Najtoplije zahvaljujem **prof. Milanu Šariću *i* prof. Luki Čelikoviću** na dozvoli da knjižicu
"Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1989. godine - za učenike osnovnih škola"
skeniram i objavim na http://public.carnet.hr/mat-natj .

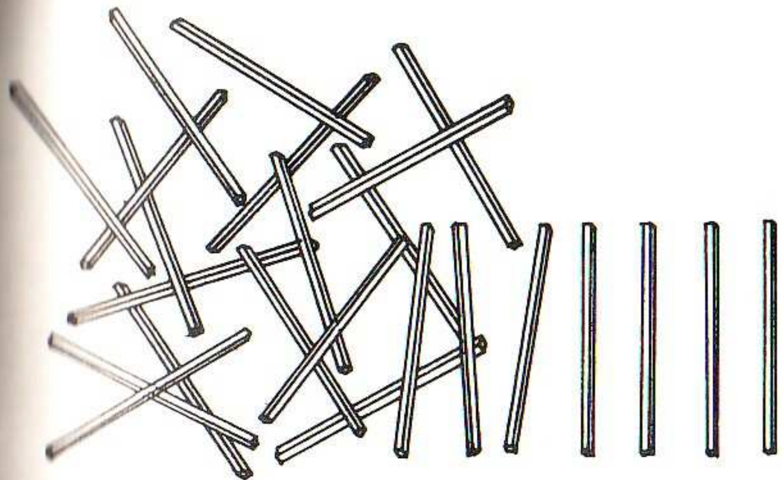
Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

PRIREDILI:
MILAN ŠARIĆ — LUKA ČELIKOVIĆ

# MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1989. GODINE

## ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA



Beli Manastir, 1990.

DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

PRIREDILI:
MILAN ŠARIĆ — LUKA ČELIKOVIĆ

# MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1989. GODINE

## ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA

Beli Manastir, 1990.

MATEMATIČKA NATJECANJA OSNOVNOŠKOLACA U SFRJ
U 1989. GODINI


Priredili:

**Milan Šarić**

**Luka Čeliković**



Izdavač:

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »PITAGORA«
BELI MANASTIR
Školska 3, 54300 Beli Manastir

Urednici:

**Luka Čeliković**

**Milan Šarić**

Tehnički urednik:

**Branko Vujaklija**

Tisak:

GP »Slovo« Beli Manastir


P R E D G O V O R

Ova zbirka zadataka, kao nastavak zbirki iz 1987. i 1988. godine, sadrži riješene zadatke sa općinskih, regionalnih — međuopćinskih (tamo gdje ih je bilo) i republičkih matematičkih natjecanja osnovnoškolaca u 1989. godini svih naših republika, kao i SAP Vojvodine, te zadatke sa saveznog natjecanja. Posebno ističemo da zbirka sadrži i riješene zadatke sa XV »Arhimedesovog« matematičkog turnira, koji u SR Srbiji svake godine organizira KMM »Arhimedes« iz Beograda.

Pri izradi zbirke korišteni su materijali Natjecateljskih komisija, te časopisi: »Matematički list« (Beograd), »Presek« Ljubljana) i »Numerus« (Skopje) i »Zbirka zadataka sa takmičenja mladih matematičara SR Srbije u 1989. godini« (V. Andrić). Zadatke i potpuna rješenja (koja su u zbirci skraćena) sa XV »Arhimedesovog« matematičkog turnira dao je prof. Bogoljub Marinković iz Beograda. Neka rješenja zadataka su u potpunosti preuzeta iz spomenute literature.

Tekstovi zadataka su dani terminologijom koja se koristi u dotičnoj republici, odnosno pokrajini (s izuzetkom općinskog natjecanja u SR Makedoniji, koja nismo uspjeli pribaviti na makedonskom jeziku). U rješenjima zadataka je korištena terminologija koja se koristi u SR Hrvatskoj.


Zahvaljujemo se na pomoći u materijalima: prof. Goranu Gaku (SR Bosna i Hercegovina), prof. Miri Janjušević (SR (Crna Gora), dr. Zdravku Kurniku i prof. Ivanu Staniću (SR Hrvatska), prof. Goci Šopkovski i prof. Kosti Miševski (SR Makedonija), prof. Aleksandru Potočniku (SR Slovenija), prof. Bogoljubu Marinkoviću i prof. Vojislavu Andriću (SR Srbija), te dr. Velimiru Sotiroviću i dr. Dušanu Lipovcu (SAP Vojvodina).

Nadalje se zahvaljujemo Anđi Mijatović i Denisu Vidoviću na kontroli kucanja teksta, te radnim ljudima GP »Slovo« Beli Manastir, a posebno Branku Vujakliji, Šanjiki Šnajder i Dragi Pašajliću na štampanju zbirke. Zahvaljujemo se i svima onima koji nam ukažu na eventualne greške.


U Belom Manastiru, siječnja 1990. god.

Milan Šarić
Luka Čeliković

# SR BOSNA I HERCEGOVINA

## OPŠTINSKO TAKMIČENJE

### TUZLA

Zadaci :

V razred:

1) Da li je "normalnost pravih" relacija ekvivalencije ? Odgovor obrazložiti.
2) Razlika uporednih uglova jednaka je polovini oštrog ugla $\varphi$. Dokazati da je ugao, komplementan sa oštrim uporednim uglom, jednak četvrtini tog oštrog ugla $\varphi$.
3) Šta je veće $\frac{599}{999}$ ili $\frac{5999}{9999}$ ?
4) Odredi razlomak s imeniocem 9, koji je veći od $\frac{2}{3}$ i manji od $\frac{5}{6}$.
5) Zemljište, površine 400 ari, zasijano je žitom $\frac{5}{8}$ površine, kukuruzom $\frac{1}{5}$ površine, a šećernom repom ostalo. Izračunaj koliko je ari zemljišne površine pod šećernom repom.

VI razred:

1) Koristeći jednakost $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $n \in N$, izračunaj zbir $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{99.100}$.
2) Za koje je vrijednosti broja x $(x \in N)$ izraz $\frac{x+3}{x}$ cio broj?
3) Kako je moguće od konopca dužine $\frac{2}{3}$m odrezati 0,5m bez upotrebe metra ?
4) Ako je težišna duž trougla jednaka polovini odgovarajuće stranice, trougao je pravougli. Dokazati.
5) U ravni je data prava p i tačke A' i B' sa iste strane van prave p. Konstruisati trougao ABC ako se tjemena A i B nalaze na pravoj p i ako su AA' i BB' visine traženog trougla ABC.

VII razred:

1) Odrediti najveći broj kojim treba podijeliti brojeve 532 i 220, pa da ostatak u oba slučaja bude 4.
2) Ako nekom broju izbrišemo posljednju cifru 9, onda se on

smanji za 1791. Koji je to broj ?

3) U pravouglom koordinatnom sistemu $xOy$ date su tačke $A(20,21)$, $B(5,12)$. Izračunaj:
   a) obim trougla $OAB$,
   b) površinu trougla $OAB$.

4) Dijagonale ravnokrakog trapeza sijeku se pod pravim uglom, a njihovi dijelovi su 12 cm i 9 cm.
   a) Izračunati obim i površinu trapeza.
   b) Odrediti udaljenost presječne tačke dijagonala od osnovica.

5) Dat je polinom $P(x,y) = (2x-5y)^2 - (x+3y)^2 - 2x(x-17y)$.
   a) Izračunaj zbir koeficijenata datog polinoma.
   b) Dati polinom rastaviti na faktore.

**VIII razred:**

1) Učenik je imao zadatak da pomnoži 78 sa dvocifrenim brojem u kojemu je cifra desetica 3 puta veća od cifre jedinica. On je greškom zamijenio cifre u drugom faktoru i tako dobio produkt manji od tačnog produkta za 2808. Odrediti tačan rezultat.

2) Žljeb za vodu dug je 5 m i hvata 1440 litara. Presjek žljeba je ravnokraki trapez čiji je krak 52 cm, a visina 48 cm. Koliko litara vode staje u žljeb do polovine visine ?

3) Izraz $\frac{m-9}{4}x + \frac{m+2}{3}x^2 - x^3$ ima vrijednost 16 za $x = -2$. Kolika je njegova vrijednost za $x = 0,5$ ?

4) Data je funkcija $f: R \to R$ formulom $f(x) = 3-2x$.
   a) Predstaviti grafički ovu funkciju u koordinatnom sistemu $xOy$.
   b) Odrediti nulu funkcije.
   c) Odrediti skup vrijednosti od $x$ za koje funkcija $f$ prima negativne vrijednosti.
   d) Odrediti cijela pozitivna rješenja nejednačine $f(x) > -10$.

**R j e š e n j a :**

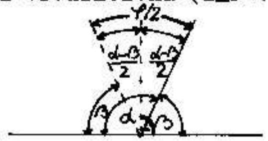
**V razred:**

1) Relacija "okomitost pravaca" nije relacija ekvivalencije



jer nije ni refleksivna (pravac nije okomit sam na sebe) ni tranzitivna ($a \perp b \wedge b \perp c \Rightarrow a \parallel c$, a ne $a \perp c$).

2)




$\alpha - \beta = \frac{\varphi}{2} \Rightarrow 90^0 - \beta = \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\varphi}{4}$.

3) $\frac{599}{999} < \frac{5999}{9999}$ jer je $599 \cdot 9999 = 5990000 - 599 < 5999000 - 5999 = 5999 \cdot 999$.

4) Neka je $x$ brojnik traženog razlomka. Tada iz $\frac{2}{3} < \frac{x}{9} < \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{12}{18} < \frac{2x}{18} < \frac{15}{18} \Rightarrow 12 < 2x < 15 \Rightarrow x = 7$ (jer je $x \in N$).

5) Pod šećernom repom je $400 \cdot (1 - \frac{5}{8} - \frac{1}{5}) = 70$ ari.

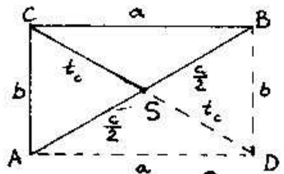
**VI razred:**

1) $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \dots + \frac{1}{98\cdot99} + \frac{1}{99\cdot100} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$.

2) $\frac{x+3}{x} = 1 + \frac{3}{x} \in N \Leftrightarrow x \in \{1,3\}$.

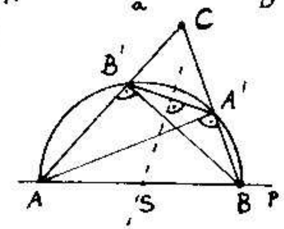
3) Kako je $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ i $\frac{1}{2} : \frac{1}{6} = 3:1$, $\frac{1}{2}$ m od $\frac{2}{3}$ m ćemo dobiti tako da odrežemo $\frac{3}{4}$ danog konopca (što se dobije dvostrukim presavijanjem konopca).

4)




$t_c = \frac{c}{2} \Rightarrow |CD| = |AB| \Rightarrow ABCD$ pravokutnik $\Rightarrow ABC$ pravokutan trokut.

5)

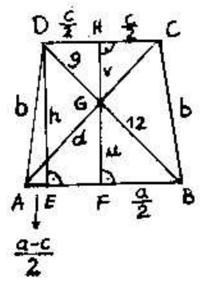



Prvo konstruiramo simetralu dužine $A'B'$ i oko sjecišta $S$ te simetrale sa pravcem $p$ opišemo kružnicu polumjera $|OA'| = |OB'|$. Sjecišta te kružnice sa pravcem $p$ su točke $A$ i $B$, a sjecištem pravaca $AB'$ i $BA'$ dobivamo točku $C$.
Dokaz slijedi prema Talesovom teoremu ($\sphericalangle AA'B = \sphericalangle AB'B = 90^0$) i na osnovu činjenice da simetrala tetive $\overline{A'B'}$ kružnice

prolazi njenim središtem S.

**VII razred:**

1) Neka je x traženi najveći prirodni broj kojim treba podijeliti brojeve 532 i 220 da u oba slučaja ostatak bude 4. Tada su brojevi 528 i 216 djeljivi sa x. Pošto je $528 = 2^4\cdot 3\cdot 11$ i $216 = 2^3\cdot 3^3$, tada je $x = 2^3\cdot 3 = 24$.
2) Neka je $\overline{x9} = 10x+9$ traženi broj. Tada iz $\overline{x9} - x = 1791$, tj. iz $10x+9-x = 1791$ slijedi $x = 198$, pa je traženi broj 1989.
3) a) Primjenom formule $|T_1T_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, dobivamo: $|OA| = 29$, $|OB| = 13$ i $|AB| = 3\sqrt{34}$, pa je opseg trokuta OAB jednak $3\cdot(14+3\sqrt{34})$.
   b) $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)| = 67,5$.
4)




a) $a = 12\sqrt{2}$ cm, $c = 9\sqrt{2}$ cm, $d = 21$ cm,

$P_{\Delta ABCD} = \frac{d^2}{2} = 220,5\ \text{cm}^2$,

$P_{\Delta} = \frac{a+c}{2}h \Rightarrow h = \frac{2P_{\Delta}}{a+c} = \frac{21\sqrt{2}}{2}$ cm,

$b = \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + h^2} = 15$ cm,

$O_{\Delta ABCD} = a+2b+c = 3\cdot(10+7\sqrt{2})$.

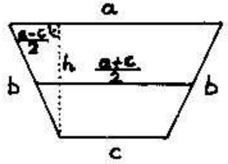
b) Iz sličnosti trokuta EBD i FBG slijedi $\frac{21\sqrt{2}}{2} : 21 = u : 12$, odakle je $u = 6\sqrt{2}$, $v = h-u = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

5) $P(x,y) = (2x-5y)^2-(x+3y)^2-2x(x-17y)$.
   a) $P(1,1) = (-3)^2-4^2-2\cdot(-16) = 25$.
   b) $P(x,y) = (x-8y)(3x-2y)-2x(x-17y) = x^2+8xy+16y^2 = (x+4y)^2$.

**VIII razred:**

1) Neka je $\overline{(3x)x}$ dvoznamenkasti broj kome je znamenka desetica 3 puta veća od znamenke jedinica. Tada iz $78\cdot(\overline{(3x)x}-\overline{x(3x)}) = 2808$ izlazi $x = 2$, pa je dvoznamenkasti broj (sa kojim je učenik trebao pomnožiti broj 78) jednak 62. Točan rezultat produkta je $78\cdot 62 = 4836$.
2) $V = 1440\ \ell = 1440\ \text{dm}^3$, $d = 5\text{m} = 50$ dm, $b = 52$ cm $= 5,2$ dm, $h = 48$ cm $= 4,8$ dm,






$V = \frac{a+c}{2}hd \Rightarrow a+c = \frac{2V}{hd} = 12$ dm,

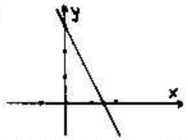
$\frac{a-c}{2} = \sqrt{b^2-h^2} = \sqrt{5,2^2-4,8^2} = 2$ dm,

$a-c = 4 \wedge a+c = 12 \Rightarrow a = 8$ dm, $c = 4$ dm,

$V_1 = \frac{\frac{a+c}{2}+c}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot d = \frac{a+3c}{8}hd = 600\ \text{dm}^3 = 600\ \ell$.

3) $f(x) = \frac{m-9}{4}x+\frac{m+2}{3}x^2-x^3$

   $f(-2) = 16 \Rightarrow \frac{m-9}{4}\cdot(-2)+\frac{m+2}{3}\cdot(-2)^2-(-2)^3 = 16 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow$
   $\Rightarrow f(x) = -2x+x^2-x^3 \Rightarrow f(0,5) = -1+0,25-0,125 = -0,875$.
4) $f(x) = -2x+3$
   a)




   b) $f(x) = 0 \Rightarrow -2x+3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.
   c) $f(x) < 0 \Rightarrow -2x+3 < 0 \Rightarrow -2x < -3 \Rightarrow x > \frac{3}{2} \Rightarrow x \in (\frac{3}{2}, \infty)$.
   d) $f(x) > -10 \Rightarrow -2x+3 > -10 \Rightarrow -2x > -13 \Rightarrow x < \frac{13}{2} \Rightarrow$
   $\Rightarrow x \in \{1,2,3,4,5,6\}$ (jer je $x \in N$).

## REGIONALNO TAKMIČENJE

### TUZLA

**Zadaci:**

**VII razred:**

1) Trgovac je iz magacina predao 32 kg jabuka, a zatim još jednu četvrtinu ostatka, poslije čega mu je ostalo još 126 kg. Koliko je u magacinu bilo jabuka ?
2) Ako se brojevi 8746 i 1652 podijele jednim istim brojem, dobiju se redom ostaci 16 i 14. Odredi broj kojim je dijeljenje vršeno.
3) Naći sve cijele vrijednosti broja x, za koji je izraz $A = \frac{3x-7}{x+4}$ cio broj. Odredi odgovarajuće cijele vrijednosti izraza.
4) Stranice trougla ABC su $a = 15$, $b = 13$ i $c = 14$. Izračunaj mu površinu.

5) Obim trougla ABC je 34. Izmedju stranica a,b,c je dat odnos $a:b=3:8$, $b:c=4:3$. Izračunaj dužine tih stranica a, b,c.

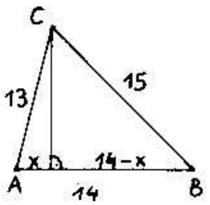
**VIII razred:**

1) Odredi prirodan broj n, tako da je $n(n+1)(2n+1)=84$.
2) Od tri data broja a,b i c, sabiranjem svaka dva dobijemo slijedeće zbirove: 332, 408, 466. Odredi date brojeve a, b i c.
3) Dijagonala baze pravilne četverostrane piramide iznosi 3 cm. Bočne ivice piramide obrazuju sa dijagonalama njene baze ugao od $45^\circ$. Izračunati površinu i zapreminu te piramide.
4) Povlačeći četiri prave, dati krug podijeliti na najveći mogući broj dijelova.
5) Zadani su racionalni izrazi $f(x)=\frac{x}{1+x}$ i $g(x)=\frac{x}{1-x}$.
   a) Reducirati izraz: $h(x)=f(x)-2f(x)g(x)+g(x)$.
   b) Odredi vrijednost reduciranog izraza h(x) kada je $x=1$ i $x=0$.

**Rješenja:**

**VII razred:**

1) Neka je x ukupna količina jabuka (u kg) u magazinu. Tada iz $x-32-\frac{1}{4}(x-32)=126$ slijedi $x=200$ kg.
2) Neka je x traženi broj. Tada brojevi 8746 i 1652 pri dijeljenju sa x daju ostatke 16 i 14, pa su brojevi 8730 i 1638 djeljivi sa x. Kako je $8730=2\cdot3^2\cdot5\cdot97$ i $1638=2\cdot3^2\cdot91$, a divizor x je veći od ostataka 16 i 14, tada je $x=18$.
3) $A=\frac{3x-7}{x+4}=3-\frac{19}{x+4}\in Z \Leftrightarrow x+4\in\{-19,-1,1,19\} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in\{-23,-5,-3,15\} \Leftrightarrow A\in\{4,22,-16,2\}$.
4)



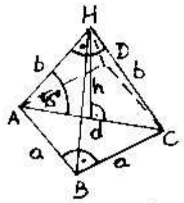

Primjenom Pitagorinog teorema na trokute ADC i BDC dobivamo $h^2=13^2-x^2$ i $h^2=15^2-(14-x)^2$, a odatle (oduzimanjem jednadžbi) $x=5$, $h=12$, pa je površina trokuta ABC $P=\frac{1}{2}ch=84$.



5) $a:b=3:8 \Rightarrow a=\frac{3}{8}b$,
   $b:c=4:3 \Rightarrow c=\frac{3}{4}b$,
   $a+b+c=34 \Rightarrow \frac{3}{8}b+b+\frac{3}{4}b=34 \Rightarrow b=16 \Rightarrow a=6,\ c=12.$

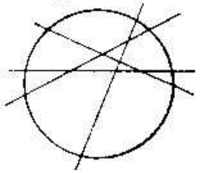
**VIII razred:**

1) Kako je $84=2^2\cdot3\cdot7=3\cdot(3+1)\cdot(2\cdot3+1)$, tada je $n=3$.
2) Neka je $a<b<c$. Tada iz $a+b=332$, $a+c=408$ i $b+c=466$ slijedi: $a=137$, $b=195$, $c=271$.
3)




$d=3$ cm $\Rightarrow a=\frac{d\sqrt2}{2}=\frac{3\sqrt2}{2}$ cm,
$h=\frac{d}{2}=\frac{3}{2}$ cm,
$b=a=\frac{3\sqrt2}{2}$ cm,
$O=a^2+4\cdot\frac{a^2\sqrt3}{4}=a^2(1+\sqrt3)=\frac{9}{2}(1+\sqrt3)$ cm$^2$,
$V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{a\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt2}{6}a^3=\frac{\sqrt2}{6}\cdot\left(\frac{3\sqrt2}{2}\right)^3=$
$=\frac{9}{4}$ cm$^3$

4)



Najveći broj dijelova kruga je 11.

5) a) $h(x)=\frac{x}{1+x}+\frac{x}{1-x}-2\cdot\frac{x}{1+x}\cdot\frac{x}{1-x}=2x\cdot\frac{1-x}{(1+x)(1-x)}=\frac{2x}{1+x}$, $x\neq\pm1$.
   b) $h(1)=1$, $h(0)=0$.

**REPUBLIČKO TAKMIČENJE**

**Zadaci:**

**VII razred:**

1) Ako su x i y realni brojevi i $x>2$, $y>2$, tada je $xy>x+y$.
2) Dokazati da je u pravouglom trouglu zbir kateta jednak zbiru prečnika opisane i upisane kružnice.
3) Dat je kvadrat stranice a. Odrediti poluprečnik kružnice (pomoću stranice a) koju dodiruju stranice datog kvadrata AB i BC, a prolazi kroz vrh D.
4) Odredi broj svih kvadrata na šahovskoj tabli.
5) Za koje vrijednosti promjenljivih x i y izraz

$A = 2x^2+2xy+y^2-2x+2y+2$, $x,y$  $R$, ima najmanju vrijednost ?

