naime, jedini metod je tada bio metod probanja. Problem je prvi riješio Franz Nauck 21. septembra 1850. Inače, ovaj problem ima 12 osnovnih rješenja iz kojih se mogu rotacijom i inverzijom izvesti ukupno 92, koliko i postoji.

Uzmimo jedno rješenje:

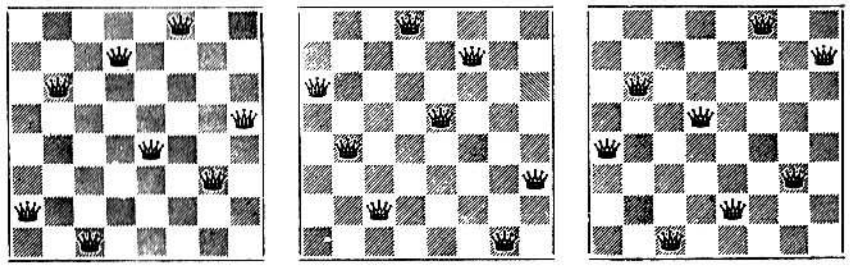


Slika 57.

Radi jednostavnosti uvedimo oznake za njega

Red	6 8 2 4 1 7 5 3
Stupac	1 2 3 4 5 6 7 8

Rotiramo li sliku za 90°, 180°, 270° u smjeru suprotnom gibanju kazaljke na satu, dobit ćemo još tri nova rješenja.



Slika 58.

Dakle, sada imamo četiri slijedeća rješenja:

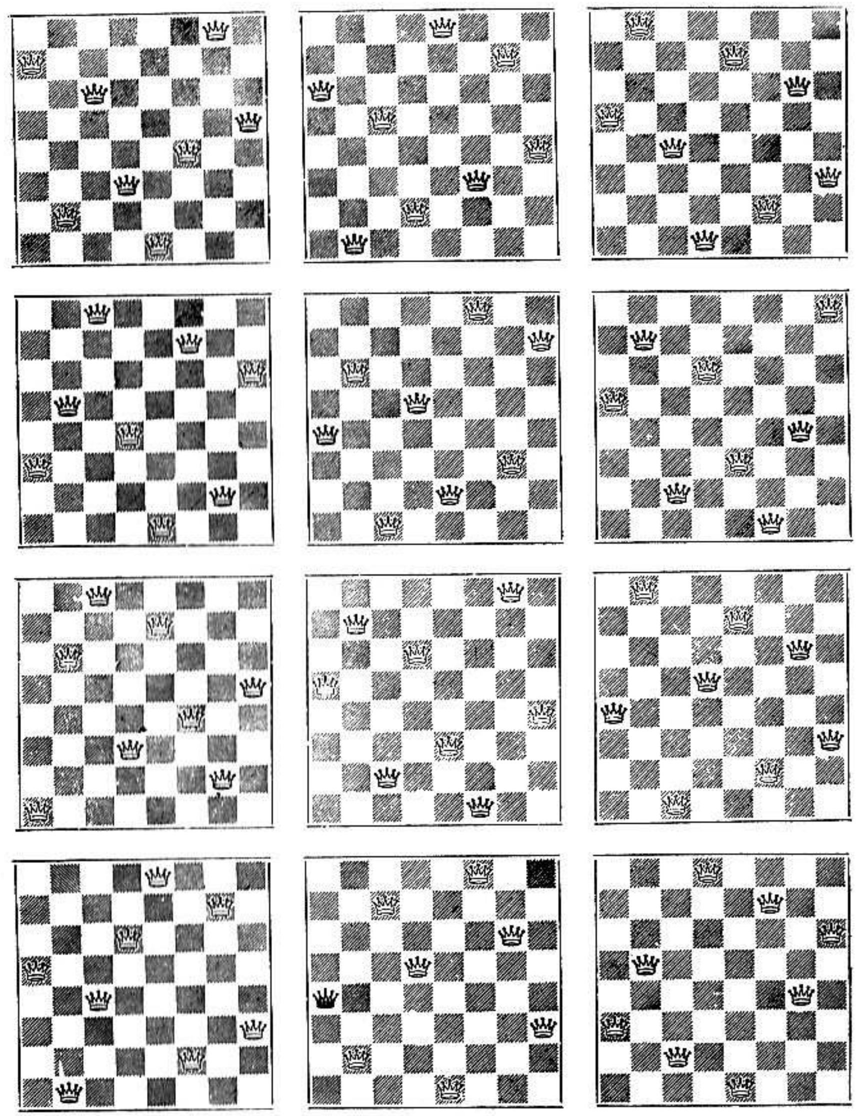
	6 8 2 4 1 5 7 3
	2 6 1 7 4 8 3 5
	6 4 2 8 5 7 1 3
	4 6 1 5 2 8 3 7
Stupac	1 2 3 4 5 6 7 8