**VIII razred:**

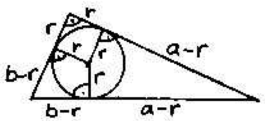
1) Za koje vrijednosti x i y izraz $x^4+2x^2+y^2-2y+2$ poprima najmanju vrijednost ?
2) Koji najmanji četverocifreni cijeli broj treba dopisati iza broja 1989, da dobijeni broj bude djeljiv sa 20, 5 i 89 ?
3) Polukružnica, čiji je prečnik stranica pravougaonika, dijeli dijagonalu u omjeru 9:1. Kako se odnose stranice pravougaonika ?
4) Šetajući pored puta, pješak primijeti da ga trolejbus pristiže svakih 6 minuta, a iz suprotnog smjera ga mimoilazi svaka 2 minuta. Kako brzo polaze trolejbusi sa stanice ako se i pješak i trolejbus kreću ravnomjerno ?
5) Trostrana piramida, ivica baze 6, 8 i 10 cm, ima sve bočne ivice po 13 cm. Izračunati zapreminu piramide.

**R j e š e n j a :**

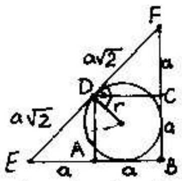
**VII razred:**

1) $x > 2 \wedge y > 2 \Rightarrow xy > 2x \wedge xy > 2y \Rightarrow 2xy > 2x+2y \Rightarrow xy > x+y.$

2) $a+b = (r+(a-r)) + (r+(b-r)) = ((a-r)+(b-r)) + 2r = c + 2r = 2R + 2r.$




3) Kružnica, čiji polumjer tražimo, je zapravo kružnica upisana pravokutnom trokutu EBF, pa je njen polumjer (prema prethodnom zadatku) $r = \frac{|EB|+|BF|-|EF|}{2} = \frac{2a+2a-2a\sqrt{2}}{2} = a(2-\sqrt{2}).$




4) Broj svih kvadrata na šahovskoj ploči je $8^2+7^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2 = 204.$

5) Izraz $A = 2x^2+2xy+y^2-2x+2y+2 = (x+y+1)^2 + (x-2)^2 - 3$ ima minimum jednak $-3$ za $x+y+1 = 0$ i $x-2 = 0$, tj. za $x = 2$ i $y = -3$.

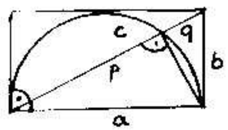
**VIII razred:**

1) Izraz $x^4+2x^2+y^2-2y+2 = (x^2+1)^2 + (y-1)^2$ poprima minimum za $x^2 = 0$ i $y-1 = 0$, tj. za $x = 0$ i $y = 1$.



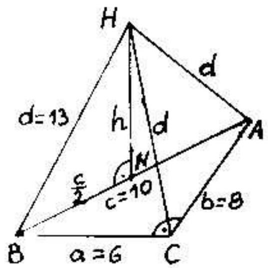
2) $M(20, 5, 89) = 1780$
$19890000 = 1780 . 11174 + 280$
$1780 - 280 = 1500$
Broju 1989 treba dopisati 1500, pa će broj 19891500 biti djeljiv sa 1780.

3) $a^2 = cp \wedge b^2 = cq \Rightarrow a^2 : b^2 = p:q = 9:1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a:b = 3:1.$




4) Neka je x razmak u minutama izmedju dva trolejbusa. Stazu koju pješak prijedje za 6 minuta, trolejbus prijedje za 6-x minuta. Analogno tome, stazu koju pješak prijedje za dvije minute, trolejbus prijedje za x-2 minute. Iz $6-x = 3\cdot(x-2)$ slijedi $x = 3$. Dakle, trolejbusi polaze sa stanice svake 3 minute.

5) Kako je baza piramide pravokutan trokut, tada nožište visine piramide pada u polovište hipotenuze baze. Primjenom Pitagorinog teorema je $h = \sqrt{13^2-5^2} = 12$ cm, pa je volumen piramide $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\cdot\frac{ab}{2}\cdot h = \frac{1}{6}abh = 96 \text{ cm}^2$.



# SR CRNA GORA

## OPŠTINSKO TAKMIČENJE

**Z a d a c i :**

**VII razred:**

1) U rombu ABCD oštar ugao je $60^{\circ}$. Tačke M i N pripadaju stranicama romba AB i BC, tako da je $MB + BN = AB$ (stranica romba). Dokazati da je trougao MND jednakostraničan.
2) Zagreb i Beograd udaljeni su 400 km. Iz Beograda prema Zagrebu krene prvi automobilist vozeći prosječnom brzinom 70 km/h. Istovremeno iz Zagreba krene drugi automobilist vozeći prosječnom brzinom 90 km/h. Na kojoj udaljenosti od Beograda će se ono sresti ?
3) Površina pravouglog trougla iznosi $100\ cm^2$, a poluprečnik upisane mu kružnice je $r = 8$ cm. Nadji obim trougla.
4) U kružnom isječku veličine šestine kruga upisan je novi krug. Odredi odnos površina isječka i kruga koji je u njemu upisan.
5) Cifre dvocifrenog prirodnog broja se razlikuju za 5. Ako se izmedju njih umetne cifra 9, dobija se trocifreni broj koji je 11 puta veći od tog dvocifrenog broja. Nadji taj broj.

**VIII razred:**

1) Data je prava $y = kx + n$.
   a) Odredi parametre k i n tako da prava prolazi kroz tačke A(1,4) i B(-2,1), a zatim za nadjene vrijednosti k i n riješiti nejednačinu: $\frac{kx+n}{x} < 2$ .
   b) Ako je $n = 3$, koliko mora biti k, ako se zna da prava dijeli skup tačaka $\{(x,y):\ 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 2\}$ na dva dijela jednakih površina ?
2) Dat je polinom $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$.
   a) Rastaviti polinom $P(x)$ na proizvod prostih činilaca.
   b) Dokazati da je za svaki neparan prirodan broj x polinom $P(x)$ djeljiv sa 8.
3) Površina kocke je $441\ cm^2$. Naći rastojanje jednog tjemena kocke od njezine dijagonale.

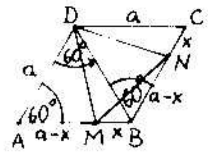


4) Neki trocifreni broj se poveća za 45 ako cifre jedinica i desetica zamijene mjesta. Isti broj se smanji za 270 ako cifre desetica i stotica zamijene mjesta. Ako cifre stotica i jedinica zamijene mjesta, dobiće se broj koji je veći od datog. Za koliko ?
5) Skrati razlomak $P(x) = \frac{(a^2+b^2)x + ab(x^2+1)}{(a^2-b^2)x + ab(x^2-1)}$, pa riješi jednačinu $P(x) = 2$ .

**R j e š e n j a :**

**VII razred:**

1)

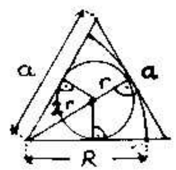



Iz sukladnosti trokuta AMD i BND ( $|AM| = |BN|$, $|AD| = |BD|$, $\sphericalangle DAM = \sphericalangle DBN$) izlazi da je $|DM| = |DN|$, pa pošto je $\sphericalangle MDN = 60^{\circ}$ (trokut DAM rotacijom oko D za $60^{\circ}$ prelazi u trokut DBN), tada je trokut DMN jednakostraničan.

2) Neka se automobilisti sretnu na udaljenosti x km od Beograda. Tada iz $\frac{x}{70} = \frac{400-x}{90}$ (vrijeme provedeno u vožnji za oba automobilista je isto) izlazi $x = 175$ km.

3) Iz $r = \frac{P_{\triangle}}{s} \Rightarrow s = \frac{P_{\triangle}}{r} \Rightarrow O = 2s = \frac{2P_{\triangle}}{r} = \frac{200}{8} = 25$ cm .

4)




$r = \frac{1}{3}R$

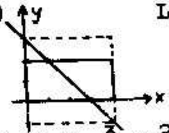
$P_{ki} : P_k = \frac{1}{6}R^2\pi : r^2\pi = \frac{1}{6}R^2 : \frac{1}{9}R^2 = 3:2.$

5) Neka je $\overline{xy} = 10x+y$ traženi broj. Tada iz $\overline{x9y} = 11 \cdot \overline{xy}$ i $|x-y| = 5$, tj. iz $100x+90+y = 11.(10x+y)$ i $|x-y| = 5$ slijedi $x+y = 9$ i $|x-y| = 5$, pa su traženi brojevi 27 i 72.

**VIII razred:**

1) a) Uvrštavajući koordinate točaka A(1,4) i B(-2,1) u jednadžbu $y = kx + n$, izlazi $k = 1$, $n = 3$, tj. $y = x+3$.

Iz $\frac{x+3}{x} < 2 \Rightarrow \frac{x+3}{x} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{3-x}{x} < 0 \Rightarrow x \in R \setminus [0,3]$ .

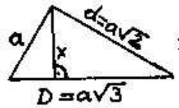
b) 


Lako se vidi da je $k = -1$

2) a) $P(x) = x^3+5x^2+3x-9 = (x^3+3x^2)+(2x^2+6x)+(-3x-1) = x^2(x+3) + 2x(x+3) - 3(x+3) = (x+3)(x^2+2x-3) = (x+3)(x+3)(x-1) = (x-1)(x+3)^2$.

b) $x = 2k+1 \Rightarrow P(2k+1) = 2k(2k+4)^2 = 8k(k+2)^2$, što je očito djeljivo sa 8.

3) $O = 6a^2 = 441 \Rightarrow a = \frac{21}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{2}$




$x = \frac{ad}{D} = \frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{7\sqrt{6}}{2} = 7$ cm.

4) Neka je $\overline{xyz} = 100x+10y+z$ traženi broj. Tada iz $\overline{xzy} = \overline{xyz} + 45$ i $\overline{yxz} = \overline{xyz} - 270$, tj. iz $100x+10z+y = 100x+10y+z+45$ i $100y+10x+z = 100x+10y+z-270$ izlazi $z = y+5$ i $x = y+3$, tj. $z-x = 2$, pa je $\overline{zyx} - \overline{xyz} = 100z+10y+x-(100x+10y+z) = 99(z-x) = 99\cdot 2 = 198$.

5) $P(x) = \frac{(a^2+b^2)x+ab(x^2+1)}{(a^2-b^2)x+ab(x^2-1)} = \frac{(a+bx)(ax+b)}{(a+bx)(ax-b)} = \frac{ax+b}{ax-b}$.

$P(x) = 2 \Rightarrow \frac{ax+b}{ax-b} = 2 \Rightarrow x = \frac{3b}{a}$.

## REPUBLIČKO TAKMIČENJE

**Z a d a c i :**

**VII razred:**

1) Zbiru cifara dvocifrenog broja A dodat je kvadrat toga zbira i dobijen broj A. Nadjite čemu je jednako A.

2) Mogu li tri pješaka prijeći put od 36 km za manje od 6 časova, ako je brzina pješaka 5 km/čas i ako imaju moped koji može da vozi samo jedno lice brzinom ne većom od 15 km/čas ?

3) U trouglu ABC stranica AC = 7 cm, BC = 8 cm i AB = 6 cm. Prava paralelna stranici AC odsijeca od trougla trapez čija je manja osnovica jednaka zbiru krakova trapeza. Naći stranice trapeza.



4) Razlika cifara dvocifrenog broja po apsolutnoj vrijednosti nije veća od 3, a zbir njegovih cifara je 9. Nadjite taj dvocifreni broj.

5) Težišna linija u pravouglom trouglu, povučena iz pravog ugla, ima dužinu 20 cm, a dužina normale, povučene iz sredine hipotenuze do presjeka s katetom, je 15 cm. Izračunati dužine kateta.

**VIII razred:**

1) Dvocifren broj, sabran s brojem zapisanim istim ciframa u obrnutom poretku, daje kvadrat prirodnog broja. Naći sve takve dvocifrene brojeve.

2) Date su funkcije $f(x) = (2m-0,5)x+5$ i $g(x) = (7m+2)x-4$. Odrediti vrijednosti m tako da:

a) grafici funkcija budu paralelni,

b) da je f(x) opadajuća, a g(x) rastuća funkcija,

c) da je nula funkcije f(x) pozitivan broj.

3) Za svoju kolekciju Vasko je kupio četiri marke: francusku, madjarsku, bugarsku i kubansku. Bez francuske marke na kasi je platio 400 dinara, bez madjarske 450, bez bugarske 440, a bez kubanske 270 dinara. Koliko košta svaka marka ?

4) Tijelo je sastavljeno od polulopte i prave kupe sa zajedničkom osnovom - krugom. Poluprečnik polulopte je 2 dm, a visina kupe, izražena u cm, je rješenje jednačine $\frac{x-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} - \frac{2x+\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{5}} + x + 10 = 0$. Izračunaj površinu i zapreminu toga tijela.

5) Težišna linija pravouglog trougla, povučena iz pravog ugla, ima dužinu 20 cm, a dužina normale, povučene iz sredine hipotenuze do presjeka s katetom, je 15 cm. Izračunati dužine kateta

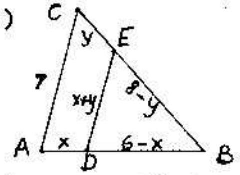
**R j e š e n j a :**

**VII razred:**

1) Neka je $A = \overline{xy} = 10x+y$ traženi broj. Tada iz $x+y+(x+y)^2 = 10x+y$ slijedi $(x+y)^2 = 9x$, tj. $x+y = 3\sqrt{x}$, odakle se lako

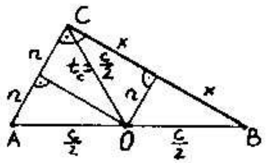
dobiva $A \in \{12,\ 48,\ 90\}$.

2) Svaki pješak će trećinu puta, tj. 12 km prijeći mopedom za najmanje $12/15 = 0{,}8$ sati, a ostatak puta od 24 km za točno $24/5 = 4{,}8$ sati, što je ukupno manje od 6 sati. Evo kako će to izvesti:
Prvi pješak će prvo mopedom prijeći 12 km, ostaviti moped i dalje nastaviti pješke. Drugi će pješak 12 km prepješačiti, slijedećih 12 km voziti se mopedom, ostaviti moped i ostatak od 12 km nastaviti pješke. Treći pješek će pješačiti 24 km i posljednjih 12 km voziti se mopedom.

3) 


Iz sličnosti trokuta ABC i DBE slijedi: $7:6:8 = (x+y):(6-x):(8-y)$. Iz $6:8 = (6-x):(8-x)$ slijedi $y = \frac{4}{3}x$, a iz $7:6 = (x+y):(6-x)$ slijedi $13x+6y = 42$, pa je $x = 2$ cm, $y = \frac{8}{3}$ cm, $x+y = \frac{14}{3}$ cm .

4) Neka je $\overline{xy} = 10x+y$ traženi broj. Tada iz $|x-y| \leq 3$ i $x+y=9$ slijedi $y = 9-x$ i $|2x-9| \leq 3$, odakle je $\overline{xy} \in \{36,45,54,63\}$.

5) 


Neka je normala duljine $n = 15$ cm spuštena na katetu duljine a. Tada je $b = 2n = 30$ cm. Nadalje je $a = 2x = 2\sqrt{t_c^{\,2}-n^2} = 5\sqrt{7}$ cm, $c = 2t_c = 40$ cm.

**VIII razred:**

1) Neka je $\overline{xy} = 10x+y$ traženi broj. Tada iz $(10x+y)+(10y+x) = k^2$ $(k \in N)$ izlazi $11(x+y) = k^2$ $(k \in N)$, odakle je $x+y = 11$. Rješenja zadatka su $\overline{xy} \in \{29,\ 38,\ 47,\ 56,\ 65,\ 74,\ 83,\ 92\}$.

2) a) Iz $2m-0{,}5 = 7m+2 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$.
b) Iz $2m-0{,}5 < 0$ i $7m+2 > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{4}$ i $m > -\frac{2}{7} \Rightarrow -\frac{2}{7} < m < \frac{1}{4} \Rightarrow$ $\Rightarrow m \in (-\frac{2}{7}, \frac{1}{4})$.
c) Iz $f(x) = 0 \Rightarrow (7m-0{,}5)x+5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{7m-\frac{1}{2}}$, $m \neq \frac{1}{14}$, pa iz $x > 0 \Rightarrow \dfrac{5}{7m-\frac{1}{2}} > 0 \Rightarrow 7m-\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{14} = m \in (\frac{1}{14}, \infty)$.

3) Neka su redom F,M,B,K brojevi francuskih, madjarskih, bugarskih i kubanskih maraka koje je Vasko kupio. Tada zbrajanjem jednakosti: $M+B+K = 400$, $F+B+K = 450$, $F+M+K = 440$, $F+M+B = 270$ (*) izlazi: $3(F+M+B+K) = 1560$, tj. $F+M+B+K = 520$ (**). Oduzimanjem redom jednakosti (*) od jednakosti (**), dobivamo: $F = 120$, $M = 70$, $B = 80$, $K = 250$.



4) Rješenje zadane jednadžbe je $x = 50$, pa je visina stošca $v = 50$ cm $= 5$ dm. Sada za volumen složenog tijela dobivamo $V = \frac{1}{2}V_{kugle} + V_{stošca} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}r^3\pi + \frac{1}{3}r^2\pi v = \frac{1}{3}r^2\pi(2r+v) =$ $= \frac{1}{3}\cdot 2^2\pi(4+5) = 12\pi$ dm$^3$.

5) Vidi 5. zadatak VII razreda.

# SR HRVATSKA

## OPĆINSKO NATJECANJE

**Z a d a c i** (DRUGA SKUPINA) :

**V razred:**

1) Kojom znamenkom završava broj $1246\cdot1347\cdot1448\cdot1549 + 4321\cdot7533\cdot8643\cdot2467$ ?
2) Što sve može biti presjek dva trokuta? Na koliko najviše dijelova ta dva trokuta mogu podijeliti ravninu? Nacrtaj odgovarajuće slike.
3) U prazne kvadratiće lika upiši brojeve tako, da zbroj brojeva u svaka 3 susjedna kvadratića bude 21. Obrazloži postupak.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | | | | | | | | 6 | | |

4) Tri kokoši za tri dana snesu tri jajeta. Koliko jaja snesu 12 kokoši za 12 dana ?

**VI razred:**

1) Izračunaj broj x iz jednakosti
$$24960:\left(3360-\frac{300\cdot(200-6x)}{115}\right)=8.$$
2) Dokaži da zbroj 12 uzastopnih prirodnih brojeva nikada nije djeljiv sa 4.
3) Svaka od 3 posude sadrži cijeli broj litara, a sve 3 zajedno ne sadrže ni 30 litara. Napunimo li prvu posudu vodom, pa svu vodu prelijemo u drugu, u drugoj će biti 2/3 njene ukupne sadržine, a ako istu količinu prelijemo u treću, u njoj će biti 3/4 od njene ukupne sadržine. Kolika je sadržina svake pojedine posude ?
4) U sobi površine 21 $m^2$ položena su 3 saga oblika pravokutnika. Površina jednog je 8 $m^2$, drugog 7 $m^2$ i trećeg 6 $m^2$. Po dva saga zajednički prekrivaju površinu od 2 $m^2$, a sva 3 zajednički prekrivaju površinu od 1 $m^2$.
   a) Kolika površina poda nije pokrivena sagovima ?
   b) Kolika je površina dijela poda koji je pokriven samo najvećim sagom ?



**VII razred:**

1) Duljine dviju stranica trokuta jednake su 6,21 cm i 1,47 cm. Kolika je duljina treće stranice, ako je njena duljina prirodni broj ?
2) Prosjek starosti 11 igrača u nekoj nogometnoj momčadi je 22 godine. Za vrijeme igre jedan igrač, zbog povrede, načas napusti teren, a prosjek godina starosti igrača te momčadi koji ostanu u igri je 21 godina. Koliko godina ima igrač koji je napustio igru ?
3) Cijena jednog proizvoda donosila je tvornici gubitak od 20 %. Nakon toga cijena je povećana najprije za 10 %, a odmah zatim za daljnjih 35 %. Koliki je sada dobitak u postocima ?
4) U trokutu ABC je sjecištem U simetrala kuteva $\beta$ i $\gamma$ povučen pravac paralelan sa stranicom $\overline{BC}$. Ako su $B_1$ i $C_1$ sjecišta tog pravca sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, tada vrijedi jednakost $|B_1C_1| = |BB_1| + |CC_1|$. Dokaži.

**VIII razred:**

1) Zadan je vrh B(-4,-5) trokuta ABC i jednadžbe $5x+3y-4=0$, $3x-8y+13=0$ dviju njegovih visina. Odredi koordinate vrhova A i C.
2) Opseg pravokutnika je 28 cm, a duljina dijagonale je 10 cm. Odredi duljine stranica pravokutnika.
3) Odredi vrijednosti x i y za koje će izraz $4x^2+9y^2-12x+30y+1989$ imati najmanju moguću vrijednost. Odredi tu vrijednost danog izraza.
4) Dan je jednakokračan trokut ABC s osnovicom $\overline{AB}$. Ako je M bilo koja točka pravca AB takva, da $M\notin\overline{AB}$, tada razlika udaljenosti točke M do pravaca na kojima leže krakovi ne ovisi o izboru točke M. Dokaži.

**R j e š e n j a :**

**V razred:**

1) Prvi pribrojnik završava znamenkom 4, a drugi znamenkom 3, pa zbroj završava znamenkom 7.
2) Prazan skup, točka, dužina, trokut, četverokut, peterokut i šesterokut (nacrtajte odgovarajuće slike). Maksimalan broj dijelova ravnine (u slučaju šesterokuta) je 8.

3) Označimo brojeve u praznim kvadratićima redom sa a,b,c,d, e,f,g,h,i. Tada iz $7+a+b = a+b+c$ izlazi $c = 7$ i analogno tome $f = h = 7$. Sada lako izlazi da je $i = g = 8$, $e = 6$, $d = 8$, $b = 6$, $a = 8$.

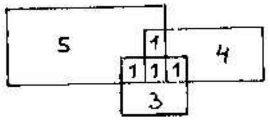
4) Jedna kokoš za 3 dana snese 1 jaje, a za 12 dana 4 jaja, pa 12 kokoši za 12 dana snesu $12 \cdot 4 = 48$ jaja.

**VI razred:**

1) $x = 18$.

2) Neka su $n, n+1, \dots, n+11$ 12 uzastopnih prirodnih brojeva. Tada je $n+(n+1)+\dots+(n+11) = 12n+66 = 6\cdot(2n+11)$. Kako je $2n+11$ neparan broj, a broj 6 nije djeljiv sa 4, tada ni broj $6\cdot(2n+11)$ nije djeljiv sa 4.

3) Neka su x,y,z sadržine posuda u litrama. Tada je $x = \frac{2}{3}y$ i $x = \frac{3}{4}z$, pa je x djeljiv sa 2 i 3, tj. sa 6, y sa 3, a z sa 4. Lako se vidi da je $x = 12$, $y = 9$, $z = 8$ jedino rješenje zadatka.

4) 


a) Nije pokriveno $21-(5+4+3+1+1+1+1) = 5\ m^2$ poda.

b) Samo najvećim sagom pokriveno je $8-(1+1+1) = 5\ m^2$ poda.

**VII razred:**

1) Duljina svake stranice trokuta veća je od razlike duljina, a manja od zbroja duljina ostalih dviju stranica. Iz $|a-b| < c < a+b$ slijedi $4{,}74 < c < 7{,}69$, odakle je (zbog $c \in \mathbb{Z}$) $c \in \{5\text{ cm},\ 6\text{ cm},\ 7\text{ cm}\}$.

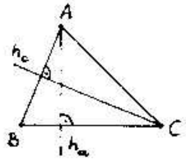
2) Neka je S zbroj godina starosti svih 11 igrača. Tada je $S = 22\cdot 11$. Neka je nadalje x broj godina igrača koji je napustio igru. Tada iz $S-x = 21\cdot 10$ izlazi $x = 32$ god.

3) Neka je x stvarna vrijednost proizvoda. Tada je $x - 20\%x = 0{,}8x$ prodajna cijena, $1{,}1\cdot 0{,}8x = 0{,}88x$ cijena nakon prvog poskupljenja, $1{,}35\cdot 0{,}88x = 1{,}188x$ konačna cijena, pa je dobitak $0{,}188x = 18{,}8\%x$.

4) Iz $\sphericalangle B_1BU = \sphericalangle UBC = \frac{\beta}{2}$ (BU je simetrala kuta $\beta$) i $\sphericalangle UBC = \sphericalangle BUB_1$ (kutevi sa paralelnim kracima) slijedi da je $\sphericalangle BUB_1 = \frac{\beta}{2}$, pa je trokut $BUB_1$ jednakokračan, tj. vrijedi $|BB_1| = |B_1U|$. Analogno (iz jednakokračnosti trokuta $UCC_1$) slijedi da je $|CC_1| = |UC_1|$, pa je $|B_1C_1| = |B_1U| + |UC_1| = |BB_1| + |CC_1|$. (Vidi skicu).




**VIII razred:**

1) 


$B(-4,-5) \notin h_a, h_c$

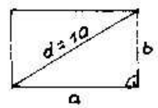
$h_a \dots 5x+3y-4 = 0 \dots y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$

$h_c \dots 3x+8y+13 = 0 \dots y = -\frac{3}{8}x - \frac{13}{8}$

Korištenjem uvjeta okomitosti pravaca BC i $h_a$, dobivamo da je koeficijent smjera pravca BC jednak $a_{BC} = \frac{3}{5}$, pa, korištenjem jednadžbe pravca točkom B, $y-y_B = a_{BC}(x-x_B)$, dobivamo $BC \dots 3x-5y-13 = 0$.

Analogno izlazi $a_{AB} = \frac{8}{3}$, $AB \dots 8x-3y+17 = 0$.

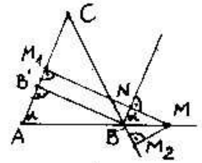
Iz $A = AB \cap h_a$ i $C = BC \cap h_c$ izlazi $A(-1,3)$ i $C(1,-2)$.

2) 


Iz $2(a+b) = 28$ izlazi $a+b = 14$ (1), a odatle (kvadriranjem) $a^2+b^2+2ab = 196$, tj. (zbog $a^2+b^2 = 100$) $2ab = 96$. Sada je $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab = 100-96 = 4$, tj. $a-b = 2$ (2).

Iz (1) i (2) izlazi: $a = 8$ cm, $b = 6$ cm.

3) Iz $4x^2+9y^2-12x+30y+1989 = (2x-3)^2+(3y+5)^2+1955$ slijedi da će navedeni izraz biti minimalan za $2x-3 = 0$ i $3y+5 = 0$, tj. za $x = \frac{3}{2}$ i $y = -\frac{5}{3}$, kada će vrijednost tog izraza biti 1955.

4) 


Treba dokazati da je razlika $|MM_1| - |MM_2|$ stalna i da ne zavisi od položaja točke M.

Iz točke B nacrtamo visinu na krak $\overline{AC}$ i paralelu sa krakom $\overline{AC}$.

Kako je četverokut $BB'M_1N$ pravokutnik, to je $|BB'| = |NM_1|$. Nadalje je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle NBM$ (kutevi sa paralelnim kracima) i $\sphericalangle MBM_2 = \sphericalangle ABC$ (vršni kutevi), pa, kako je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC$, slijedi da je $\sphericalangle NBM = \sphericalangle MBM_2$. Uz to je $\overline{BM}$ zajednička stranica pravokutnih trokuta NBM i $BM_2M$, pa iz sukladnosti trokuta BMN i $BMM_2$ slijedi da je $|NM| = |MM_2|$. Stoga je $|MM_1| - |MM_2| = |MM_1| - |MN| = |NM_1| = |BB'|$, tj. razlika $|MM_1| - |MM_2|$ je jednaka duljini visine na krak i ne ovisi o položaju točke M.

## REPUBLIČKO NATJECANJE

**Z a d a c i :**

**VII razred:**

1) Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC odabrana je točka D, tako da su opsezi trokuta ABC, ACD i BCD redom 50 cm, 45 cm i 35 cm. Odredi duljinu dužine $\overline{CD}$.

2) Na vagi sa dvije zdjelice uspostavljena je ravnoteža pomoću dvije vrste kuglica različitih masa, tako da su na jednoj zdjelici samo kuglice mase a, a na drugoj samo kuglice mase b. Ukupan broj kuglica na obje zdjelice je 195. Ako sa jedne zdjelice uzmemo 11 kuglica, tada ponovnu ravnotežu možemo uspostaviti tako, da sa druge zdjelice uzmemo 2 kuglice i stavimo na zdjelicu sa koje smo maknuli 11 kuglica. Koliko je bilo kuglica svake vrste ?

3) Ako četveroznamenkasti broj napišemo obrnutim redoslje - dom, novi četveroznamenkasti broj bit će 9 puta veći. Koji četveroznamenkasti broj ima to svojstvo ?

4) Ivica i Perica, učenici VII razreda, članovi su matema - tičke grupe koju čine "sedmaši" i "osmaši". U grupi je više od 70% "osmaša". Koliko je najmanje članova u ovoj grupi ?

5) Unutar kvadrata ABCD nalazi se točka P, takva da je trokut ABP jednakokračan s kutevima uz osnovicu $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA = 15^\circ$. Dokaži da je trokut PCD jednakostraničan.

**VIII razred:**

1) Kutevi trokuta odnose se kao 2:3:7. Najdulja stranica trokuta je 1 m. Odredi duljine ostalih dviju stranica.

2) Riješi najprije sustav jednadžbi: $x+py=3$, $px+4y=6$, a onda odredi vrijednost parametra p, tako da za rješenje $(x,y)$ sustava jednadžbi vrijedi $|x-y|>1$.

3) U nekoj tvornici proizvode pakuju u pakete od po 3 kg i 5 kg. Dokaži da se ovim pakovanjima može isporučiti svaka narudžba veća od 7 kg.

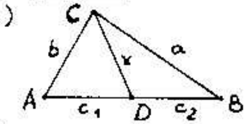
4) Odredi sve parove cijelih brojeva $(x,y)$ koji zadovoljavaju jednadžbu $x^2-xy-2y^2=18$.

5) Zadan je paralelogram ABCD čija je površina 1. Središte M stranice $\overline{AD}$ spojeno je s vrhom B. Dužina $\overline{MB}$ siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki Q. Odredi površinu četverokuta MQCD.



**R j e š e n j a :**

**VII razred:**

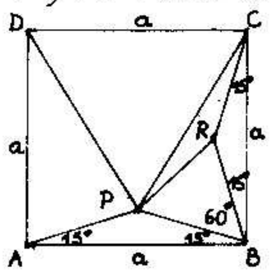
1) 


Zbrajanjem jednakosti $c_1+x+b=45$, $c_2+a+x=35$ i $a+b+c=50$ slijedi $2(a+b+c)+2x=130$, tj. $50+x=65$, odakle je $x=15$ cm.

2) Neka je na prvoj zdjelici x kuglica, svaka mase a. Tada je na drugoj zdjelici 195-x kuglica, svaka mase b. Iz $xa=(195-x)b$ i $(x-11)a+2b=(193-x)b$ izlazi $11a=4b$, a potom $x=143$, $y=52$.

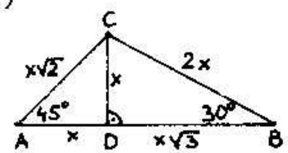
3) Neka je $\overline{abcd}$ traženi broj. Tada vrijedi $\overline{abcd}\cdot 9=\overline{dcba}$, pa je $a=1$ (jer bi u suprotnom dobili peteroznamenkasti broj). Dalje iz $\overline{1bcd}\cdot 9=\overline{dcb1}$ slijedi da je $d=9$. Zatim iz $\overline{1bc9}\cdot 9=\overline{9cb1}$, tj. $(1000+100b+10c+9)\cdot 9=9000+100c+10b+1$, odnosno $89b+8=c$ izlazi da je $b=0$, a odatle $c=8$. Traženi broj je 1089.

4) Označimo broj članova grupe sa x. Kako je u grupi više od 70% "osmaša", "sedmaša je manje od 30%, a kako su bar dva člana (Ivica i Perica) "sedmaši", to je $2<0{,}30x$, tj. $x>\frac{20}{3}>6$. U grupi je najmanje 7 članova.

5) 


Neka je R unutrašnja točka kvadrata ABCD, takva da je $BCR\cong ABP$. Tada je trokut PBR jednakostraničan (jer je $|PB|=|BR|$ i $\sphericalangle PBR=60^\circ$), pa iz $|PR|=|BR|=|RC|$ slijedi da je trokut PRC jednakokračan. Iz $\sphericalangle PRC=360^\circ-\sphericalangle PRB-\sphericalangle BRC=150^\circ$ slijedi sukladnost trokuta PRC i BRC, odakle je $|PC|=|BC|=a$. Analogno izlazi da je i $|PD|=a$, pa je trokut PCD jednakostraničan.

**VIII razred:**

1) 


Kutevi trokuta su $30^\circ$, $45^\circ$ i $105^\circ$. Neka je x duljina visine spuštene iz vrha najvećeg kuta na najdulju stranicu. Sada je očito duljina najveće stranice $x+x\sqrt3$, odakle je $x=\frac{\sqrt3-1}{2}$, pa je duljina jedne od traženih stranica $2x = \sqrt{3}-1$, a druge $x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

2) Za $p \in R \setminus \{-2,2\}$ zadani sustav jednadžbi ima rješenje $x = \frac{6}{p+2}$, $y = \frac{3}{p+2}$, za $p = 2$ sustav je neodredjen ($x = 3-2y$, $y \in R$), dok je za $p = -2$ sustav jednadžbi nemoguć.

Iz $|x-y| > 1 \Rightarrow |\frac{3}{p+2}| > 1 \Rightarrow \frac{|p+2|}{3} < 1 \Rightarrow |p+2| < 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3 < p+2 < 3 \Rightarrow -5 < p < 1$, $p \neq -2$. Dakle, $p \in (-5,-2) \cup (-2,1)$.

3) Treba pokazati da diofantska jednadžba $3x+5y = n$ ima rješenje $(x,y) \in N^2$ za svaki $n \in N$, $n > 7$, pri čemu su x i y količine paketa od po 3 kg i 5 kg, a n je ukupna narudžba izražena u kg. S obzirom na djeljivost brojem 3, svaki prirodni broj $n > 7$ može imati jedan od ova 3 oblika: $n = 3k$, $n = 3k+1$, $n = 3k+2$, $k > 2$.

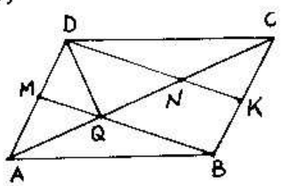
$1^o$) Za $n = 3k$, $k > 2$, narudžbe se isporučuju samo u paketima od 3 kg.

$2^o$) Za $n = 3k+1 = 3(k-3) + 2\cdot 5$ narudžbe se isporučuju tako, da su 2 paketa od po 5 kg, a ostalih $(k-3)$, $k > 2$, od po 3 kg.

$3^o$) Za $n = 3k+2 = 3(k-1) + 5$ narudžbe se isporučuju tako, da se isporuči jedan paket od 5 kg, a ostalih $(k-1)$, $k > 2$, od po 3 kg.

4) Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku $(x+y)(x-2y) = 18$. Kako je razlika $(x+y)-(x-2y) = 3y$ djeljiva sa 3, razlikovat ćemo ove slučajeve: $(x+y, x-2y) \in \{(3,6), (6,3), (-3,-6), (-6,-3)\}$, pa za rješenja zadatka dobivamo: $(x,y) \in \{(4,-1), (5,1), (-4,1), (-5,-1)\}$.

5)




Neka je K središte $\overline{BC}$. Tada je MBKD paralelogram, $\overline{NK}$ je srednjica trokuta AND, pa je $|AQ| = |QN| = |CN|$. Sada izlazi: $P(AQM) = \frac{1}{2}P(AQD) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}P(ACD) = \frac{1}{6}P(ACD) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}P(ABCD) = \frac{1}{12}P(ABCD)$, pa je $P(MQCD) = P(ACD) - P(AQM) = \frac{5}{12}P(ABCD)$.



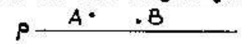
# SR MAKEDONIJA

## OPŠTINSKO TAKMIČENJE

Z a d a c i :

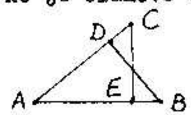
V razred:

1) Umesto slova staviti cifru - isto slovo ista cifra: $\overline{1abcde} \cdot 3 = \overline{abcde1}$.
2) Ploština jednog dvorišta u obliku pravougaonika je 10 ari. Dužina jedne stranice je 25 m. Da bi se dvorište ogradilo, potrebno je na svakih 5 metara postaviti po jedan stub. Naći koliko je stubova potrebno da bi se ogradilo dvorište.
3) Za 2 kg šljiva i 3 kg jabuka plaćeno je 6900 din, a za 4 kg šljiva i 7 kg jabuka 15300 din. Pošto je 1 kg šljiva, a pošto 1 kg jabuka ?
4) Na pravcu p naći točku M, tako da je suma AM + MB najmanja.




VI razred:

1) Naći $x \in Z$ i $y \in Z$ ako je $|x| \cdot |y| = 12$.
2) Na sastanku pionirskog saveta jedne škole bilo je 12 prisutnih, a broj otsutnih je bio $\frac{1}{7}$ od ukupnog broja. Koliko je članova bilo u pionirskom savetu ?
3) Na crtežu je $\overline{AB} = \overline{AC}$ i $\overline{AD} = \overline{AE}$. Dokazati da je $\overline{BD} = \overline{CE}$.




4) U ravnokrakom trouglu ABC, gde je $\overline{AC} = \overline{BC}$, sa obimom 22 cm, povučena je medijana $AA_1$. Ako je $L_{ABA_1} = 17$ cm i $L_{AA_1C} = 19$cm naći dužine stranica trougla ABC.

VII razred:

1) Dokaži da je za svako x izraz $(3x-4)\cdot(7x+8) - 1,5x\cdot(24x+4) - 5\cdot(1-2x)$ negativan.
2) Jedan radnik ostvaruje normu za 6 časova, drugi za 5 časova, a treći za 4,5 časa. Oni zajedno izradjuju 795 predmeta. Po koliko predmeta izradjuje svako od njih ?
3) U krugu $k(O,r)$, tetiva AB je simetrala radijusa OP. Dokazati da je AB stranica ravnostranog trougla upisanog u krug k.

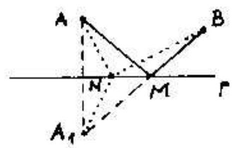
4) U ravnokrakom trapezu ABCD, sa krakom od 6 cm, dijagonala deli srednju liniju na delove od 2 cm i 5 cm. Odrediti:
   a) obim trapeza,
   b) uglove trapeza.

**VIII razred:**

1) Voz je ušao u tunel za 15 sekundi. Do izlaska zadnjeg vagona iz tunela, prošlo je 30 sekundi. Naći dužinu voza i brzinu kretanja voza, ako je dužina tunela 300 m.
2) Ako $n \in N$ nije deljiv sa 5, onda je $n^2+1$ ili $n^2-1$ deljivo sa 5. Dokazati.
3) Naći ploštinu deltoida čije su stranice 16 cm i 20 cm, a dijagonala, koja nije njegova osa simetrije, je 20 cm.
4) U trouglu ABC simetrala ugla A seče stranicu BC u tački D. Kroz tačku D povlačimo pravu paralelno sa AC, koja stranicu AB seče u tački E. Kroz E povlačimo pravu paralelno sa BC, koja AC seče u F. Dokazati da je $\overline{AE} = \overline{CF}$.

**Rješenja:**

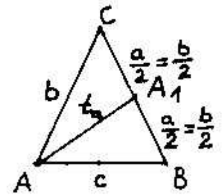
**V razred:**

1) $\overline{1abcde} \cdot 3 = \overline{abcde1} \Rightarrow 3\cdot(100000 + 10000a + 1000b + 100c + 10d + e) = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + 1 \Rightarrow$
   $\Rightarrow 299999 = 70000a + 7000b + 700c + 70d = 7e \mid :7 \Rightarrow$
   $\Rightarrow 42857 = \overline{abcde} \Rightarrow \overline{abcde} = 42857.$
2) $P = ab = 1000\ m^2 \wedge b = 25\ m \Rightarrow a = \frac{P}{b} = 40\ m \Rightarrow O = 2(a+b) = 130$ m, pa je potrebno $130:5 = 26$ stubova.
3) 2 kg šljiva + 3 kg jabuka = 6900 din ⇒
   ⇒ 4 kg šljiva + 6 kg jabuka = 13800 din
   4 ,, ,, + 7 ,, ,, = 15300 ,, } ⇒
   ⇒ 1 kg jabuka = 15300 − 13800 = 1500 din ⇒
   ⇒ 1 kg šljiva = 1200 din.
4) 

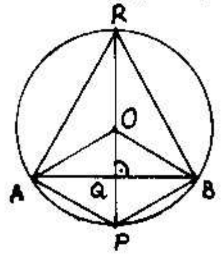
Neka je $A_1$ osnosimetrična točka točki A s obzirom na pravac p kao os simetrije i M točka presjeka pravca p sa dužinom $\overline{A_1B}$. Tada je $|AM| = |A_1M|$, pa je $|AM| + |BM| = |A_1B|$.
Neka je sada N bilo koja točka pravca p, različita od točke M. Sada se lako pokazuje da je $|AN| + |BN| = |A_1N| + |BN| > |A_1B| = |AM| + |BM|$.

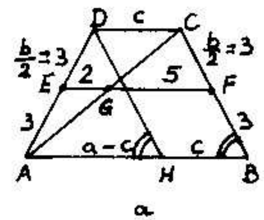


**VI razred:**

1) $(x,y) \in \{(-12,-1), (-12,1), (-6,-2), (-6,2), (-4,-3), (-4,3), (-3,-4), (-3,4), (-2,-6), (-2,6), (-1,-12), (-1,12), (1,-12), (1,12), (2,-6), (2,6), (3,-4), (3,4), (4,-3), (4,3), (6,-1), (6,1), (12,-1), (12,1)\}$.
2) Neka je x broj članova pionirskog savjeta. Tada iz $\frac{6}{7}x = 12$ slijedi $x = 14$.
3) Iz sukladnosti trokuta ABD i ACE ($|AB| = |AC|$, $|AD| = |AE|$, $\angle BAD = \angle CAE$) slijedi $|BD| = |CE|$.
4) Iz $O_{\triangle ABC} = 22$, $O_{\triangle ABA_1} = 17$ i $O_{\triangle AA_1C} = 19$, tj. iz $c + 2b = 22$, $c + \frac{b}{2} + t_a = 17$ i $b + \frac{b}{2} + t_a = 19$ slijedi $c = 6$ cm, $b = 8$ cm.