Od svakog od ova četiri rješenja možemo dobiti inverzijom (kao slika u ogledalu, odnosno, zamjenom stupaca 1 sa 8, 2 sa 7,...) još 4 nova rješenja. Znači, dobili smo još četiri rješenja

	3 1 7 5 8 2 4 6
	7 3 8 2 5 1 6 4
	3 5 7 1 4 2 8 6
	5 3 8 4 7 1 6 2
Stupac	1 2 3 4 5 6 7 8

Dakle, od svakog osnovnog rješenja, dobijemo još 7 novih, ukupno 8. Samo od XII osnovnog rješenja ne dobijemo 7 novih, već tri (rotacijom).

Prema tome, 1 x 8 = 88 + 4 = 92, imamo 92 rješenja.



Dvanaest osnovnih rješenja

Slika 59.

9. Top

Lako se uočava da najviše osam topova možemo postaviti na šahovsku tablu da se ne napadaju.
Na prvi red top može stati na osam različitih polja (a,b,c,...,h). Na drugi red top može stati na sedam različitih polja (ne može stati u onaj stupac u kojemu je top na prvom redu).

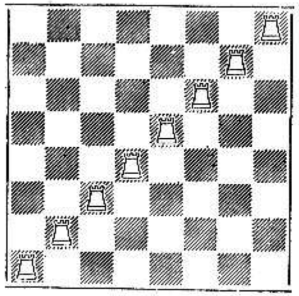
Na treći red top može stati na šest različitih načina.
Daljnjim zaključivanjem uočava se da top može stati na osmi red samo na jedno (preostalo) polje.

Ukupno imamo:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \quad 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

Dakle, imamo 40320 takvih mogućnosti.

Jedno od mogućnosti je:

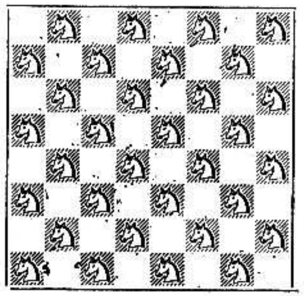


Slika 60.

10. Skakač

Postavimo ih na polja iste boje. Dakle, možemo postaviti 32 skakača da se međusobno ne napadaju. Imamo dva rješenja:

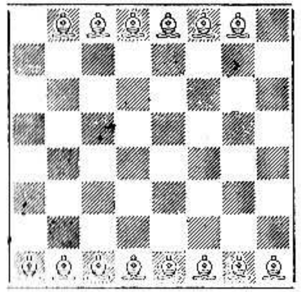
a) 32 skakača su na svim crnim poljima šahovske ploče.
b) 32 skakača su na svim bijelim poljima šahovske ploče.



Slika 61.

11. Lovac

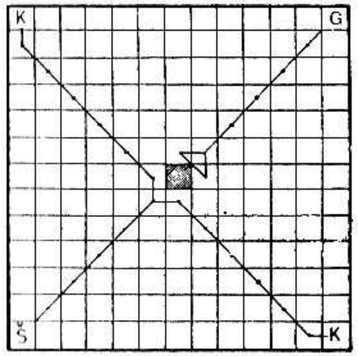
Na šahovskoj ploči 8 x 8 imamo sedam dijagonala po crnim poljima i sedam dijagonala po bijelim poljima. Dakle, ako svaki lovac zauzima jednu dijagonalu, možemo ih maksimalno 14 postaviti na šahovsku tablu, tako da se međusobno ne napadaju.
Ako je tabla n x n, možemo postaviti 2n — 2 lovca.
Jedno od rješenja je:



Slika 62.