**VII razred:**

1) Dani izraz svodi se na izraz $-15x^2 - 37$, što je (zbog $x^2 \geq 0$) očito negativno.
2) Za 1 sat prvi radnik napravi $\frac{1}{6}$ predmeta, drugi $\frac{1}{5}$, a treći $\frac{2}{9}$. Iz $(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{2}{9}) \cdot x = 795$ slijedi $x = 1350$, pa je prvi radnik izradio $1350:6 = 225$ predmeta, drugi $1350:5 = 270$ predmeta, a treći $1350:4,5 = 300$ predmeta.
3) 

Uz oznake kao na slici, prema uvjetu zadatka slijedi: $\angle APB = \angle AOB = 2 \cdot \angle ARB$ (odnos središnjeg i obodnog kuta), pa iz $\angle APB + \angle ARB = 180^\circ$ slijedi $\angle ARB = 60^\circ$. Kako je trokut ABR jednakokračan ($|AR| = |BR|$), slijedi da je on i jednakostraničan.
4) 

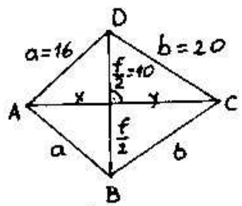
Iz sličnosti trokuta AGE i ACD slijedi da je $c = 4$ cm. Analogno iz sličnosti trokuta ABC i GFC slijedi da je $a = 10$ cm. Za opseg trapeza tada dobivamo $O = a + 2b + c = 26$ cm.
Neka je sada $\overline{HD} \parallel \overline{BC}$. Tada je $|AH| = a - c = 6$ cm $= b$, pa je (zbog $|HD| = b$) trokut AHD jednakostraničan, tj. $\angle HAD = \angle AHD = \angle ABC = 60^\circ$.

**VIII razred:**

1) Neka je $x$ duljina vlaka, a $y$ njegova brzina. Tada iz $x = 15y$ i $300 = 30y$ slijedi $x = 150$ m, $y = 10$ m/s.

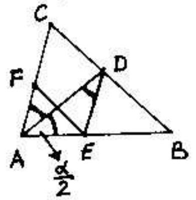
2) Za $n = 5k+1$ izraz $n^2+1 = 25k^2+10k+2$ nije djeljiv sa 5, dok je izraz $n^2-1 = 25k^2+10k$ djeljiv sa 5. Analogno se pokazuje i za brojeve oblika $5k+2$, $5k+3$ i $5k+4$.

3)



Primjenom Pitagorinog teorema izlazi $x = \sqrt{16^2-10^2} = 2\sqrt{39}$ i $y = \sqrt{20^2-10^2} = 10\sqrt{3}$, pa je $|AC| = 2\sqrt{39}+10\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\sqrt{13}+5)$, odakle je površina deltoida $P = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD| = 20\sqrt{3}(\sqrt{13}+5)$ cm$^2$.

4)



$\sphericalangle EAD = \sphericalangle DAC = \sphericalangle ADE$ (izmjenični kutevi) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle ADE$ je jednakokračan $\Rightarrow |AE| = |DE|$. No, kako je EDCF paralelogram, to je $|DE| = |CF|$, pa na osnovu prethodnog slijedi da je $|AE| = |CF|$.

**REPUBLIČKI NATPREVAR**

**Z a d a č i :**

**VII oddelenie:**

1) Dokaži deka brojot $S = 4a^2+3a+5$, kade što $a$ e cel broj, e deliv so 6 ako i samo ako $a$ ne e deliv ni so 2 ni so 3.

2) Od čaša polna so mleko, Sašo ispil $\frac{1}{5}$ od mlekoto i ja dopolnil so kafe. Potoa pak ispil $\frac{1}{5}$ od polnata čaša i pak ja doponil so kafe. Otkako i tretiot pat ispil $\frac{1}{5}$ od sodržinata vo čašata, vo nea ostanale 28 cm$^3$ poveke mleko od kafe. Da se najde volumenot na čašata.

3) Vo vnatrešnosta na ramnostraniot triagolnik ABC e izbrana točkata O, od koja stranata AC se gleda pod agol od $150°$. Dokaži deka otsečkite: $\overline{OA} = m$, $\overline{OB} = n$ i $\overline{OC} = s$ se strani na pravoagolen triagolnik.

4) Na stranite AB i BC na rombot ABCD, so ostar agol $60°$, se zameni točkite M i N, taka što e $\overline{MB}+\overline{BN} = \overline{AB}$. Točkata P e simetrična na N vo odnos na stranata na rombot CD. Dokaži



deka $AD \parallel MP$.

**VIII oddelenie:**

1) Ako e $a+v+s = 1$, togaš $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$. Dokaži.

2) Eden velosipedist trgnal od seloto A kon gradot B, oddalečen 28 km, koga pominal 2 km velosipedistot go stignal kamion, koj što po izvesno vreme stignal vo gradot B, se zadržal vo nego 22 minuti i na vrakanje kon seloto A go sretnal velosipedistot na rastojanie 8 km od B. Da se presmeta brzinata na dviženjeto na kamionot i velosipedistot, ako velosipedistot pristignal vo B vo isto vreme koga kamionot se vratil vo A.

3) Od temeto C na paralelogramot ABCD ($\overline{AC} > \overline{BD}$) se spušteni normalite CE i CF na prodoženijata na stranite AB i AD. Dokaži deka $\overline{AB}\cdot\overline{AE}+\overline{AD}\cdot\overline{AF} = \overline{AC}^2$.

4) Vo pravilna četiristrana piramida, so osnoven rab 12 cm i visina 8 cm, e vpišana kocka, taka što edna nejzina strana leži na osnovata na piramidata, a četiri teminja na bočnite rabovi. Opredeli go odnosot na ploštinite na kockata i piramidata.

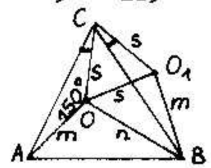
**R j e š e n j a :**

**VII razred:**

1) Broj $a$ možemo zapisati u obliku $a = 6k+r$, $r \in \{0,1,\dots,5\}$.
Za $a = 6k$ je $S = 6\cdot(4k^2+3k)+5$, pa $2|a$ i $3|a$, $6\nmid a$,
za $a = 6k+1$ je $S = 6\cdot(24k^2+11k+2)$, pa $2\nmid a$ i $3\nmid a$, $6|S$,
za $a = 6k+2$ je $S = 6\cdot(24k^2+19k+4)+3$, pa $2|a$, $6\nmid S$,
za $a = 6k+3$ je $S = 6\cdot(24k^2+27k+8)+2$, pa $3|a$, $6\nmid S$,
za $a = 6k+4$ je $S = 6\cdot(24k^2+35k+13)+3$, pa $2|a$, $6\nmid S$,
za $a = 6k+5$ je $S = 6\cdot(24k^2+43k+20)$, pa $2\nmid a$ i $3\nmid a$, $6|S$.

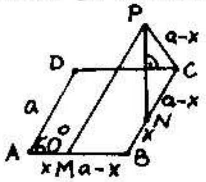
2) Neka je $x$ količina mlijeka, a $y$ količina kave.
U prvom slučaju imamo da je volumen čaše $V = \frac{4}{5}x+\frac{1}{5}y$, u drugom slučaju $V = \frac{16}{25}x+\frac{9}{25}y$, a u trećem $\frac{4}{5}V = \frac{64}{125}x+\frac{36}{125}y$, pa iz $\frac{64}{125}V-\frac{36}{125}V = 28$ slijedi $V = 125$ cm$^3$.

3)



Neka je O točka u unutrašnjosti jednakostraničnig trokuta ABC, takva da je $\sphericalangle AOC = 150°$. Zarotirajmo trokut AOC oko točke C za $60°$. Neka se O preslika u

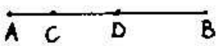
$O_1$, A će se preslikati u B, a C će ostati fiksna točka. Tada je trokut $OO_1C$ jednakostraničan ($|CO| = |CO_1|$ i $\sphericalangle OCO_1 = 60°$), pa je $\sphericalangle OO_1C = 60°$. Iz $\sphericalangle BO_1O = \sphericalangle BO_1C - \sphericalangle OO_1C = 150° - 60° = 90°$ slijedi da je trokut $OBO_1$ pravokutan. Kako je, osim toga $|BO_1| = m$, $|BO| = n$, $|OO_1| = s$, tvrdnja zadatka je dokazana.

4) 

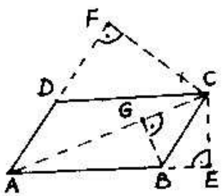
Lako se pokazuje da je $|MB| = |PC|$ i $\sphericalangle MBC = \sphericalangle BCP = 120°$, pa je četverokut PMBC jednakokračan trapez, zbog čega je $\overline{MP} \parallel \overline{BC}$. Kako je i $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, po tranzitivnosti slijedi da je $\overline{AD} \parallel \overline{MP}$

**VIII razred:**

1) Iz $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab$ $(*)$.
Iz $a+b+c = 1 |^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac = 1$ $(**)$.
Iz $(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $a^2+b^2+c^2 + a^2+b^2+c^2 + a^2+b^2+c^2 \geq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$.

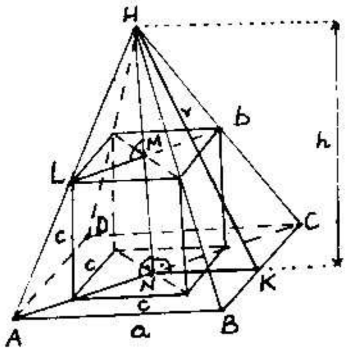
2) 

Kamion je sustigao biciklistu u C, a zatim ga je sreo u D. Dok je biciklist stigao iz D u B, $|DB| = 8$ km, kamion je prešao put od $|DA| = 28-8 = 20$ km, pa je njegova brzina $20:8 = 2{,}5$ puta veća od brzine biciklista.
Znači, ako je brzina biciklista x km/h, brzina kamiona je 2,5x km/h, pa imamo da od trenutka kada je biciklist stigao u C, on se kretao $(28-2)/x$ sati. Kamion je prešao za to vrijeme $26+28 = 54$ km za $54/2{,}5x$ sati. Budući da se kamion zadržao u B 22 minuta, za razliku vremena kretanja imamo da je 22/60 sati, pa se dobiva da je $26/x - 54/2{,}5x = 11/30$, tj. $x = 12$ km/h. Dakle, brzina bicikla je 12 km/h, a kamiona 30 km/h.

3) 

Iz sličnosti trokuta ACE i ABG slijedi $|AC| : |AE| = |AB| : |AG|$, tj. $|AB| \cdot |AE| = |AC| \cdot |AG|$ $(*)$. Analogno iz sličnosti trokuta ACF i CBG slijedi $|BC| \cdot |AF| = |AC| \cdot |GC|$, tj. (zbog $|BC| = |AD|$) $|AD| \cdot |AF| = |AC| \cdot |GC|$ $(**)$. Iz $(*)$ i $(**)$ sada izlazi $|AB| \cdot |AE| + |BC| \cdot |AF| = |AC| \cdot (|AG| + |GC|)$, tj. $|AB| \cdot |AE| + |AD| \cdot |AF| = |AC|^2$.



4) 

$\Delta HAN \sim \Delta HLM \Rightarrow h : \frac{a\sqrt{2}}{2} = (h-c) : \frac{c\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 12:8 = (8-c):c \Rightarrow c = 4{,}8$ cm,
$\Delta KEN$: $v = \sqrt{h^2+(\frac{a}{2})^2} = 10$ cm,
$O_p = a^2+2av = 384$ cm$^2$,
$O_k = 6c^2 = 138{,}24$ cm$^2$,
$O_k : O_p = 384 : 138{,}24 = 9 : 25$.

# SR SLOVENIJA

**OBČINSKO TEKMOVANJE**
**ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE**

**N a l o g e :**

**VI razred:**

1) Izračunaj vrednost izraza $(3\frac{2}{5} - 0,2\cdot 1\frac{2}{3})\cdot(\frac{7}{8} + 0,8\cdot 0,75\cdot 2\frac{1}{2})$.
2) V štirimestni številki 133a naj bo a ena izmed cifer 0,1, 2,3,4,5. Zanimajo nas vsi delitelji števila 133a, ki nisu manjši od dva in večji od deset. Pri kateri cifri a je največ takih deliteljev? Zapiši te delitelje.
3) Dne 15. aprila 1989. navijemo dve uri. Ena je točna, druga pa prehiteva 4 minute na uro. Kdaj bosta prvič spet oba kazalca na obeh urah v enakih položajih ?
4) Kvadrat ABCD smo trikrat popolnoma pokrili z manjšimi kvadrati:
   - prvič s takimi, ki imajo stranico dolgo 4 cm,
   - drugič s takimi, ki imajo stranico dolgo 5 cm in
   - tretjič s takimi, ki imajo stranico dolgo 6 cm.

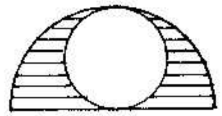
   Nobenega manjšega kvadrata ne moremo pokriti na tak način. Kolikšna je ploščina kvadrata ABCD ?
5) Načrtaj trikotnik $\Delta ABC$, če je $c = 5$ cm, $\alpha = 60^\circ$ in je središče trikotniku očrtanega kroga oddaljeno od stranice b za 2 cm. Opiši postopek.

**VII razred:**

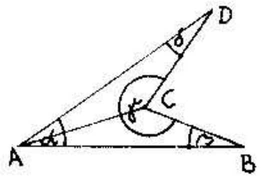
1) Izračunaj vrednost izraza $(-3)^3 - (-2,25)^2\cdot(-1)^6 + (-3)\cdot(-2,5)^4$.
2) Na osnovi lastnosti računskih operacij reši enačbo $(((10x-4):9)\cdot 10+7):13 = 19$.
3) Po nesreči so se izgubili podatki o številu tekmovalcev za bronasta, srebrna in zlata Vegova priznanja iz neke občine. Ostali so le naslednji podatki: za srebrno priznanje je iz te občine tekmovalo 40 učencev, 7,5% teh učencev je odšlo tekmovat za zlata priznanja in od vseh učencev te občine, ki so tekmovali za srebrna Vegova priznanja, sta se jih le 2% prebila do tekmovanja za zlato priznanje. Izračunaj, koliko učencev te občine je tekmovalo za bronasta priznanja in koliko za zlata.



4) Obseg črtanega lika meri 116 cm. K robu lika sodi seveda tudi notranja krožnica. Izračunaj ploščino tega lika. $(\pi = \frac{22}{7})$.

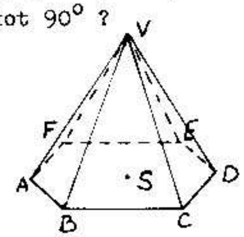


5) V skiciranem štirikotniku ABCD je $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{CD}$, kot $\alpha = 30^\circ$, diagonala $\overline{AC}$ deli kot $\alpha$ tako, da je $\sphericalangle CAD$ dvakrat tolikšen kot $\sphericalangle CAB$. Izračunaj ostale notranje kote $\beta, \gamma$ in $\delta$.




**VIII razred:**

1) Izračunaj ploščino trikotnika, ki ga oklepa graf linearne funkcije $y = ax-500$ s koordinatnima osema, če je število a pozitivna rešitev enačbe $442a(a+1) + 221(1-a^2) = 1989$.
2) Koliko bo ura, ko bosta po 12. uri kazalca prvič oklepala kot $90^\circ$ ?
3) Na skici je piramida, ki ima za osnovno ploskev pravilni šestkotnik ABCDEF, plašč pa je sestavljen iz šestih trikotnikov. Z vektorji $\vec{AB}$, $\vec{AF}$ in $\vec{AV}$ izrazi vektorje $\vec{FE}$, $\vec{SV}$ in $\vec{DV}$.




4) a) Načrtaj romb ABCD, če sta dani višina in diagonala: $v = 4$ cm in $e = 6$ cm.
   b) Z e in v izrazi obseg in ploščino romba.
5) Pravilno tristrano prizmo presekamo z ravnino pravokotno na osnovno ploskev tako, da gre ravnina skozi višino trikotnika. Presečni lik je kvadrat s ploščino $k^2$. Prostornino in površino prizme izrazi s k.

**R j e š e n j a :**

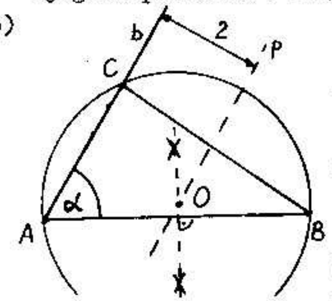
**VI razred:**

1) $\frac{437}{60}$.

2) Za $a=0$ djelitelji broja 1330 (koji nisu manji od 2 ni veći od 10) su 2, 5, 7, 10; za $a=1$ broj 1331 nema takvih djelitelja; za $a=2$ djelitelji broja 1332 su 2, 3, 4, 6, 9; za $a=3$ broj 1333 nema djelitelja; za $a=4$ broj 1334 ima djelitelj 2; za $a=5$ djelitelji broja 1335 su 3, 5. Najviše djelitelja (2, 3, 4, 6, 9) ima broj 1332 pri $a=2$.

3) Za 1 sat netočna ura "žuri" 4 minute, za 15 sati "žuri" 1 sat, a za $15\cdot12=180$ sati $=7{,}5$ dana će "žuriti" točno 12 sati, tj. pokazivat će isto vrijeme kao i točna ura. Ako su obje ure navijene 15. travnja 1989. godine, na primjer u 9 sati, tada će obje ure pokazivati isto (točno) vrijeme 22. travnja 1989. godine u 21 sat.

4) Stranica kvadrata ABCD jednaka je $M(4,5,6)=60$ cm, pa je njegova površina $P=60^2=3600$ cm$^2$.

5) 


Prvo konstruiramo stranicu $\overline{AB}$ i kut $\alpha$ pri vrhu A. Zatim nadjemo središte O trokutu opisane kružnice kao sjecište simetrale dužine $\overline{AB}$ i pravca p, paralelnog sa pravcem b i na udaljenosti 2 cm od njega (bliže točki B). Oko O opišemo kružnicu polumjera $|OA|=|OB|$ i nadjemo sjecište C te kružnice sa pravcem b. Trokut ABC je traženi trokut.

**VII razred:**

1) $-149{,}25$.

2) $x=22$.

3) Za zlatno Vegovo priznanje natjecalo se $7{,}5\%\cdot40=3$ učenika. Neka se za bronzano Vegovo priznanje natjecalo x učenika. Tada iz $2\%.x=3$ slijedi $x=150$ učenika.

4) Neka je polumjer manjeg kruga r. Tada je polumjer većeg kruga 2r, pa iz $4r+2r\pi+2r\pi=116$, tj. iz $4r(1+\frac{22}{7})=116$ slijedi $r=7$ cm, a odatle $P=\frac{1}{2}\cdot(2r)^2\pi-r^2\pi=r^2\pi=$ $=7^2\cdot\frac{22}{7}=154$ cm$^2$.

5) $\beta=\sphericalangle BAC=10^\circ$, $\delta=\sphericalangle CAB=20^\circ$, $\gamma=360^\circ-(\alpha+\beta+\delta)=300^\circ$.

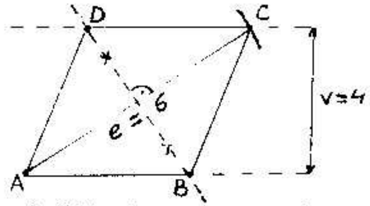


**VIII razred:**

1) Prvo imamo da je $442a(a+1)+221(1-a^2)=1989 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2a(1+a)+(1-a)(1+a)=9 \Leftrightarrow (1+a)(2a+1-a)=9 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (1+a)^2=9 \Leftrightarrow |a+1|=3 \Leftrightarrow a=2>0$. Zatim iz $y=2x-500$ slijedi $\frac{x}{250}+\frac{y}{-500}=1$, pa je tražena površina $P=\frac{1}{2}|mn|=$ $=\frac{1}{2}\cdot250\cdot500=62500$.

2) Neka velika i mala kazaljka sata medjusobno zatvaraju kut od $90^\circ$ u 12 sat i x minuta. Dok se velika kazaljka pomakne za x minuta, mala kazaljka se pomakne za $\frac{1}{12}x$ minuta. Kako kut od $90^\circ$ odgovara 15 minuta na satu, tada imamo $x-\frac{1}{12}x=15$, tj. $x=\frac{180}{11}$ min $=16$ min $21{,}8$ s, pa će velika i mala kazaljka zatvarati kut od $90^\circ$ u 12 h 16 min 21,8 s.

3) $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{SV}=\overrightarrow{AV}+(-\overrightarrow{FE})=\overrightarrow{AV}-\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DV}=\overrightarrow{SV}+(-\overrightarrow{FE})=$ $=\overrightarrow{AV}-2\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AV}-2\overrightarrow{AF}-2\overrightarrow{AB}$.

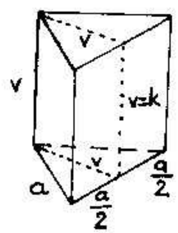
4) a) 


(Obrazložite konstrukciju).

b) $P=\frac{ef}{2}=av \Rightarrow f=\frac{2av}{e}$ $(*)$,

$a^2=(\frac{e}{2})^2+(\frac{f}{2})^2 \overset{(*)}{=}$ $a=\frac{e^2}{2\ e^2-v^2}$ $(**)$

$O=4a\overset{(**)}{=}\frac{2e^2}{\sqrt{e^2-v^2}}$, $P=av\overset{(**)}{=}\frac{e^2v}{2\sqrt{e^2-v^2}}$.

5) 


$v=k=\frac{a\sqrt3}{2} \Rightarrow a=\frac{2k}{\sqrt3}$,

$O=\frac{a^2\sqrt3}{2}+3av=2k^2\sqrt3+\frac{2k^2\sqrt3}{3}=\frac{8k^2\sqrt3}{3}$,

$V=\frac{a^2\sqrt3}{4}v=\frac{k^2\sqrt3}{3}$.