12. Gargamel i Štrumpf

Ako Štrumpf prvi krene, Gargamel ga ne može stići. Na primjer, Štrumpf može ići od a1 do m1 (po prvom redu), odnosno, od a1 do a13 (po prvom stupcu).
Ako Gargamel prvi krene onda su mogući slijedeći slučajevi:
Ako Gargamel krene po stupcu (m-tom), Štrumpf također krene po stupcu (a-tom) u suprotnom smjeru, odnosno, ako Gargamel krene po retku, Štrumpf učini isto, ali u suprotnom smjeru.
Ako Gargamel krene dijagonalno, Štrumpf kreće također dijagonalno. Kada Gargamel bude na polju h8, Štrumpf će biti na polju f6 (slika 63). Ako Gargamel krene na polje g8, Štrumpf će na polje g6, Gargamel na h7, Štrumpf na h5 i zatim i4—j3—k2—l1—m1.
Isto će se dogoditi ako Gargamel krene na h7.
Dakle, Štrumpf će uvijek pobjeći od Gargamela u jednu od kućica.

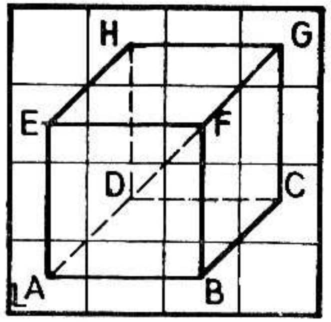


Slika 63.

13. Vuk i lisica

Pravci kretanja lisice i vuka su kose projekcije bridova i jedne prostorne dijagonalne kocke (slika 64).

Ako prvi krene vuk sa polja G na polje F, lisica mu ne može pobjeći. Ako prvo krene lisica, vuk je ne može stići. Na primjer: LB-VC, LF-VG itd. Stalno se vrte u krug.



Slika 64.

14. Miš i sir

Neka je miš na crnom polju. Tada se i sir nalazi na crnom polju. Prije nego što dođe do sira, miš mora obići 62 polja, od čega 32 bijela i 30 crnih. Ako susjedna polja imaju suprotne boje, svakim »korakom« miš mijenja boju polja pa, pošto ne može dvaput uzastopno doći na bijelo polje, zadatak je nerješiv.

15. Igra

Dokaz je očit ako pješak obiđe sva polja. Stoga potencijalni pobjednik (2. igrač za n neparno i 1. igrač za n parno) trebaju osigurati, bez obzira na igru protivnika, da pješak obiđe sva polja.

Neka je n neparno i neka je pješak u jednom kutu šahovske ploče. Preostali dio šahovske ploče prekrit ćemo domino pločicama 2 x 1 (što se može učiniti). Prvi igrač mora staviti pješaka na neku dominu pločicu. Kako god igrao prvi, drugi igrač će igrati na drugo polje one domino pločice na koju je igrao prvi igrač i time sebi osigurati pobjedu, odnosno, posljednji potez.

Neka je n parno. Sada ćemo cijelu ploču (i ono polje na kojem je pješak) prekriti domino pločicama. Prvi igrač stavlja pješaka na drugo polje one domino pločice na kojoj je pješak i sada se on nalazi u ulozi u kojoj se nalazio drugi igrač za n neparno, pa pobjeđuje u igri.

16. Šahovska ploča 15 x 15

Šahovska ploča 15 x 15 ima 225 (neparan broj) polja, a svaka domino pločica pokriva 2 (paran broj) polja, pa je zadatak nerješiv.

17. Šahovska ploča 10 x 10

Šahovska ploča 10 x 10 sadrži 50 bijelih i 50 crnih polja. Polja na suprotnim vrhovima su polja iste boje, pa će preostali dio ploče sadržavati 50 polja jedne i 48 polja druge boje, što se ne da prekriti domino pločicama, jer svaka domino pločica može prekriti jedno crno i jedno bijelo polje.

18. Tetramino pločica

Izbačena su dva crna i dva bijela polja, pa preostali dio šahovske ploče sadrži 30 crnih i 30 bijelih polja. L tetramino pločica pokriva uvijek 2 crna i dva bijela polja, pa se još uvijek ne vidi da li je zadatak rješiv ili ne. Podijelimo redove ploča izmjenično u klase I i II. Sada svaka tetramino pločica prekriva ili tri polja I i jedno polje II (oznaka A), ili obrnuto (oznaka B).

Kako imamo jednak broj k pločica A i B, koje će ukupno prekriti 2k . 4 = 8k polja ploče i kako ploča ima ukupno 60 polja, a 60 nije djeljivo sa 8 zadatak je nerješiv.

19. Pješaci

Susjedna polja imaju suprotne boje, pa pri prijelazu na susjedno polje pješaci sa bijelih polja dolaze na crna i obrnuto. To znači da bi ploča trebala imati jednak broj crnih i bijelih polja, što kod ploče 7 x 7 nije slučaj pa je zadatak nerješiv.

20. Skakači

Skakači se nalaze na poljima iste boje. Nakon svakog poteza skakač mijenja boju polja, pa se nakon svakog poteza bijelog skakači nalaze na poljima različite boje, a nakon svakog poteza crnog na poljima iste boje. Na taj način bijeli nikako ne može dobiti partiju. Treba još pokazati da bijeli može izvući remi. Bijeli skakač uvijek može izbjeći polje u kutu šahovske ploče (a1, a8, h1, h8). Neposredno se može provjeriti da je broj polja koja su napadnuta istovremeno od oba skakača najviše 2, a sa bilo kog polja, koje nije u kutu šahovske ploče, skakač napada više od dva polja. Na taj način bijeli skakač, koji nije u kutu šahovske ploče, može uvijek izbjeći crnog skakača (ima na raspolaganju više od dva polja). Kako ploča ima konačan broj (64) polja, tako se ista pozicija mora ponoviti tri puta i bijeli može izvući remi.

21. Igra pješacima

Strategija crnog bila bi slijedeća:
Kako god bijeli igra, crni treba, nakon svog poteza, ostaviti paran broj slobodnih stupaca po kojima može bijeli igrati. Ako bijeli u jednom stupcu igra do kraja do crnog pješaka, tada će to, u nekom drugom stupcu učiniti i crni. Ako bijeli igra do predzadnjeg mjesta (polja), to će učiniti i crni u nekom drugom stupcu, a ako bijeli stane 2 ili više polja ispred crnog pješaka, crni će u istom stupcu ostaviti samo jedno slobodno mjesto. Međutim, ako se bijeli stane povlačiti nazad, crni ide za njim sve dok ga ne dotjera do pozicije da ima jedno slobodno polje.

Time će crni sebi uvijek osigurati posljednji potez, a time i pobjedu.

22. Delfin

Označimo polja šahovske ploče na slijedeći način

B	C	A	B	C	A	B	C
A	B	C	A	B	C	A	B
C	A	B	C	A	B	C	A
B	C	A	B	C	A	B	C
A	B	C	A	B	C	A	B
C	A	B	C	A	B	C	A
B	C	A	B	C	A	B	C
A	B	C	A	B	C	A	B

Slika 65.

Na taj način delfin, polazeći od polja A u lijevom kutu ploče, mora doći na polje B, pa na polje C, a zatim opet na A . . .

Dakle, nakon 3 poteza pozicija se ponavlja, pa će se i nakon 63 poteza delfin ponovo naći na nekom polju A, tako da će nakon 64-tog poteza delfin stići na polje B, tj. nikako ne može stići na polazno polje A.

VII GLAVOLOMIJE I LOGIČKI ZADACI SA MATEMATIČKIH NATJECANJA

1. Da nije bilo kvara, zemljoradnik bi drugu polovinu uzorao do 10 sati. Pošto je poslije nastajanja kvara radio dva puta sporije, on je do 10 sati završio polovinu ostatka posla, odnosno četvrtinu polja. Preostalu četvrtinu orao je od 10 do 12 sati i to po 5 ari na sat. Znači da je četvrtina polja 10 ari, a cijelo polje 40 ari.

Zemljoradnik je počeo da ore u 6 sati. Prvu polovinu orao je 2 sata, a drugu 4 sata.

2. Rješavamo zadatak metodom inverzije (unazad).

I pos.	II. pos.	III pos.	
9	9	9	— nakon trećeg presipanja
8	9	10	— prije trećeg presipanja
8	12	7	— prije drugog presipanja
12	8	7	— prije prvog presipanja

Dakle, u prvoj posudi je bilo 12 litara, a drugoj 8 litara a u trećoj 7 litara.