**REPUBLIŠKO TEKMOVANJE**
**ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE**

**N a l o g e :**

**VII razred:**

1) Šestmestno naravno število ima v desetiškem zapisu paroma enaki prvo in četrto cifro, drugo in peto cifro ter tretjo in šesto cifro. Ugotovi, ali je število deljivo s 13. Odgovor utemelji.
2) Za katero vrednost spremenljivke x ima izraz
$$13-\frac{5}{2+(x+0,3)^2}$$ najmanjšo vrednost ?
3) Izračunaj vrednost izraza
$$-\frac{1}{0,25}\cdot\left(\left(\frac{1}{0,25}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(-\frac{1}{0,5}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{0,8}\right)^2\right):\left(2-\frac{2}{2^2}\right)^2.$$
4) Nad stranico AB kvadrata ABCD je narisan romb ABEF, ki ima dvakrat manjšo ploščino kot kvadrat. Notranji kot romba $\sphericalangle BAF$ je oster. Kolik kot oklepata diagonali AC in AE ?
5) a) Načrtaj polkrog, ki ima premer EF dolg 8 cm. Polkrogu očrtaj enakokrak pravokotni trikotnik tako, da bo njegova hipotenuza ležala na premici EF.
   b) Izračunaj razliko ploščin obeh likov ($\pi = 3,14$).

**VIII razred:**

1) Teža kosa zlitine bakra in cinka je 24 N, potopljenega v vodi pa le še $21\frac{2}{9}$ N. Kolikšna je teža bakra v tem kosu in kolikšna teža cinka, če vemo, da je vzgon bakra v vodi $11\frac{1}{9}$% teže, vzgon cinka v vodi pa $14\frac{2}{7}$% teže ?
2) Ali velja $\left(\frac{5}{8}\right)^2+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}-\left(\frac{3}{8}\right)^2$ ? Pri katerih ulomkih tudi smeš namesti prvega ulomka kvadrirati drugega, da se njuna vsota ne spremeni? Odgovor utemelji.
3) Število 3 izrazi kot razliko večkratnikov števil 2000 in 1989. Pomagaj si z naslednjimi podatki:
   - število 3 se da izraziti kot razlika večkratnikov števil 123 in 105: $3=6\cdot123-7\cdot105$,
   - število 105 se nadalje izraža kot razlika večkratnikov števil 123 in 1989: $105=5\cdot1989-80\cdot123$,

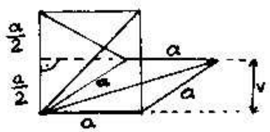


   - število 123 pa se da izraziti kot razlika večkratnikov števil 2000 in 1989: $123=192\cdot2000-193\cdot1989$.
4) Obseg romba je 10 cm, vsota dolžin obeh diagonal pa 7 cm. Izračunaj ploščino romba.
5) Pravilna štiristrana prizma ima za osnovno ploskev kvadrat s stranico a. Če položimo skozi enega od osnovnih robov ravnino, ki z osnovno ploskvijo oklepa kot $30^\circ$, razdelimo prizmo na dve telesi, katerih prostornini sta v razmerju 2:3. Izračunaj višino prizme.

**R j e š e n j a :**

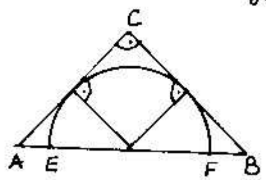
**VII razred:**

1) $\overline{abcabc}=100000a+10000b+1000c+100a+10b+c=$
   $=1001(100a+10b+c)=13\cdot77\cdot(100a+10b+c)\Rightarrow 13\mid\overline{abcabc}$.
2) $13-\frac{5}{2+(x+0,3)^2}$ ima najmanju vrijednost kada $\frac{5}{2+(x+0,3)^2}$ ima najveću vrijednost, a to će biti kada $2+(x+0,3)^2$ ima najmanju vrijednost, tj. za $x=-0,3$.
3) 1.
4)

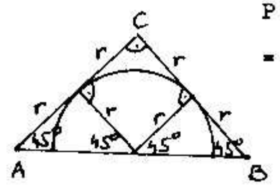



Iz $P_{\square ABEF}=\frac{1}{2}P_{\square ABCD}=a^2=\frac{1}{2}av\Rightarrow v=\frac{a}{2}$.
Dalje iz sukladnosti trokuta AFG i DFG slijedi $|DF|=a$, pa je trokut AFD jednakostraničan, tj. $\sphericalangle FAD=60^\circ$, a odatle dobivamo $\sphericalangle BAF=30^\circ$. Kako je $\sphericalangle BAE=\frac{1}{2}\cdot\sphericalangle BAF=15^\circ$ i $\sphericalangle CAD=45^\circ$, tada je $\sphericalangle EAC=90^\circ-15^\circ-45^\circ=30^\circ$.

5) a)




b)




$P=P_\triangle-\frac{1}{2}\cdot P_k=\frac{1}{2}\cdot(2r)^2-\frac{1}{2}r^2\pi=$
$=\frac{1}{2}r^2(4-\pi)=8\cdot(4-3,14)=6,88\ \mathrm{cm}^2$.

**VIII razred:**

1) Neka je težina bakra x N, a cinka 24-x N. Tada iz

$11\frac{1}{9}\%\cdot x + 14\frac{2}{7}\%\cdot(24-x) = 24 - 21\frac{2}{9}$ slijedi

$x = 20{,}5$ N, $24-x = 3{,}5$ N.

2) $(\frac{a}{c})^2 + \frac{b}{c} = \frac{a}{c} + (\frac{b}{c})^2 \Leftrightarrow \frac{a^2+bc}{c} = \frac{ac+b^2}{b} \Leftrightarrow a^2+bc = ac+b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b) - c(a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-c) = 0 \Leftrightarrow$

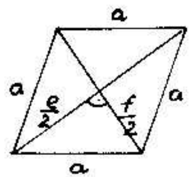
$\Leftrightarrow a-b = 0 \vee a+b-c = 0 \Leftrightarrow a = b \vee a+b = c.$

3) $3 = 6\cdot123 - 7\cdot105 = 6\cdot123 - 7\cdot(5\cdot1989 - 80\cdot123) = 566\cdot123 -$

$- 35\cdot1989 = 566\cdot(192\cdot2000 - 193\cdot1989) - 35\cdot1989 =$

$= 108672\cdot2000 - 109273\cdot1989$.

4)



$O = 10$ cm $\Rightarrow a = 2{,}5$ cm,

$e+f = 7$ cm $\Rightarrow f = e - 7$ cm,

$(\frac{e}{2})^2+(\frac{f}{2})^2 = a^2 \Rightarrow (\frac{e}{2})^2+(\frac{e-7}{2})^2 = 2{,}5^2 \Rightarrow$

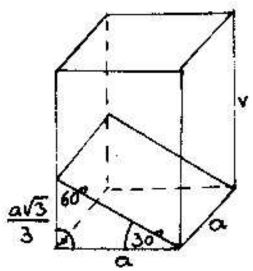
$\Rightarrow e^2-7e+12 = 0 \Rightarrow (e-4)(e-3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (e = 4$ cm $\wedge f = 3$ cm$) \vee$

$\vee (e = 3$ cm $\wedge f = 4$ cm$) \Rightarrow$

$\Rightarrow P = \frac{ef}{2} = 6$ cm$^2$.

5)



$V = a^2v,$

$V_1 = \frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot a = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3,$

$V_2 = V - V_1 = a^2v - \frac{\sqrt{3}}{6}a^3 = \frac{a^2}{6}(6v - \sqrt{3}a),$

$2:3 = V_1:V_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3 : \frac{1}{6}a^2(6v - \sqrt{3}a) =$

$= a\sqrt{3} : (6v - \sqrt{3}a) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot(6v - \sqrt{3}a) = 3\cdot a\sqrt{3} \Rightarrow v = \frac{5\sqrt{3}}{12}a$.



# SR SRBIJA

## OPŠTINSKO TAKMIČENJE

Z a d a c i :

IV razred:

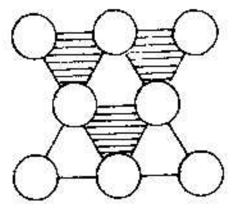
1) Nada je za 4 godine starija od Jagode, a Vladimir ima onoliko godina koliko Nada i Jagoda zajedno. Trećina zbira njihovih godina iznosi 16. Koliko godina ima svako od njih ?

2) Koliko ima četvoro cifrenih brojeva kod kojih je zbir cifara jednak 4 ?

3) Kvadrat stranice 6 cm ima površinu jednaku površini pravougaonika čije su sve stranice prirodni brojevi. Koliko ima takvih različitih pravougaonika ? Koji od njih ima najveći, a koji najmanji obim ?

4) Brojeve 2,3,4,5,6,7,8,9,10 rasporedi u polja magičnog kvadrata (3 x 3). Koliki je karakterističan zbir magičnog kvadrata ?

5)



U kružiće na slici upisati brojeve 1,2,3,4,5,6,7,8, tako da je zbir brojeva u temenima crnih trouglova 14, a u temenima belih trouglova 13.

V razred:

1) Odrediti nepoznatu cifru x, ako se zna da je količnik broja 32x60 i 56 ceo broj.

2) Putnik je prvog dana prešao $\frac{3}{8}$ predvidjenog puta, drugog dana $\frac{5}{12}$ predvidjenog puta, a trećeg dana 45 km više od $\frac{1}{6}$ predvidjenog puta i tako stigao do cilja. Kolika je dužina puta ?

3) Dve prave seku se u tački S i obrazuju četiri ugla. Zbir unakrsnih oštrih uglova iznosi $\frac{2}{11}$ jednog od unakrsnih tupih uglova. Odrediti merne brojeve svakog od ta 4 ugla.

4) Kakav mnogougao (trougao, četverougao,...) se može dobiti kao razlika skupova tačaka, dvaju oštrouglih trouglova ?

5) Lanac je iskidan na 5 delova, tako da u svakom delu ima

3 alke. Koliko se najmanje alki mora raskovati i ponovo sastaviti, da bi se od pet datih delova mogao sastaviti lanac koji će imati dva slobodna kraja ?

**VI razred:**

1) Rešiti jednačinu $\frac{|2x-3/4|}{5}=6$.
2) Odrediti sve cele brojeve n za koje je $\frac{1}{3}<\frac{1-n}{5}<\frac{11}{12}$.
3) Jedan radnik završi generalnu popravku automobila za 10 dana. Ako mu se priključi drugi radnik i pomogne mu u radu 2 dana, onda će popravka biti završena za 6 dana. Za koliko dana bi generalnu popravku automobila završio drugi radnik ?
4) Dat je pravougli trougao ABC sa pravim uglom kod temena C. Ako hipotenuzu AB produžimo preko temena A za duž AM = AC i preko temena B za duž BN = BC, onda je $\sphericalangle MCN = 135^\circ$. Dokazati.
5) Dat je jednakokraki trougao ABC sa osnovicom AB. Na produžetku duži CA, iza temena A izabrana je proizvoljna tačka D, a na duži BC tačka E, tako da je AD = BE. Dokazati da osnovica AB polovi duž DE.

**VII razred:**

1) Moj pradeda je rodjen u XIX veku. Koje godine je on slavio svoj 60. rodjendan, ako je $x^2$-te godine imao točno x godina ?
2) Šta je veće $2-\sqrt{3}$ ili $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ?
3) Odredi vrednost razlomka : $\frac{4^{13}-4^{12}-6\cdot 4^{10}}{2^{19}+2^{17}+2^{15}}$.
4) Data je duž AB = 10 cm i na njoj proizvoljna tačka M. Nad dužima AM i BM konstruisani su sa različitih strana duži AB jednakostranični trouglovi AMC i BMD. Dokazati da je četvorougao ADBC trapez i izračunati površinu četvorougla ADBC.
5) Konstruisati kvadrat čija je površina 20 $cm^2$.

**VIII razred:**

1) U jednakokrakom trouglu osnovica i visina koja joj odgovara jednake su po 8 cm. Izračunati površinu kruga opisanog oko tog trougla.



2) U jednoj cisterni ima 470 litara vode, a u drugoj 240 litara. Za jedan sat iz prve se odlije 3 puta više vode nego iz druge. Kroz 5 sati u prvoj cisterni ostane 20 litara vode manje nego u drugoj. Koliko litara vode se odlije iz svake cisterne za 1 sat ?
3) Data je kocka ABCDEFGH. Duž koja spaja centar S osnove ABCD sa temenom E seče dijagonalu AG kocke u tački P. Izračunati površinu i zapreminu kocke, ako je SE = $\sqrt{6}$ cm.
4) Rešiti jednačinu $|x-1|+|x+3|=2x+2$.
5) Dato je n različitih nekolinearnih tačaka od kojih nikoje 4 nisu u istoj ravni. Odrediti n, ako se zna da date tačke odredjuju 2 puta više različitih ravni nego što odredjuju različitih pravih.

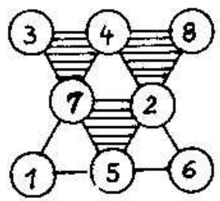
**R j e š e n j a :**

**IV razred:**

1) Sve troje imaju zajedno $3\cdot 16=48$ godina, odakle slijedi da Vladimir ima 24 godina, Nada 14, a Jagoda 10 godine.
2) 20 brojeva.
3) Različitih pravokutnika površine 36 $cm^2$, čije su stranice prirodni brojevi, ima 4. Najveći opseg od 74 cm ima pravokutnik sa stranicama 36 cm i 1 cm, a najmanji opseg 26 cm ima pravokutnik sa stranicama 9 cm i 4 cm.
4) Jedno rješenje je:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 8 | 7 |
| 10 | 6 | 2 |
| 5 | 4 | 9 |

5) Jedno rješenje je:




**V razred:**

1) Broj je djeljiv brojem 56 ako je djeljiv sa 8 i sa 7. Broj je djeljiv sa 8 ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv sa 8. Broj je djeljiv sa 7 ako mu je razlika troznamenkastog završetka i prednjeg dijela djeljiva sa 7. Iz $8\,|\,\overline{x60}$ i $7\,|\,\overline{x28}$ slijedi x = 7.

2) Pošto je $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}+\frac{1}{6}=\frac{23}{24}$, to $\frac{1}{24}$ puta iznosi 45 km, pa cijeli put iznosi $24\cdot 45=1080$ km.

3) Manji vršni kut iznosi $\frac{1}{11}$ većeg vršnog kuta, pa kako oba iznose $180^\circ$, to su ti kutevi od $15^\circ$ i $165^\circ$. Dakle, imamo dva kuta od po $15^\circ$ i dva kuta od po $165^\circ$.

4) Mogući su slučajevi: trokut, četverokut, peterokut, šesterokut i sedmerokut (nacrtajte pripadne slike).

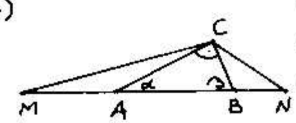
5) Treba raskovati 3 karike istog dijela i njima spojiti preostala 4 dijela.

**VI razred:**

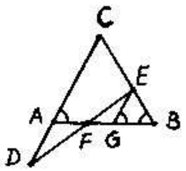
1) Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku $|2x-\frac{3}{4}|=30$.
Za $x\le\frac{3}{8}$ je rješenje jednadžbe $-(2x-\frac{3}{4})=30$, $x=-\frac{117}{8}$, a za $x\ge\frac{3}{8}$ je rješenje jednadžbe $2x-\frac{3}{4}=30$, $x=\frac{123}{8}$.

2) $\frac{1}{3}<\frac{1-n}{5}<\frac{11}{12}\,|\cdot 60 \Rightarrow 20<12-12n<55\,|-12 \Rightarrow 8<-12n<43\,|:(-12)$
$\Rightarrow -\frac{43}{12}<n<-\frac{2}{3} \Rightarrow n\in\{-3,-2,-1\}$ (zbog $n\in N$).

3) Ako prvi radnik završi posao za 10 dana, tada on za 1 dan završi $\frac{1}{10}$ posla. Neka drugi radnik sam završi posao za x dana. Tada on za 1 dan završi $\frac{1}{x}$ posla. Iz
$2\cdot\frac{1}{x}+6\cdot\frac{1}{10}=1$ slijedi $x=5$ dana.

4) 


Trokut CMA je jednakokračan, pa je $\sphericalangle ACM=\frac{\alpha}{2}$ (jer je $\alpha$ vanjski kut trokuta ACM). Analogno je $\sphericalangle BCN=\frac{\beta}{2}$, pa je $\sphericalangle NCM=90^\circ+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=90^\circ+45^\circ=135^\circ$.

5) 


Neka je $F=\overline{AB}\cap\overline{DE}$ i $G\in\overline{AB}$, $\overline{EG}\parallel\overline{AD}$. Tada je trokut GBE jednakokračan ($\sphericalangle BGE=\sphericalangle GBE$), pa je $|GE|=|BE|=|AD|$. Iz sukladnosti trokuta ADF i GEF slijedi da je $|DF|=|EF|$.

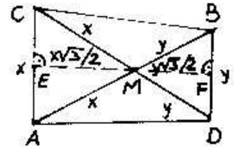
**VII razred:**

1) Iz $1900<x^2<2000 \Rightarrow x^2=1936 \Rightarrow x=44$. Pradjed je rodjen $1936-44=1892$. godine, a 60. rodjendan je slavio 1952. godine.

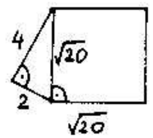
2) Jednaki su . 3) 64 .

4) Iz jednakostraničnosti trokuta AMC i BMD slijedi da je



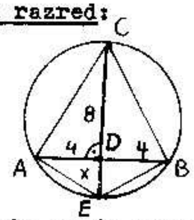



CADB trapez. Za površinu toga trapeza imamo $P=\frac{|CA|+|BD|}{2}\cdot|EF|=$
$=\frac{x+y}{2}\cdot\frac{(x+y)\sqrt{3}}{2}=\frac{10^2\sqrt{3}}{4}=25\sqrt{3}$ cm$^2$.

5) 

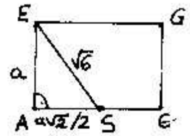

Kako je po Pitagorinom teoremu $4^2+2^2=\sqrt{20}^2$, to traženi kvadrat konstruiramo nad hipotenuzom $\sqrt{20}$ tog pravokutnog trokuta.

**VIII razred:**

1) 


Iz $|DA|\cdot|DB|=|DC|\cdot|DE|$, tj. iz $4^2=8x$ (potencija točke D u odnosu na kružnicu k) slijedi $x=2$ cm, pa je $R=\frac{1}{2}\cdot|CE|=5$ cm i $P_k=R^2\pi=25\pi$ cm$^2$.

2) Neka se iz druge cisterne za 1 sat odlije x litara vode. Tada se iz prve cisterne odlije za 1 sat 3x litara vode. Za 5 sati u prvoj cisterni će ostati $470-15x$, a u drugoj $240-5x$ litara vode, pa iz $(240-5x)-(470-15x)=20$ slijedi $x=25$. Dakle, za 1 sat iz prve cisterne istekne 75 litara, a iz druge 25 litara vode.

3) 


Primjenom Pitagorinog teorema na trokut SEA izlazi $a^2+(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2=\sqrt{6}^2$, a odatle $a=2$ cm. Konačno imamo $O=6a^2=24$ cm$^2$, $V=a^3=8$ cm$^3$.

4) Za $x\le-3$ jednadžba $-(x-1)-(x-3)=2x+2$ nema rješenja, za $-3\le x\le 1$ jednadžba $-(x-1)+(x-3)=2x+2$ ima rješenje $x=1$, a za $x\ge 1$ jednadžba $(x-1)+(x-3)=2x+2$ ima rješenja $x\in[1,\infty)$. Dakle, rješenja zadane jednadžbe su $x\in[1,\infty)$.

5) Ravnina ima $n(n-1)(n-2)/6$, a pravaca $n(n-1)/2$, pa iz $n(n-1)(n-2)/6=2n(n-1)/2$ slijedi $n=8$.

## MEDJUOPŠTINSKO TAKMIČENJE

**Z a d a c i :**

**IV razred:**

1) Traktor predje put dužine 1 m ako mu prednji točak načini 1 obrtaj, a 4 metra ako mu zadnji točak načini jedan obrtaj. Koliki put predje traktor, ako na tom putu prednji točak načini za 39 obrtaja više nego zadnji točak ?
2) Ako se ivica kocke poveća za 1 cm, novodobijena kocka ima površinu za 366 $cm^2$ veću od prvobitne. Kolika je zapremina prvobitne kocke ?
3) Dešifrovati deljenje:

```
**** : ** = **
**5
 **
 *1
  0
```

tako što ćeš umesto zvezdica staviti odgovarajuće cifre.

4) Raspolažeš sa terazijama, jednim tegom od 250 grama i 9 kg brašna. Kako pomoću samo 3 merenja odmeriti tačno 2 kg brašna ?
5) Koliko ima trocifrenih brojeva kod kojih je prva cifra paran broj, a poslednja cifra neparan broj ?

**V razred:**

1) Automobil je krenuo iz mesta A u mesto B, a istovremeno i kamion iz mesta B u mesto A. Rastojanje izmedju ova dva mesta je 462 km, a vozila su se mimoišla posle 3 i po sata vožnje. Kolike su njihove srednje brzine, ako je srednja brzina automobila za 12 km/h veća od srednje brzine kamiona ?
2) Dokazati da je broj $1989^{1989}+1$ deljiv sa 10.
3) Odrediti sve jednocifrene prirodne brojeve a, b i c, tako da je $\frac{2}{a}+\frac{b}{7}=\frac{30+c}{35}$.
4) Ako se saberu polovina, četvrtina i osmina ugla $\alpha$, onda se dobije ugao suplementan uglu $\alpha$. Koliki je ugao koji je komplementan sa suplementom ugla $\alpha$ ?
5) Data je prava p, tačka A na pravoj p i tačka B van prave p. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku B i pravu p dodiruje u datoj tački A.