3. Ukoliko manje štuka bude pojedeno, više će ih ostati. Stoga će najviše štuka preostati ako se te što preostanu zasite samo gladnim štukama ili, ako je to moguće, štukama koje su prethodno pojele što manje štuka. Zato se to može postići na slijedeći način. Ako najprije jedna gladna štuka pojede jednu štuku, ostaće ukupno još 24 štuke. Ako sad 6 najjačih štuka pojedu svaka po tri slabije štuke (među njima i onu koja je već pojela jednu štuku), onda će one sve biti site i neće više napadati jedna drugu.

Prema tome, u bazenu može ostati najviše 6 štuka.

4. Brojevima od 1 do 1000 označimo sva mjesta na kojima stoje učenici. Mjesta mogu da zamijene samo oni učenici čiji se broj mjesta razlikuje za 2. Dakle, učenik čiji je broj neparan može da zamijeni mjesto samo sa učenikom čiji je broj također neparan. Prema tome, prvi (broj mjesta 1) nikada ne može doći na mjesto posljednjeg (broj mjesta 1000).

5. Bez obzira na broj dvokrevetnih i četverokrevetnih kabina, ukupan broj ležaja u njima bit će paran (broj kabina množi se parnim brojem). Pošto je ukupan broj ležaja 86, tj. paran, to je broj ležaja u trokrevetnim sobama također paran. Ako broj trokrevetnih kabina označimo sa k, onda u njima ima ukupno 3k ležaja. Da bi 3k bio paran, očigledno broj k mora biti paran, što se i tvrdilo.

6. Da je sve zadatke riješio pravilno imao bi 91 poen. Za svaki neriješeni zadatak učenik gubi 10 poena (7 ne dobiva i 3 gubi).

$$91 - 51 = 40$$

Prema tome, učenik nije riješio 4 zadatka, odnosno, riješio je 9 zadataka.

7. Prvi traktor izore za jedan sat 1/15 polja, a drugi 1/20 polja. Postavimo jednakost:

$$x/15 + x/20 = 14/15$$
$$x = 8$$

Prema tome, traktori su orali 8 sati zajedno.

8. Strijelac je ispalio 16 hitaca od kojih 6 u metu.

9. Iz uvjeta zadatka je vidljivo da je majka za ostale dnevne potrebe potrošila dva puta više nego za doručak. Kako je ovaj iznos plaćen sa tri bona, a doručak sa dva bona, nužno proizlazi da doručak stoji 30 dinara.

Prema tome, 30+60=90, što je 3/5 od 150. Majka je od kuće ponijela bonove u vrijednosti od 150 dinara.

10. Prošlo je 6 sati.

11. Pretpostavimo da je moguće.

Tada bi bilo:

$$2\,(11+12+13+14+\ldots.22) = 8x$$
$$396 = 8x$$
$$x = 99/2$$

Perma tome, nemoguće je.

12. Ako počnemo brojiti dane od 25. V 1981. godine, onda ćemo svakog ponedjeljka dobiti broj koji pri dijeljenju sa 7 ima ostatak 1, svakog utorka ostatak 2, itd. Do 25. V 2000. godine izbrojićemo (19 . 365 + 5) dana, odnosno 6940 dana. Sam dan 25. V 2000 godine će biti 6941 po redu. Kako je 6941 = 7 . 991 + 4, tog dana će biti četvrtak.

13. Najmanje 9 učenika moraju imati plave oči i tamnu kosu, jer je 14+15—20=9. Od svih 9, najmanje šestorica su teži od 40 kp, jer je 9+17—20=6. Od posljednje šestorice najmanje 4 su viši od 160 cm, jer je 6+18—20=4. Ova četvorica imaju sve navedene osobine.

14. Pas skoči 4 puta u vremenu u kojem zec skoči 14 puta. Za to vrijeme pas pređe 8 metara, a zec 7 metara, dakle u 4 skoka pas smanji za 1 metar rastojanje. Da bi nadoknadio prednost zeca od 125 m, pas mora da pređe 125 puta po 8 metara.

Prema tome, da bi ulovio zeca, pas je morao da prijeđe 1000 metara.

15. Od 1. I do 1. IV ima 91 ili 90 dana, zavisno od toga da li je godina prestupna ili nije. Da bi 1. I i 1. IV bio četvrtak, broj dana između ova dva datuma mora biti djeljiv sa 7, a to je 91. Znači, godina je bila prestupna i imala je 366 dana. Zbog toga je u toj godini bilo 52 tjedna (sedmice) i dva dana, što znači da je u njoj bilo 53 petka (jer je i 2. I bio petak). Svaki mjesec imao je 4 ili 5 petaka. Postavimo jednakost:

$$5x + 4\,(12 - x) = 53$$
$$x = 5$$

Znači, 5 mjeseci je imalo po 5 petaka.

16. Za označavanje prvih 9 stranica potrebno je 9 znamenaka. Slijedećih 90 stranica onzačavaju se dvoznamenkastim brojevima (od 10 do 99) i za to nam treba 180 znamenaka. Dalje dolaze troznamenkasti brojevi. Broj 189 je djeljiv sa 3, pa bi i ukupan broj upotrijebljenih znamenaka morao biti djeljiv sa 3, što u slučaju navedenog broj 6821 nije slučaj.

Znači, neka od stranica nije označena. Pretpostavimo da je neoznačena prva stranica. Tada je do 99 stranica upotrijebljeno 188 znamenaka, a za troznamenkaste brojeve preostalo je 6633 znamenaka. To je 2211 stranica. Dakle, ukupan broj stranica rječnika je 2310.

17. Nula u produktu nastaje množenjem 2 · 5. Kako je svaki drugi prirodni broj djeljiv sa 2, a svaki peti sa 5, to će broj nula u produktu biti jednak broju petica u rastavljanju produkata na proste faktore. Dakle ukupan broj petica je 10, pa se produkt svih prirodnih brojeva od 1 do 49 završava sa 10 nula.

18. Ako je masa teže karike x grama, možemo postaviti jednadžbu:

$$80x = 100\,(x - 5)$$
$$x = 25$$

Dakle, masa željezne šipke je 80 · 25 = 2000 grama ili 2 kg.

19. Vremenski intervali u kojima autobusi kreću sa polazne stanice su 7 minuta i 12 sekundi.

20. Za jedan sat prvi bager iskopa 1/20-i dio kanala, a za to vrijeme drugi zasipa 1/30-dio.

$$1/20 - 1/30 = 1/60$$

za 48 sati ostat će nezatrpano 48/60, odnosno 4/5 jednog kanala.

21. Imat ćemo 119 rezanja. Prvo rezanje će biti u 12 h, a posljednje u 1 h 1 min i 58 sekundi.

22. Jednako. Koliko u prvoj hrpi nedostaje plavih kuglica, toliko u drugoj hrpi nedostaje crvenih kuglica.

23. »Lažeš li ti?«, ili »Da li ti uvijek govoriš istinu?«

24. Postavimo jednadžbu:

$$x = 1/3\,x + a + 1/2\,(2/3\,x - a) - 1/2\,a + 2 + 1$$
$$x = 9$$

Imala je 9 zrna.

25. 5+4+2=11 — dali su za čorbu
29—11=18 — ostalo riba (ukupno)
18 : 3=6 — ostalo svakome
Prvi je ulovio 11=(6+5), drugi 10=(6+4), a treći 8=(6+2).

LITERATURA

Časopisi i knjige

1. »Arhimedes« — naučno popularni matematički list. Beograd.
2. »Matematički list« — naučno-popularni list. Beograd.
3. Matematičko fizički list. Zagreb.
4. »Kvant«. SSSR.
5. »Matematika«. Bugarska.
6. Sam Loyd: Mathematical puzzles. Dover Publications, New York, 1960.
7. Dudeney H.: Amusementes in matematics. Dover Publications, 1958.
8. Gardner M.: Dew mathematical diversions from scientific American. New York, 1966.
9. Gardner M.: Gotcha. San Francisko, 1982.
10. Berrondo M.: Les jeux mathematiques d'eureka. Donod, Paris, 1979.
11. Erzsebet K.: Kvizologija. Prosvjeta, Zagreb, 1975.
12. Bizam G. — Herczeg J.: Sokszinü logika. Budapest, 1985.
13. Zapletel M.: Kniha hlavolamu. Albatros, Praha, 1983.
14. Мочалов Л. П. Головоломки. Наука, Москва 1980.
15. Гик Е. Р. Шахмати и математика. Наука, Москва 1983.
16. Игнатчев Е. И. В царстве смекалки: Наука, Москва 1984.
17. Кордемскии Б. А. Математическая смекалка: Москва 1957.

SADRŽAJ