**VI razred:**

1) Laza je ušao u prodavnicu u nameri da kupi gumicu i planirao je da potroši $\frac{5}{6}$ novca koji je poneo. Pri kupovini sazna da je gumica pojevtinila za 40%. Laza kupi gumicu, časti prodavca 50 dinara i ostane mu još 700 dinara. Koliko je novca imao Laza ?
2) Dat je paralelogram ABCD kome je ugao kod temena B tup. Stranice AB i BC produžene su preko temena B i na produžecima su odredjene tačke E i F, tako da su duži BE i BF osnovice jednakokrakih trouglova BCE i ABF. Dokazati da je trougao DEF jednakokraki.
3) Odrediti sve proste prirodne brojeve p takve da su i brojevi p+8 i p+10 takodjer prosti.
4) Konstruisati trougao ABC, ako su dati: ugao $\measuredangle BAC=60^\circ$, visina $BB'=4$ cm i visina $CC'=3$ cm.
5) U trima cisternama nalazi se mleko. Ako se iz prve cisterne odlije $\frac{1}{4}$ mleka, iz druge $\frac{1}{5}$ mleka i iz treće $\frac{1}{6}$ mleka, u svim cisternama ostane podjednaka količina mleka. Koliko mleka ima u svakoj, ako je u sve tri cisterne zajedno bilo 1135 litara mleka ?

**VII razred:**

1) Dat je četvorocifreni prirodan broj $\overline{abcd}$ kod koga su cifre a, b, c, d četiri uzastopna prirodna broja ($a<b<c<d$). Ako prve dve cifre zamene mesta, onda je dobijeni broj $\overline{bacd}$ deljiv sa 11. Dokazati.
2) Oko kruga poluprečnika 5 cm opisan je trapez površine 90 $cm^2$. Izračunati zbir krakova datog trapeza.
3) Ako se broj stranica konveksnog mnogougla poveća za 5, onda se broj dijagonala poveća za 45. Koliko stranica ima prvobitni mnogougao ?
4) Odrediti vrednost polinoma $P(x,y)=x^{1989}+1989y$, ako je $x^2+y^2+2x-6y+10=0$.
5) Dato je u ravni 10 crvenih i 8 plavih tačaka, tako da bilo koje tri nisu na jednoj pravoj. Koliko ima trouglova sa temenima u datim tačkama kod kojih sva temena nisu iste boje ?

**VIII razred:**

1) Čitajući dnevno isti broj stranica (izuzev poslednjeg da-

na), učenik je pročitao knjigu od 264 stranice. Da je čitao dnevno po 5 stranica više, knjigu bi pročitao tačno 10 dana ranije nego u slučaju da je svakoga dana čitao po 5 stranica manje. Koliko stranica je učenik čitao svakoga dana (izuzev poslednjeg dana) ?

2) Osnovice trapeza su $AB = 50$ cm i $CD = 30$ cm. Osnovica CD produžena je preko tačke C do tačke M. Koliko je rastojanje CM, ako se zna da duž AM deli trapez na dva, po površini, jednaka dela ?

3) Odrediti tri uzastopna neparna prirodna broja, ako je zbir njihovih kvadrata jednak četvorocifrenom broju sa jednakim ciframa.

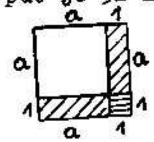
4) Data je kocka ABCDA'B'C'D' čija je osnovna ivica $a = 10$ cm. Dokaži da je presek kocke sa ravni koja prolazi kroz središta ivica AB, CC', A'D' pravilni šestougao. Izračunaj površinu tog preseka.

5) Odrediti sve cele brojeve x i y za koje je: $x^2y^2 = 3y^2 + x^2$.

**R j e š e n j a :**

**IV razred:**

1) Neka zadnji točak načini x obrtaja. Tada prednji točak načini 4x obrtaja, pa iz $4x - x = 39$ slijedi $x = 13$. Prijedjeni put je 52 metra.

2) 


Povećanjem brida kocke a za 1, svaka ploha kocke ima veću površinu za 2a+1, pa iz $6\cdot(2a+1) = 366$ slijedi $a = 30$ cm, $V = a^3 = 27000$ cm$^3$.

3) $1431:27 = 53$.
$$\begin{array}{l} \underline{135} \\ \ \ 81 \\ \ \ \underline{81} \\ \ \ \ 0 \end{array}$$

4) Podijelimo prvo brašno na dva dijela od po 4 kg i 500 g. Zatim jedan od tih 4 kg i 500 g ponovo podijelimo na dva dijela od po 2 kg i 250 g. Konačno, od 2 kg i 250 g, pomoću utega od 250 g, oduzmemo 250 g, nakon čega će ostati točno 2 kg.

5) Ukupno je $4\cdot 10\cdot 5 = 200$ brojeva (obrazložite to).



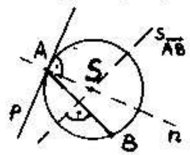
**V razred:**

1) Neka je srednja brzina kamiona x. Tada je srednja brzina automobila x +12. Iz $3{,}5x + 3{,}5\cdot(x+12) = 462$ slijedi $x = 60$, pa je srednja brzina kamiona 60 km/h, a automobila 72 km/h.

2) $1989^1, 1989^2, 1989^3, 1989^4, \ldots$ imaju znamenku jedinica redom 1,9,1,9,..., pa će $1989^{1989}$ imati znamenku jedinica 9, a $1989^{1989}+1$ znamenku jedinica nulu, tj. broj $1989^{1989}+1$ će biti djeljiv sa 10.

3) $(a,b,c) \in \{(5,4,4),(5,5,9)\}$ (obrazložite to).

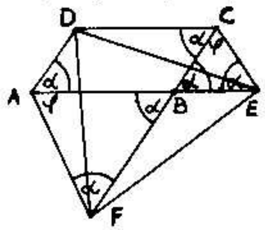
4) Iz $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{8} = 180^\circ - \alpha$ slijedi $\alpha = 96^\circ$, pa je $90^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha - 90^\circ = 6^\circ$ traženi kut.

5) 


Sjecište S simetrale dužine $\overline{AB}$ i okomice, povučene točkom A okomito na pravac p, središte je tražene kružnice, čiji je polumjer $|SA| = |SB|$.

**VI razred:**

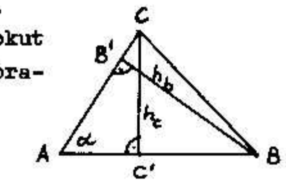
1) Neka je Laza imao x dinara. Tada iz $\frac{5}{6}x\cdot 60\% + 50 + 700 = x$ slijedi $x = 1500$ din.

2) 


Iz sličnosti jednakokračnih trokuta FBA i BEC slijedi da je $\sphericalangle BAF = \sphericalangle ECB = \varphi$, pa su i trokuti FDA i DEC sukladni (zašto ?), zbog čega je $|DF| = |DE|$, tj. trokut FED je jednako - kračan.

3) Za $p = 2$ je $p+8 = 10$ složen broj, pa $p = 2$ nije rješenje zadatka. Za $p = 3$ su $p+8 = 11$ i $p+10 = 13$ takodjer prosti brojevi, pa ~~je~~ $p = 3$ jedno rješenje zadatka. Pokazat ćemo da je to jedino rješenje. Svaki prost broj $p \geq 5$ je oblika $p = 6k-1$ ili $p = 6k+1$ $(k \in N)$. Za $p = 6k-1$ je $p+10 = 3\cdot(2k+3)$ složen broj, pa $p = 6k-1$ nije rješenje zadatka. Analogno se pokazuje da ni $p = 6k+1$ nije rješenje zadatka, jer je tada $p + 8 = 3\cdot(2k+3)$ složen broj.

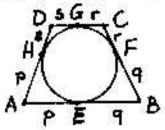
4) Prvo konstruiramo pravokutan trokut CAC', a zatim traženi trokut (obrazložite konstrukciju).



**VII razred:**

1) Neka je $\overline{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ dani broj. Tada je broj $\overline{(n+3)(n+2)(n+1)n} = \ldots = 11\cdot(101n+93)$ očito djeljiv sa 11.

2)




Lako se pokazuje da je $|AD|+|BC| = |AB|+|DC|$. Iz $90 = \frac{1}{2}(|AB|+|DC|)\cdot 2r = (|AD|+|BC|)\cdot 5$ slijedi da je $|AD|+|BC| = 24$ cm.

3) Broj dijagonala n-terokuta je $\frac{1}{2}n(n-3)$, pa iz $\frac{1}{2}(n+5)(n+2) = \frac{1}{2}n(n-3)+45$ slijedi $n=8$.

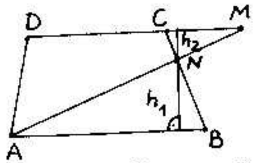
4) $x^2+y^2+2x-6y+10=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=0 \Leftrightarrow x=-1 \wedge y=3$, pa je $P(-1,3) = (-1)^{1989}+1989\cdot 3 = 5966$.

5) Ukupan broj trokuta je $280+360=640$ (obrazložite to).

**VIII razred:**

1) Neka je učenik čitao dnevno x stranica. Tada iz $\frac{264}{x-5} = \frac{264}{x+5}+10$ slijedi $x=17$ strana/dan, pa je učenik pročitao knjigu za nepunih 16 dana.

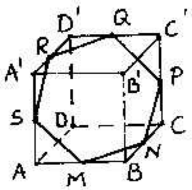
2)




Iz $P_{\Delta ABN} = P_{\Diamond ANCD} = \frac{1}{2}P_{\square ABCD}$ slijedi (pokažite to) da je $h_1 = 4h_2$, tj. $h_1:h_2 = 4:1$. Sada iz sličnosti trokuta ABN i MCN slijedi da je $|AB|:|MC| = 4:1$, tj. $|CM| = 12{,}5$ cm.

3) Iz $(2x+1)^2+(2x+3)^2+(2x+5)^2 = \overline{yyyy} \Rightarrow 12x^2+36x+35 = 1111y \Rightarrow 12\cdot(x^2+3x+3) = 12\cdot 92y+7y+1$. Lijeva strana posljednje jednakosti je djeljiva sa 12, pa to mora biti i desna, što će biti ispunjeno za $7y+1 = 12k$ $(k\in N)$, tj. za $y=5$. Za $y=5$ je $x=20$, pa su traženi brojevi: 41, 43 i 45.

4)




Lako se vidi da šesterokut MNPQRS ima jednake stranice i jednake dijagonale, pa je on pravilan.

5) $x^2y^2 = 3y^2+x^2 \Leftrightarrow (x^2-3)(y^2-1) = 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x,y)\in\{(0,0),(2,2),(2,-2),(-2,2),(-2,-2)\}$.



**REPUBLIČKO TAKMIČENJE**

**Zadaci:**

**VI razred:**

1) Cena ulaznice za košarkašku utakmicu je 20000 dinara. Kada je cena ulaznice smanjena, broj posetilaca se povećao za 50%, a prihod za 20%. Kolika je nova cena ulaznice ?

2) U jednakokrakom trouglu ABC ( AC = BC ), kome je ugao pri vrhu $\measuredangle ACB = 80^\circ$, data je tačka O, tako da je $\measuredangle ABO = 30^\circ$ i $\measuredangle BAO = 10^\circ$. Izračunati ugao $\measuredangle ACO$.

3) Ako je p prost prirodan broj, onda je $p^{11}+1989$ složen broj. Dokazati.

4) Unutar pravougaonika P dat je manji pravougaonik P'. Konstruisati pravu s koja će skup tačaka $P\setminus P'$ podeliti na 2 dela jednakih površina.

5) Gradovi A,B,C,D,E,F povezani su svaki sa svakim bilo autobuskim bilo železničkim linijama (ali ne obema). Dokazati da pri ma kakvom rasporedu linija, uvek postoje 3 grada koja su medjusobno povezana linijama iste vrste.

**VII razred:**

1) Dokazati da je proizvod $101\cdot 102\cdot\ldots\cdot 200$ deljiv sa $2^{100}$.

2) Ako je $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$, koliko je $a^4+b^4+c^4$ ?

3) Oko jednakostraničnog trougla ABC opisan je krug. Na luku BC data je proizvoljna tačka M. Dokazati da je $BM+CM = AM$.

4) Dva pravolinijska puta $p_1$ i $p_2$ ukrštaju se pod uglom od $75^\circ$. Mesto M je od puta $p_1$ udaljeno 6 km, a od raskršća R 12 km. Koliko je mesto M udaljeno od puta $p_2$ ?

5) Na polici se nalazi različitih 12 knjiga, od kojih su 5 iz matematike, 4 iz fizike i 3 iz hemije. Na koliko različitih načina se mogu rasporediti knjige na polici, ako se zna da knjige iz iste oblasti moraju biti uvek jedna do druge ?

**VIII razred:**

1) Dokazati da za svaki prirodan broj n izraz $3^{2n}-1$ nije deljiv sa $2^{2n}-1$.

2) Odrediti za koju vrednost $x,y\in R$ razlomak $\frac{2x^2+2y^2-4y+7}{x^2+y^2-2y+2}$ ima najveću vrednost. Kolika je ta vrednost ?

3) Rešiti sistem jednačina: $x^2+y^2=2x+2y-1$, $y^2+z^2=2y+2z+3$, $z^2+x^2=2z+2x+2$.

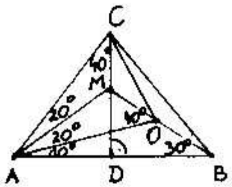
4) Neka je AB prečnik kruga, a prava t proizvoljna tangenta datog kruga. Ako su A' i B' podnožja normala iz A i B na tangentu t, onda je AA'+BB'=AB. Dokazati.

5) Dat je jednakostranični trougao čija je stranica 31 dm, unutar koga je na proizvoljan način rasporedjeno 1989 tačaka. Dokazati da postoji krug poluprečnika 6 cm, unutar koga se nalaze bar 3 tačke datog skupa.

**R j e š e n j a :**

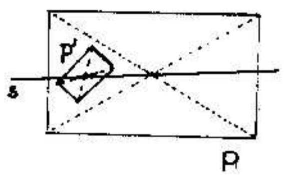
**VI razred:**

1) Neka je x broj posjetilaca prije smanjenja cijene ulaznice. Tada je raniji prihod bio 20000x, a sadašnji 24000x, pri čemu je sada 1,5x posjetilaca. Nova cijena karte je 24000x:1,5x = 16000 dinara.

2) 

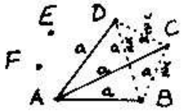

Lako se vidi da je $\sphericalangle AOM=40^\circ$ (vanjski kut trokuta OAB), $\sphericalangle DAC=50^\circ$, $\sphericalangle OAM=20^\circ$ (jer je $\triangle ABM$ jednakokračan), $\sphericalangle MAC=20^\circ$, pa iz sukladnosti trokuta MAO i MAC slijedi da je $|AO|=|AC|$, tj. trokut OCA je jednakokračan, pa je $\sphericalangle ACO=70^\circ$.

3) Ako je p = 2, tada je $p^{11}+1989=2048+1989=4037=11\cdot 367$ složen broj. Ako je $p\geq 3$, tada je p neparan broj, pa je $p^{11}+1989$ paran, dakle složen broj.

4) 


Svaki pravac, koji prolazi sjecištem dijagonala pravokutnika, dijeli pravokutnik na dva dijela jednakih površina. Traženi pravac je pravac koji prolazi sjecištima dijagonala jednog, odnosno drugog pravokutnika.

5) Kako iz svakog grada polazi 5 linija, to su (po Dirichletovom principu) bar 3 linije iste vrste. Neka su na primjer $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$ autobusne linije. Ako je bilo koja od linija $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ ili $\overline{CD}$ autobusna, imat ćemo 3 grada medjusobno povezana



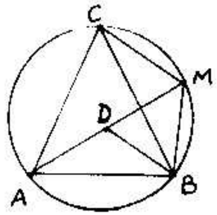



autobusnim linijama. Ako pak ni jedna od tih linija nije autobusna, tada su sve tri te linije željezničke, pa imamo 3 grada spojena medjusobno željezničkim linijama.

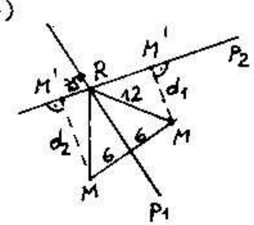
**VII razred:**

1) Kako je $101\cdot 102\cdot\ldots\cdot 200=(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 100\cdot 101\cdot 102\cdot\ldots\cdot 200):(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 100)=((1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 199)\cdot(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 200)):(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 100)=(2^{100}\cdot(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 199)\cdot(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 100)):(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 100)=2^{100}\cdot(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 199)$, to je djeljivost sa $2^{100}$ očita.

2) $0=(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)=1+(ab+bc+ca)\Rightarrow$ $\Rightarrow ab+bc+ca=-\frac{1}{2}\ \Big|^2\Rightarrow \frac{1}{4}=(ab+bc+ca)^2=(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+$ $+2abc(a+b+c)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\Rightarrow a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-$ $-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

3) 


Neka je D točka dužine $\overline{AM}$, takva da je $|MD|=|MB|$. Zbog $\sphericalangle AMB=\sphericalangle ACB=60^\circ$ (kutevi nad istim kružnim lukom $\widehat{AB}$), trokut BMD je jednakostraničan, pa je $|BD|=|BM|$. Sada iz sukladnosti trokuta ABD i OBM ($|AB|=|CB|$, $|BD|=|BM|$, $\sphericalangle ADB=\sphericalangle CMB=120^\circ$) slijedi da je $|AD|=|CM|$, pa je $|AM|=|AD|+|DM|=|CM|+|BM|$.

4) 


Razlikujemo 2 slučaja.
Ako je točka M izmedju $p_1$ i $p_2$, tada je trokut MRM' jednakokračan pravokutni (dokažite to), pa je $|MM'|=6\sqrt{2}$ km. Ako je pravac $p_1$ izmedju točke M i pravca $p_2$, tada se iz pravokutnog trokuta MM'R, u kome je $|MR|=12$ km i $\sphericalangle MRM'=75^\circ$, dobiva $|MM'|=6\sqrt{2+\sqrt{3}}$ km.

5) Knjige iz matematike se mogu medjusobno rasporediti na 120 načina, iz fizike na 24 načina, a iz kemije na 6 načina, pa je ukupno moguće $6\cdot 120\cdot 24\cdot 6=103680$ načina rasporeda knjiga.

**VIII razred:**

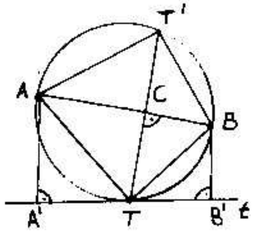
1) Kako je $2^{2n}-1=4^n-1=(4-1)\cdot(4^{n-1}+\ldots+1)=3\cdot(4^{n-1}+\ldots+1)$ djeljivo sa 3, a $3^{2n}-1$ nije (zašto ?), to je tvrdnja za-

datka očigledna.

2) Zadani razlomak se može napisati u obliku $2+\frac{3}{x^2+(y-1)^2+1}$, pa je njegov maksimum 5 kada je $x=0$ i $y=1$.

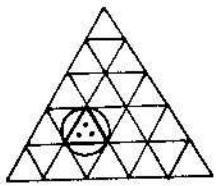
3) Zadani sustav jednadžbi možemo pisati u obliku:
$(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(y-1)^2+(z-1)^2=5$, $(z-1)^2+(x-1)^2=4$, odakle je $(x-1)^2=0$, $(y-1)^2=1$, $(z-1)^2=4$, tj. $(x,y,z)\in\{(1,2,3),\ (1,2,-1),\ (1,0,3),\ (1,0,-1)\}$.

4)




Trokut TT'A je jednakokračan, pa je $\sphericalangle ATT' = \sphericalangle AT'T$. Pošto je $\sphericalangle A'TA = \sphericalangle AT'T$, tada je $\sphericalangle A'TA = \sphericalangle ATT'$, pa su trokuti AA'T i ACT sukladni, zbog čega je $|AA'| = |AC|$. Analogno se pokazuje da je $|BB'| = |BC|$, pa je tvrdnja zadatka očigledna.

5)



Prvo zadani jednakostraničan trokut podijelimo na 961 manjih jednakostraničnih trokuta. Kako je u trokutu 1989 točaka, a 961 manjih trokuta, to po Dirichletovom principu slijedi da postoji trokutić sa najmanje 3 točke. Polumjer kruga u koga je taj trokutić upisan je $\frac{\sqrt{3}}{3}$ dm $<$ 6 cm, pa je tvrdnja zadatka očigledna.



## XV "ARHIMEDESOV" MATEMATIČKI TURNIR

### KMM "ARHIMEDES" BEOGRAD

**Z a d a c i :**

**V razred:**

PRVA GRUPA ZADATAKA:

1) a) Napisati koliko elemenata ima svaki od navedenih skupova: (1) $\emptyset$, (2) $\{2\}$, (3) $\{1,8\}$, (4) $\{1,2,3,5\}$.
   b) Unija 4 data skupa je skup _________ i ima __ elemenata.

2) a) U koliko tačaka se seku 6 pravih, ako svaka od njih seče sve ostale i nikoje 3 ne prolaze kroz istu tačku ?
   b) Isto pitanje za 100 pravih.

3) U svakoj "jednakosti" na crtežu premestiti po jedno palidrvce, tako da se dobiju ispravne (tačne) jednakosti:
   a) XII + IX = II , b) X = VII − III , c) VI − VI = XI .

4) Činioci nekog prirodnog broja su 2,3,5,7 i još neki drugi prosti brojevi. Nijedan se činilac ne ponavlja. Napišite (DA,NE) da li je taj broj deljiv brojem: a) 9, b) 15, c) 20, d) 42, e) 100, f) 210.

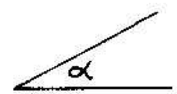
5) a) Razlomak $\frac{2}{5}$ pretvotiti u decimalni oblik, ne vršeći deljenje (ali tako da se vidi postupak).
   b) Razlomak $\frac{13}{15}$ pretvoriti u decimalni oblik i zaokružiti ga na 2 decimale.

6) Odrediti vrednost promenljive, tako da bude tačna jednakost: a) $\frac{x+2}{5}=\frac{12}{5}$, b) $\frac{y-2}{5}=\frac{2}{10}$, c) $\frac{4}{z+2}=\frac{12}{15}$ .

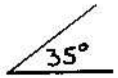
7) a) Odrediti prirodni broj n, tako da bude tačna nejednakost: $\frac{3}{4}<\frac{n}{9}<\frac{5}{6}$.
   b) Šta je veće $\frac{1987}{1988}$ ili $\frac{1988}{1989}$ ?

8) Upišite na odgovarajućoj crti propušteni broj, tako da se dobije tačna rečenica:
   a) $\frac{3}{4}$ broja ____ iznosi 48; b) 14% broja 45 iznosi ____ ;
   c) broj 4 je manji od broja 5 za ____ % ;
   d) broj 5 je veći od broja 4 za ____ % .

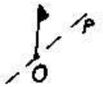
9) a) Samo pomoću jednog lenjira nacrtati ugao jednak datom uglu $\alpha$.



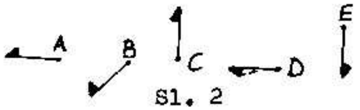
b) Dat je ugao od $35^{\circ}$. Koristeći samo jedan lenjir, nacrtati ugao od $145^{\circ}$.




10) Figura (zastavica) na levoj slici (sl. 1) rotirana je oko tačke 0 za $90^{\circ}$ u smeru koji je suprotan smeru kretanja satne kazaljke, a zatim je dobijena figura preslikana simetrično u odnosu na pravu p. Koja od figura na desnoj slici (sl. 2) verno odražava konačni rezultat izvršenih preslikavanja ?




Sl. 1




Sl. 2

DRUGA GRUPA ZADATAKA:

11) a) Rekonstruisati sledeće množenje, tj. zvezdice zameniti odgovarajućim ciframa:

```
      ***** · 34*
      ---------------
      ****6
    ******
  235038
  ----------
  *******6
```

b) Dešifrovati sabiranje (istim slovima odgovaraju iste, a različitim različite cifre):

EHEHE + AHAHA = AHAHAH .

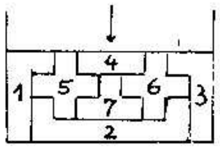
12) a) Koja 4 uzastopna prirodna broja daju proizvod 1680 ?

b) Postoji li prirodan broj kod kojeg proizvod vrednosti cifara iznosi 528 ?

13) Rep ribe ima 4 kg, glava onoliko koliko rep i pola trupa, a trup koliko glava i rep zajedno. Koliko kg ima (važe) cela riba ?

14) U ravni su date četiri tačke (A,B,C,D) koje ne pripadaju istoj pravoj. Konstruisati kružnicu koja je jednako udaljena od tih dati tačaka.

15) Figure 1-7 složene (ubačene) su u žleb odozgo (pri čemu se svaka figura kretala strogo po vertikali). Pogledaj crtež ! Kojim redom su stavljane figure u žleb ?




**VI razred:**

PRVA GRUPA ZADATAKA:

1) Dati su brojevi: $\frac{1}{3}$; 0,3; $24\frac{1}{2}$; $-1\frac{1}{3}$; $-1\frac{3}{4}$; $-8\frac{1}{4}$; 0; -8,5.



a) Poredjaj te brojeve po veličini (od najmanjeg do najvećeg).

b) Koliki je zbir datih brojeva ?

2) a) Izračunaj: $1-\frac{3}{4}:\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot(-4)\cdot5+0{,}5\cdot40$.

b) Koji broj treba oduzeti od 0,75 da bi se dobilo $-\frac{1}{4}$ ?

3) Rešiti jednačine:

a) $2x-3{,}5=-8{,}5$, b) $|x-3|=5$.

4) U VI razredu jedne osnovne škole ima 140 učenika. Na pitanje koliko ima učenika u svih osam razreda, direktor škole je odgovorio: "Broj učenika VI razreda čini dve trećine od trećine svih učenika u školi". Koliko je ukupno učenika imala ta škola ?

5) Dve visine trougla nisu manje od stranica na koje su povučene. Koliki su uglovi tog trougla ?

6) Postoji li četvorougao sa stranicama: $7\frac{2}{15}$ cm, 34,98 cm, 25,53 cm i $2\frac{1}{5}$ cm ? Obrazložiti odgovor.

7) Ako površina paralelograma ABCD iznosi S, kolika je površina trougla ABM, gdje je M proizvoljna tačka na pravoj DC ?

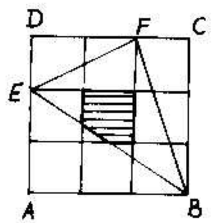
8) Napisana je reč ПET . Neka je širina svakog slova $a=6$ mm, visina slova $h=8$ mm, a debljina svake crte u slovima $b=2$ mm.

(1) Kolika je površina svakog slova posebno ?

(2) Kolika je ukupna površina sva tri slova ?

(3) Koliko procenata od ukupne površine svih slova zauzima svako pojedino slovo ?

9) Kvadrat ABCD stranice 3 cm podeljen je na 9 podudarnih kvadratića (kao na slici).




(1) Kolika je površina trougla EBF ?

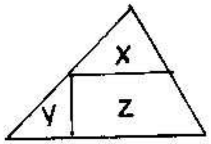
(2) Kolika je površina osenčene (šrafirane) figure ? Zaokruži tačan odgovor: a) $\frac{9}{25}$ cm$^2$, b) $\frac{15}{16}$ cm$^2$, c) $\frac{8}{9}$ cm$^2$, d) $\frac{11}{12}$ cm$^2$, e) $\frac{14}{15}$ cm$^2$.

10) Kod konveksnog četvorougla ABCD stranice AB i CD su jednake. Neka su M,N,P,Q redom središta duži BD,BC,AC,AD . Dokazati da je četvorougao MNPQ romb.

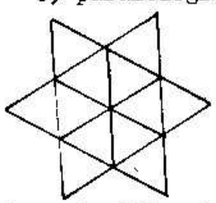
**DRUGA GRUPA ZADATAKA:**

11) a) U 11 kaveza smešteno je 55 zečeva. Zašto bar u jednom kavezu mora biti neparan broj zečeva ?
   b) U 13 kaveza smešteno je 55 zečeva. Postoji li u tom slučaju uvek kavez u koji je smešteno više od 4 zeca ? Obrazložiti odgovor.

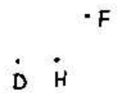
12) a) Da li za svaki prirodan broj n važi jednakost
$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\ ?$$
   b) Izračunati zbir (na što jednostavniji način):
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{99\cdot 100}\,.$$

13) 

Trougao ABC razrezan je na 3 dela, X,Y i Z, sa 2 pravolinijska reza kroz središte M stranice AB, paralelno sa BC i normalno na BC (kao na slici). Prikazati crtežima kako se od tih delova mogu sastaviti: a) pravougaonik (1 rešenje),
b) paralelogram (2 rešenja).

14) 
Koliko na ovom crtežu ima:
a) trouglova,
b) paralelograma,
c) trapeza ?

15) Od trougla ABC ostale su samo 3 tačke: D - podnožje težišne duži iz temena C , F - podnožje težišne duži iz temena A, H - podnožje visine iz temena C (videti sliku). Rekonstruisati (docrtati - konstruisati) trougao ABC.




**VII razred:**

PRVA GRUPA ZADATAKA:

1) a) Na Mićinom digitronu stoji $\frac{1}{3}=0{,}3333333$. Koliko bi trebalo da bude $\frac{1}{30}$ ? Zaokruži ispravan odgovor:
(1) 00,33333, (2) 0,3030303, (3) 0,333333,
(4) 0,0303030, (5) 0,0333333, (6) 3,33333.
   b) Da li su ovi brojevi racionalni ili iracionalni ?



2) Naći 2 različita broja x i y, tako da se množenjem prvog sa 2 dobija kvadrat drugog, a pri množenju sa 3 kub drugog.

3) Kolika je brojevna vrednost izraza $a(a+2)+c(c-2)-2ac$ ako je $a-c=7$.

4) Izračunati vrednost izraza (na što jednostavniji način):
a) $15{,}86^2-4{,}14^2$, b) $(6\frac{1}{6})^2-(\frac{1}{6})^2$, c) $p^2-2pq+q^2$, za $p=13{,}79$, $q=3{,}79$.

5) Zašto se može tvrditi za proizvod svih prostih brojeva manjih od 100, da je deljiv sa 10, 899 i sa 3599 ? Obrazložiti.

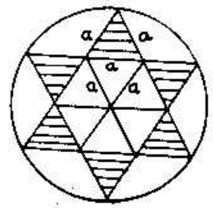
6) Broj 1989 predstaviti kao zbir 13 uzastopnih prirodnih brojeva.

7) Nad svakom stranicom kvadrata stranice a, van njega, konstruisan je jednakokraki trougao jednak (po površini) tom kvadratu.
   a) Odrediti rastojanje izmedju najudaljenijih temena trouglova, konstruisanih (na pomenuti način) nad stranicama kvadrata. (Cela figura podseća na četvorokraku zvezdu).
   b) Koliki su obim i površina ove četvorokrake zvezde ?

8) Neka je $S_1$ površina kruga poluprečnika 1 cm, a $S_2$ površina jednakostraničnog trougla stranice 2 cm. Što je veće: $S_1$ ili $1{,}5S_2$ ?

9) Imamo dva pravilna mnogougla, pri čemu drugi ima 2 puta više stranica od prvoga, a unutrašnji ugao prvog je za $10^{\circ}$ manji od unutrašnjeg ugla drugog mnogougla.
Odrediti: a) broj stranica svakog od ta 2 mnogougla,
   b) unutrašnje uglove tih mnogouglova.

10) Data je kružnica poluprečnika r = 12 cm. U nju je upisana pravilna šestokraka zvezda.
   a) Odrediti površinu pravilne šestokrake zvezde upisane u tu kružnicu.
   b) Koji deo ukupne površi čine njeni kraci (osenčana površ)?
   c) Koji deo (u procentima, na 2 decimale) kruga čini šestokraka zvezda ?



**DRUGA GRUPA ZADATAKA:**

11) Odrediti vrednost polinoma $P(x,y) = 1989x^2 - 1389y^2$, ako $x$ i $y$ zadovoljavaju jednačinu $x^2+y^2+2x-2y+2 = 0$.

12) Cena ulaznica za utakmicu snižena je za 30%, ali se, zbog povećanja broja posetilaca, prihod nije promenio. Za koliko procenata se povećao broj posetilaca ?

13) a) Koliko ukupno delilaca ima broj $3^6 \cdot 5^4$ ?

b) Ako se od trocifrenog prirodnog broja oduzme 7, dobiće se broj deljiv sa 7; ako se, pak, oduzme 8, rezultat će biti deljiv sa 8; a ako se oduzme 9, onda će rezultat biti deljiv sa 9. Naći taj trocifreni broj.

14) U ravni je dato 7 tačaka (tako da nikoje 3 nisu kolinearne). Koliko ukupno te tačke odredjuju:

a) duži, b) trouglova, c) četvorouglova, d) kružnica ?

15) a) Dešifrovati jednakost: $(HE)^2 = SHE$. Istim slovima odgovaraju iste, a različitim slovima različite cifre.

b) Dešifrovati jednakost: $(AR)^2 = FAAR$. Istim slovima odgovaraju iste, a različitim slovima različite cifre.

**VIII razred:**

**PRVA GRUPA ZADATAKA:**

1) Ako je tačna nejednakost $b > -c$, utvrditi koje od sledećih nejednakosti su tačne (T), a koje netačne (⊥):

(1) $2b > -2c$, (2) $-b < c$, (3) $-3b > 3c$, (4) $6b < -6c$,

(5) $-3b < 3c$, (6) $b/3 > -c/3$.

2) a) Rešiti jednačinu $\frac{3-5x}{2} = 1 - \frac{5x-2}{4}$.

b) Rešiti jednačinu $(x-2)^2 = (2-x)^2$.

3) a) Da li je uredjen par (3,6) rešenje jednačine $2x-y = 0$ ?

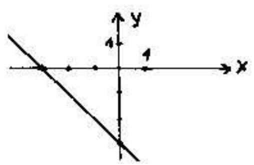
b) Da li se tačka $M(-2,1)$ nalazi na pravoj čija je jednačina $2x-y = 0$ ?

c) Koliko rešenja ima linearna jednačina $2x-y = 0$ ?

d) Koliko rešenja ima sistem od 2 različite neprotivurečne linearne jednačine sa 2 nepoznate ?

e) Rešiti sistem jednačina: $2x-y = 0$, $x+y = 0$.

4)




Koja od napisanih jednačina odgovara nacrtanom grafiku ?

(1) $y = x$, (2) $y = x+3$, (3) $y = -x+3$,

(4) $y = -x-3$, (5) $y = x-3$, (6) $y = -x$.



5) Nabrano je 100 kg pečurki čija je vlažnost 99%. Posle sušenja, vlažnost pečurki se smanjila na 98%. Kolika je masa tih pečurki posle sušenja ?

6) Koje od sledećih rečenica su tačne (T), a koje netačne (⊥) ?

a) Ako su dve ravni paralelne jednoj pravoj, onda su one paralelne i medju sobom.

b) Ako su dve ravni normalne na trećoj ravni, onda su one paralelne medju sobom.

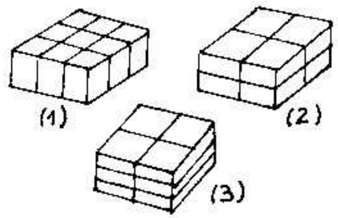
c) Prave paralelne datoj ravni, uvek leže u drugoj ravni koja je paralelna sa datom ravni.

d) Ako su dve prave normalne na jednu ravan, onda su one medjusobno paralelne.

e) Prava je normalna na ravan, ako je normalna na dve prave u toj ravni, koje prolaze kroz njen prodor kroz tu ravan.

f) Ako je duž normalna na ravan, onda njena normalna (ortogonalna) projekcija na tu ravan jeste duž.

7)




Kutija oblika kvadra može se uvezati na 3 različita načina (vidi sliku). U kojem je od ta 3 slučaja upotrebljeni kanap najkraći, a u kojem najduži, ako dimenzije $a, b, c$ kutije (paketa) zadovoljavaju nejednakost $a+b > 2c$ ? Poredjajte kanape (1), (2) i (3) po dužini (od najkraćeg do najdužeg).

8) a) Osnovica ivice pravilne četverostrane piramide je $a$, a visina piramide je 3 puta veća od osnovne ivice. Naći zapreminu te piramide (u funkciji od $a$).

b) Izračunati zapreminu pravilne četverostrane prizme, ako je data dužina dijagonale $d$ njene baze, pri čemu se dijagonala osnove odnosi prema visini prizme kao 1:2.

9) a) Obim osnove (baze) valjka iznosi $2\pi$ cm, a visina mu je jednaka prečniku osnove. Izračunati zapreminu valjka.

b) Prečnik osnove prave kupe je 6 cm, a izvodnica 5 cm. Izračunati površinu i zapreminu te kupe.

10) Neka je $a+b=S$ i $ab=P$. Izraziti u funkciji od S i P:
(1) $a^2+b^2$, (2) $(a-b)^2$, (3) $a^2-b^2$.

DRUGA GRUPA ZADATAKA:

11) Jedan šestocifreni broj počinje cifrom 5. Ako bi se ta cifra premestila sa početka na kraj, onda bi novodobijeni broj bio 4 puta manji od prvobitnog broja. Naći prvobitni broj.

12) Tamara 1989. godine navršava baš onoliko godina koliko iznosi zbir cifara njene godine rodjenja. Koje godine je rodjena Tamara ?

13) Koji prirodni brojevi x i y zadovoljavaju jednačinu
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1$ ?

14) a) Dokazati da za pravougli trougao važi nejednakost $P \leq \frac{c^2}{4}$, gdje je P površina, a c hipotenuza tog trougla.
b) Od svih pravouglih trouglova date hipotenuze c, naći onaj koji ima najveću površinu. Kolike su njegove katete ? Kolika je ta najveća površina ?

15) a) Pleme ljudoždera uhvati istraživača. Njihov poglavica mu reče: "Moraš dati jednu logičku izjavu. Ako ona bude istinita, ispeći ćemo te i pojesti, a ako bude lažna, skuvaćemo te i pojesti". Može li se istraživač spasiti i , ako može, kojom izjavom ?
b) U čudesnoj zemlji, pored ostalih stanovnika, žive Barabasi i Karabasi. Svaki Karabas poznaje 7 Karabasa i 9 Barabasa. Svaki Barabas poznaje 10 Karabasa i 7 Barabasa. Kojih žitelja ima u toj zemlji više: Karabasa ili Barabasa ?

**R j e š e n j a :**

**V razred:**

PRVA GRUPA ZADATAKA:

1) a) (1) 0, (2) 1, (3) 2, (4) 4;
b) $\{1,2,3,5,8\}$; 5 elemenata.

2) a) 15 točaka; b) 4950 točaka.

3) a) XII − IX = III, b) X − VII = III, c) VI + V = XI .

4) a) NE, b) DA, c) NE, d) DA, e) NE, f) DA .

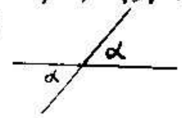
5) a) 0,6, b) 0,87 .

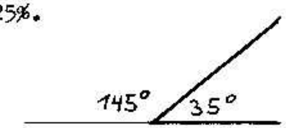


6) a) $x=10$, b) $y=3$, c) $z=3$.

7) $n=7$.

8) a) 64, b) 6,3, c) 20%, d) 25%.

9) a)


b)


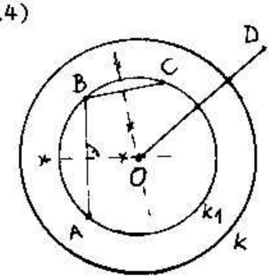

10) E.

DRUGA GRUPA ZADATAKA:

11) a) Treba pomnožiti 78346 i 341 i dobit će se 26715986 .
b) Treba zbrojiti 90909 i 10101 i dobit će se 101010, tj.
A = 1, E = 9 i H = 0.
( Obrazložite to).

12) a) $5\cdot6\cdot7\cdot8=1680 \Rightarrow$ traženi brojevi su 5,6,7 i 8 .
b) $528=2^4\cdot3\cdot11$, a 11 ne može biti znamenka. Odgovor: NE.

13) 32 kg .

14)


Prvo konstruiramo kružnicu $k_1$ koja prolazi trima točkama, na primjer A,B i C. Ako je točka D na $k_1$, zadatak je riješen. Ako točka D nije na kružnici $k_1$, tada je tražena kružnica k koncentrična sa $k_1$ (ima isto središte O kao $k_1$), a polumjer joj je jednak $\frac{1}{2}(r_1+|OD|)$, gdje je $r_1$ polumjer kružnice $k_1$.

15) Prvo ide 2, zatim 7, pa onda 5 i 6 (svejedno kojim redosljedom) i na kraju 1,3 i 4 (svejedno kojim redosljedom). (Napišite svih tih 8 mogućnosti).

**VI razred:**

PRVA GRUPA ZADATAKA:

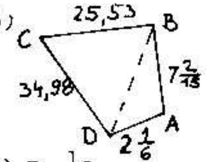
1) a) $-8,5<-8\frac{1}{4}<-1\frac{3}{4}<-1\frac{1}{3}<0<0,3<\frac{1}{3}<24\frac{1}{2}$.
b) 5,3 .

2) a) 3, b) 1 .

3) a) $x=-2,5$, b) $x\in\{-2,\ 8\}$.

4) 630 učenika .

5) Iz $a\leq h_a\leq b$ i $b\leq h_b\leq a \Rightarrow a=b=h_a=h_b \Rightarrow$ trokut je jednakokračan i pravokutan $\Rightarrow$ kutevi su $45^\circ, 45^\circ$ i $90^\circ$ .

6) 


Na osnovu odnosa stranica u trokutu izlazi:

$|2\frac{1}{6} - 7\frac{2}{15}| < |BD| < 25,53 + 34,98$, tj.

$9,45 < |BD| < 9,3$, što je očito nemoguće.

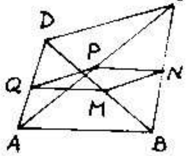
7) $P = \frac{1}{2}S$.

8) (1) $P_{\Pi} = 36\ mm^2$, $P_E = 40\ mm^2$, $P_T = 24\ mm^2$;

(2) $P = 100\ mm^2 = 1\ cm^2$.

(3) $\Pi$ – 36%, E – 40%, T – 24%.

9) (1) $3,5\ cm^2$, (2) d.

10) 


$\Delta ACD$: $|PQ| = \frac{1}{2}|CD|$, $\overline{PQ} \parallel \overline{CD}$

$\Delta BCD$: $|NM| = \frac{1}{2}|CD|$, $\overline{MN} \parallel \overline{CD}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ MNPQ je paralelogram.

$\Delta ABD$: $|QM| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|CD|$ (zbog $|AB| = |CD|$) $= |MN|$ $\Rightarrow$ MNPQ je romb.

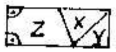
DRUGA GRUPA ZADATAKA:

11) a) Ako bi u svakom kavezu bilo paran broj zečeva, tada bi ukupno bilo paran broj zečeva, a 55 je neparan broj.

b) Pošto je 13 kaveza, a 55 zečeva, tada po Dirichletovom principu postoji bar jedan kavez u kome se nalazi više od 4 zeca (jer je $4 \cdot 13 < 55$).

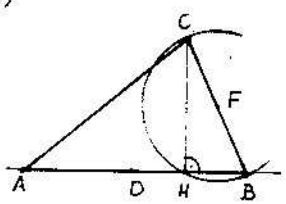
12) a) Vrijedi.

b) Primjenom (a) dolazimo do sume $\frac{99}{100} = 0,99$.

13) a) 


b) 


14) a) 20 trokuta, b) 27 paralelograma, c) 30 trapeza.

15) 


Prvo nacrtamo pravac DH. Zatim se opiše kružnica k(F,|FH|) i nadje sjecište B te kružnice sa pravcem DH. Točka A je točka pravca DH, takva da je D polovište dužine $\overline{AB}$. Analogno je F polovište dužine $\overline{BC}$. Obrazložite ispravnost konstrukcije.



**VII razred:**

PRVA GRUPA ZADATAKA:

1) a) (5), b) racionalni.

2) $x = 9/8$, $y = 3/2$.

3) Uvrštavanjem $a = c + 7$, vrijednost izraza je 63.

4) a) 234,4, b) 38, c) 100.

5) Produkt $P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 97$ svih prostih brojeva manjih od 100 očito je djeljiv sa $10 = 2 \cdot 5$, $899 = 29 \cdot 31$ i sa $3599 = 3600 - 1 = (60-1)(60+1) = 59 \cdot 61$.

6) Traženi brojevi su 147, 148, 149, ..., 159.

7) a) $5a$, b) $O = 4a\sqrt{17}$, $P = 5a^2$.

8) $S_1 = \pi \wedge S_2 = \sqrt{3} \Rightarrow S_1 > 1,5 \cdot S_2$.

9) Neka je n broj stranica prvog mnogokuta. Tada je 2n broj stranica drugog mnogokuta, pa iz odnosa unutarnjih kuteva tih mnogokuta slijedi: $\frac{(2n-2) \cdot 180}{2n} - \frac{(n-2) \cdot 180}{n} = 10$

slijedi $n = 18$.

a) Prvi mnogokut ima 18, a drugi 36 stranica.

b) Prvi mnogokut ima unutrašnji kut $160^\circ$, a drugi $170^\circ$.

10) a) $144\sqrt{3}\ cm^2$, b) 50%, c) 55%.

DRUGA GRUPA ZADATAKA:

11) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \wedge y = 1$,

pa je $P(-1,1) = 1989 \cdot (-1)^2 - 1989 \cdot 1^2 = 600$.

12) 43% (obrazložite to).

13) a) 35 faktora (obrazložite to).

b) $\left.\begin{array}{l} 7|x-7 \Rightarrow 7|x \\ 8|x-8 \Rightarrow 8|x \\ 9|x-9 \Rightarrow 9|x \end{array}\right\} \Rightarrow x = M(7,8,9) = 504$.

14) a) 21, b) 35, c) 35, d) 35.

15) a) $H = 2$, $E = 5$, $S = 6$, b) $A = 7$, $R = 6$, $F = 5$.

**VIII razred:**

PRVA GRUPA ZADATAKA:

1) (1) T, (2) T, (3) $\perp$, (3) $\perp$, (4) T, (5) T.

2) a) $x = 0$, b) $x \in R$.

3) a) DA, b) NE, c) beskonačno mnogo, d) samo jedno, e) $x = y = 0$.

4) (4).

5) 50 kg.

6) a) $\perp$, b) $\perp$, c) T, d) T, e) $\perp$.

7) $(2) < (1) < (3)$ (obrazložite to).

8) a) $V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}a^2 \cdot 3a = a^3$.

b) $d:h = 1:2 \Rightarrow h = 2d$

$d = a\sqrt{2} \Rightarrow a = d/\sqrt{2}$

$V = a^2h = (d/\sqrt{2})^2 \cdot 2d = d^3$.

9) a) $V = 2\pi$ cm$^3$, b) $O = 24\pi$ cm$^2$, $V = 12\pi$ cm$^3$.

10) (1) $a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab = S^2-2P$,

(2) $(a-b)^2 = (a+b)^2-4ab = S^2-4P$,

(3) $a^2-b^2 = (a+b)(a-b) = S \cdot \sqrt{S^2-4P}$.

**DRUGA GRUPA ZADATAKA:**

11) 512820.

12) Tamara je rodjena u 20. stoljeću (zašto ?). Neka je $\overline{19xy}$ godina njenog rodjenja. Tada iz $1989-(1900+10x+y) = 1+9+x+y$ slijedi $11x+2y = 79$. Uzevši u obzir da su $x,y \in \{0,1,2,\dots,9\}$, rješenje diofantske jednadžbe $11x+2y = 79$ je $x=7$ i $y=1$, pa je Tamara rodjena 1971 godine. Izvršite pokus.

13) $(x,y) \in \{(2,3),\ (3,2)\}$.

14) a) $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow \frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{4}c^2 \Leftrightarrow P \leq \frac{1}{4}c^2$.

b) Za $a = b = c\sqrt{2}/2$ površina je maksimalna i iznosi $\frac{1}{4}c^2$ (zašto ?).

15) a) Istraživač će se spasiti ako izjavi: "Vi ćete me skuhati", odnosno "Vi me nećete ispeći" (obrazložite to).

b) Neka je x Karabasa i y Barabasa. Svaki Karabas pozn naje 9 Barabasa, pa će ukupno biti 9x poznanstava. Svaki Barabas poznaje 10 Karabasa, pa će ukupno biti 10y poznanstava. Kako su ta poznanstva simetrična, vrijedi $9x = 10y$, tj. $y = \frac{9}{10}x$, što znači da je $x > y$. Dakle, više ima Karabasa.



# SAP VOJVODINA

## OPŠTINSKO TAKMIČENJE

**Zadaci:**

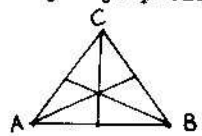
**IV razred:**

1) Od 160 učenika IV razreda, njih 96 učestvovalo je na takmičenju iz matematike, a na takmičenju iz malog fudbala 72 učenika. Koliko učenika je učestvovalo i u jednom i u drugom takmičenju, ako se zna da 19 učenika nije učestvovalo ni u jednom takmičenju ?

2) Pomešano je izvesna količina belog krompira po ceni od 1000 dinara i 100 kg rozog krompira po ceni od 600 dinara. Koliko je kg bilo belog krompira od 1000 dinara, ako 1 kg mešavine košta 750 dinara ?

3) Koliko ima petocifrenih brojeva kod kojih je proizvod cifara jednak 4 ?

4) Koliko različitih duži, a koliko različitih trouglova se može uočiti na datoj slici ?




5) Data su dva jednaka kvadrata, svaki ima površinu 100 cm$^2$. Ako stranicu jednog povećamo za 2 cm, a obim drugog uvećamo za 16 cm, koji kvadrat će posle ovih izmena imati veću površinu ?

**V razred:**

1) Odrediti najveći prirodan broj koji zadovoljava sledeći uslov: pri deljenju brojeva 1988 i 30756 tim brojem dobije se jednak ostatak – broj 4.

2) Vlada i Nina medjusobno podele 816 dinara. Kada Vlada potroši $\frac{3}{5}$ svog dela, a Nina $\frac{3}{7}$ svog dela, ostanu im jednake sume novca. Koliko novca je dobio svako od njih pri podeli ?

3) Kroz jednu cev bazen se napuni vodom za 8 sati, kroz drugu za 10 sati i kroz treću za 12 sati. Dokazati da ako sve tri cevi ubacuju istovremeno vodu u bazen, onda se za jedan sat napuni više od četvrtine, a manje od trećine bazena.

4) Razlika dva uporedna ugla je $\frac{4}{7}$ većeg ugla. Odrediti tražene uporedne uglove.
5) Date su tačke A i B i prava p, paralelna sa duži AB. Konstruisati krug koji prolazi kroz tačke A i B i dodiruje datu pravu p.

**VI razred:**

1) Putnički voz prelazi razdaljinu izmedju mesta A i B za 6 sati, a teretni za 10 sati. Ako vozovi krenu istovremeno jedan iz A, a drugi iz B jedan drugome u susret, posle kog vremena će se sresti ?
2) Tri druga treba da podele 7777 dinara. Koliko će svako od njih dobiti, ako dve petine Jovine sume iznosi kao Mikina suma, a sedam devetina Mikine sume jednako je Siminoj sumi?
3) Brojeve 1,2,3,4,5,6,7 i 8 rasporediti u temena kocke, tako da je zbir brojeva na svakoj strani kocke medjusobno jednak.
4) U trouglu ABC (BC > AC) uglovi $\alpha$ i $\beta$ razlikuju se za $30^o$. Ako je D točka na stranici BC, takva da je AC = CD, izračunati $\sphericalangle BAD$.
5) Dat je pravougaonik ABCD (AB > BC). Normala iz temena B na dijagonalu AC, seče dijagonalu AC u tački E, tako da je duž AE tri puta veća od duži CE. Odrediti pod kojim uglom se seku dijagonale pravougaonika.

**VII razred:**

1) Racionalan broj 0,12121212... napisati u obliku razlomka.
2) Dokazati da je zbir kvadrata bilo kojih 5 uzastopnih celih brojeva deljiv sa 5, a nije deljiv sa 25.
3) Odredi cele brojeve x i y koji zadovoljavaju sledeću jednačinu: $xy-2x = 5y-7$.
4) Dužina pravougaonika je a = 20 cm, a normalno rastojanje temena od dijagonala pravougaonika je 12 cm. Izračunati obim i površinu pravougaonika.
5) U pravouglom trouglu jedan oštri ugao je 3 puta veći od drugoga. Izračunati površinu tog trougla, ako je hipotenuza c = 8 cm.

**VIII razred:**

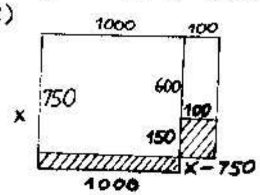
1) Za koje vrednosti realnih brojeva x,y i z je zadovoljena jednačina: $16x^2+9y^2+4z^2 = 8x+6y+4z-3$ ?



2) Marija čita knjigu koja ima 480 stranica i pročita je za odredjeni broj dana, pri čemu svakog dana čita jednak broj stranica. Da je Marija svakog dana čitala po 16 stranica više, knjigu bi pročitala 5 dana ranije. Za koliko dana je Marija pročitala knjigu ?
3) Ako su a,b,c realni brojevi, takvi da je a+b+c = 0 i abc = = 1988, onda je a(a+b)(a+c) = 1988. Dokazati.
4) U trouglu ABC stranice su a = 12 cm i b = 6 cm, a ugao zahvaćen datim stranicama je $120^o$. Ako simetrala datog ugla ACB seče stranicu AB u tački D, odrediti dužinu duži CD.
5) Data je kocka čija je ivica 13 cm. Podeliti datu kocku na 1988 manjih kocki čije su stranice celobrojne.

**R j e š e n j a :**

**IV razred:**

1) 160 - 19 = 141, (96+72)-141 = 27. Na oba natjecanja je sudjelovalo 27 učenika.
2) 


Neka je x broj kg bijelog krompira. Tada iz jednakosti površina pravokutnika slijedi:
$1000\cdot(x-750) = 100\cdot150$
$x-750 = 15$
$x = 765$ kg .

Isto dobivamo i rješavanjem jednadžbe
$1000x + 100\cdot600 = 1100\cdot750$.

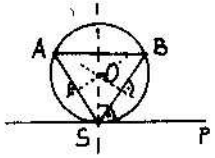
3) Ukupno ima 10 brojeva (1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211, 1114, 1141, 1411, 4111).
4) 18 dužina, 13 trokuta.
5) Stranica prvog kvadrata je veća za 2 cm, a drugog za 4 cm, pa je površina drugog kvadrata veća za $14^2-12^2 = 52$ $cm^2$ .

**V razred:**

1) Neka je x traženi broj. Tada su 1984 i 30752 djeljivi sa x. Kako je $1984 = 2^6\cdot31$ i $30752 = 2^5\cdot31^2$, tada je $x = 2^5\cdot31 = 992$.
2) Neka je x Vladina, a 816-x Ninina suma novca. Tada iz $\frac{2}{5}x = \frac{4}{7}(816-x)$ izlazi x = 480, 816-x = 336.
3) Za 1 sat prva cijev napuni $\frac{1}{8}$, druga $\frac{1}{10}$, a treća $\frac{1}{12}$ baze-

na, pa sve 3 cijevi za jedan sat napune $\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{37}{120}$ bazena. Kako je $\frac{1}{4}=\frac{30}{120}<\frac{37}{120}<\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$, tvrdnja zadatka je dokazana.

4) Neka je x veći od sukuta. Tada je $180^\circ-x$ manji sukut, pa iz $x-(180-x)=\frac{4}{7}x$ slijedi $x=126^\circ$, $180^\circ-x=54^\circ$.

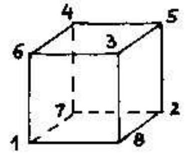
5) 

Prvo nadjemo simetralu dužine $\overline{AB}$, a zatim njeno sjecište S sa pravcem p. Tražena kružnica je kružnica opisana trokutu ABS. Dokaz slijedi iz činjenice da simetrala tetive $\overline{AB}$ kružnice prolazi središtem kružnice i okomita je na $\overline{AB}$, pa onda i na p.

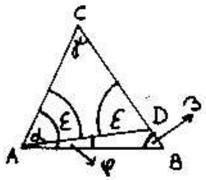
**VI razred:**

1) Za 1 sat prvi vlak prijedje $\frac{1}{6}$ puta, a drugi $\frac{1}{10}$ puta. Neka se oni sastanu nakon x sati. Tada iz $(\frac{1}{6}+\frac{1}{10})x=1$ slijedi $x=3{,}75$ h $=3$ h $45$ min.

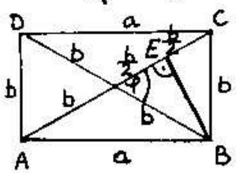
2) Neka su M,J,S redom Mikina, Jovina i Simina suma novca. Tada je $\frac{2}{5}J=M$, $\frac{7}{9}M=S$, tj. $J=\frac{5}{2}M$, $S=\frac{7}{9}M$, pa iz $M+J+S=7777$, tj. iz $M+\frac{5}{2}M+\frac{7}{9}M=7777$ slijedi $M=1818$ din, $J=4545$ din, $S=1414$ din.

3) 

Kocka ima 6 ploha, a svaki zadani broj pripada trima plohama. Kako je $1+2+3+4+5+6+7+8=36$, tada je suma brojeva na svakoj plohi $\frac{36\cdot 3}{6}=18$.

4) 

$|BC|>|AC| \Rightarrow \alpha>\beta \Rightarrow \alpha-\beta=30^\circ$,
$|AC|=|DC| \Rightarrow \sphericalangle DAC=\sphericalangle ADC=\varepsilon$,
$\sphericalangle BAD=\varphi$,
$\alpha=\varepsilon+\varphi \wedge \varepsilon=\varphi+\beta$ (vanjski kut trokuta ABD) $\Rightarrow \varphi=\frac{\alpha-\beta}{2}=15^\circ$.

5) 

$\varphi=60^\circ$.



**VII razred:**

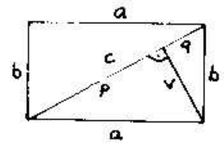
1) $0{,}12121212\ldots=x \mid \cdot 100 \Rightarrow 12{,}121212\ldots=100x \Rightarrow 12+0{,}121212\ldots=100x \Rightarrow 12+x=100x \Rightarrow x=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$.

2) Neka su $n-2,n-1,n,n+1,n+2$ pet uzastopnih cijelih brojeva. Tada je $S=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5(n^2+2)$, pa je očito S djeljivo sa 5. Da S nije djeljivo sa 25 proizlazi iz činjenice da $n^2+2$ nije djeljivo sa 5 ni za jedan cijeli broj n (provjerite to stavljajući $n=5k+r$ $(k\in Z)$, $r\in\{0,1,2,3,4\}$.

3) $xy-2x=5y-7 \Leftrightarrow x(y-2)-5(y-2)=3 \Leftrightarrow (x-5)(y-2)=3$.

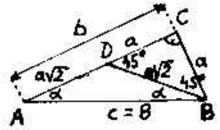
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x-5$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $3$ |
| $y-2$ | $-1$ | $-3$ | $3$ | $1$ |
| $x=(x-5)+5$ | $2$ | $4$ | $6$ | $9$ |
| $y=(y-2)+2$ | $1$ | $-1$ | $5$ | $3$ |

Rješenja zadatka su $(x,y)\in\{(2,1),(4,-1),(6,5),(9,3)\}$.

4) 

$a=20$ cm, $v=12$ cm,
$p=\sqrt{a^2-v^2}=16$ cm,
$v^2=pq \Rightarrow q=\frac{v^2}{p}=8$ cm,
$c=p+q=24$ cm,
$b=\sqrt{c^2-a^2}=4\sqrt{11}$ cm,
$O=2(a+b)=8(5+\sqrt{11})$ cm , $P=ab=80\sqrt{11}$ cm$^2$.

5) Neka je $\beta=3\alpha$. Tada iz $\alpha+\beta=90^\circ \Rightarrow \alpha=22{,}5^\circ$, $\beta=67{,}5^\circ$.



Sada (vidi sliku) lako zaključujemo da je $b=a(1+\sqrt{2})$, pa primjenom Pitagorinog teorema $a^2+b^2=c^2$, odmah slijedi da je $a^2=\frac{16\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

Za površinu trokuta konačno dobivamo: $P=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a^2(1+\sqrt{2})=\frac{1}{2}\cdot\frac{16\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\cdot(1+\sqrt{2})=16\sqrt{2}$ cm$^2$.

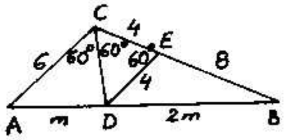
**VIII razred:**

1) $16x^2+9y^2+4z^2=8x+6y+4z-3 \Leftrightarrow (4x-1)^2+(3y-1)^2+(2z-1)^2=0 \Leftrightarrow 4x-1=0 \wedge 3y-1=0 \wedge 2z-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{2}$.

2) Neka Marija pročita knjigu za x dana, čitajući dnevno po y stranica. Tada iz uvjeta zadatka slijedi: $xy=480$, $(y+16)(x-5)=xy$, $x,y\in N$, odakle je $x=15$ dana ($y=32$ s/d).

3) $a+b+c=0 \wedge abc=1988 \Rightarrow a(a+b)(a+c)=a^3+a^2b+a^2c+abc=$
$=a^2(a+b+c)+abc=a^2.0+1988=1988$ .

4) Iz činjenice da simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru susjednih dviju stranica, slijedi da je $|AD|:|BD|=|AC|:|BC|=6:12=1:2$. Neka je $\overline{DE}\,||\,\overline{AC}$. Tada je $|CE|:|BE|=|AD|:|BD|=1:2$, tj. $|CE|=4$ cm . Nadalje je (zbog $\overline{DE}\,||\,\overline{AC}$) $\sphericalangle DEC=180^\circ-120^\circ=60^\circ$, pa je trokut CDE jednakostraničan, tj. $|CD|=4$ cm.




5) Volumen zadane kocke je $13^3=2197\ cm^3$.
Razrežimo tu kocku tako, da bude a kockica brida 1, b kockica brida 2, c kockica brida 3, d kockica brida 4 i e kockica brida 5 (ni jedna kockica ne može imati brid veći od 5, jer bi u protivnom imali manje od 1988 kockica). Tada iz $a+b+c+d+e=1988$ i $a\cdot1^3+b\cdot2^3+c\cdot3^3+d\cdot4^3+e\cdot5^3=2187$ slijedi $a=1988-b-c-d-e$ i $7b+26c+63d+124e=209$, a odatle $(a,b,c,d,e)\in\{(1969,15,4,0,0),\ (1977,6,4,1,0)\}$.
Dakle, zadanu kocku ćemo podeliti tako da dobijemo 1969 kockica brida 1, 15 kockica brida 2 i 4 kockice brida 3, odnosno tako da dobijemo 1977 kockica brida 1, 6 kockica brida 2, 4 kockice brida 3 i 1 kockicu brida 4.

## POKRAJINSKO TAKMIČENJE

**Z a d a c i :**

**VII razred:**

1) U polja kvadrata razmere $3\times3$ upisati različite prirodne brojeve, tako što bi 6 proizvoda (po vrstama i po kolonama) bili jednaki medju sobom.
   a) Pokazati da je to moguće.
   b) Koji je najmanji proizvod ?

2) Izračunati: $\dfrac{5\cdot4^{15}\cdot9^9-4\cdot3^{20}\cdot8^9}{5\cdot2^9\cdot6^{19}-7\cdot2^{29}\cdot27^6}$ .

3) Četverocifren broj, kome je cifra desetica nula, a cifra jedinica jednaka razlici cifre hiljada i cifre stotica, potpun je kvadrat nekog prirodnog broja. Odrediti taj četvorocifreni broj, kao i prirodan broj čiji je kvadrat četvorocifreni broj.



4) U datom pravouglom trouglu ABC upisana je kružnica. Tačka, kojom kružnica dodiruje hipotenuzu, deli hipotenuzu na dva otsečka m i n. Dokazati da je površina trougla ABC jednaka mn.

5) Dokazati da poluprečnici krugova, opisanih oko dva jednakostranična trougla, medjusobno podudarna, jednaki su.

**VIII razred:**

1) Vidi 1. zadatak za VII razred.

2) Biciklista je krenuo iz mesta A u mesto B da bi stigao u odredjeno vreme. Posle predjenih prvih 10 km, koje je prešao za 40 min, izračunao je da će ostatak puta preći za 24 min ranije nego što je odredjeno vreme. Ako bi svoju brzinu smanjio za 3 km na čas, tada bi on stigao u mesto B 10 min ranije nego što je odredjeno vreme. Koliko je rastojanje izmedju mesta A i B ?

3) U 3 suda nalivena je voda. Ako $\frac{1}{2}$ vode prvog suda prelijemo u drugi, zatim $\frac{1}{3}$ vode, koja se je sada našla u drugom sudu, prelijemo u treći, te na kraju $\frac{1}{4}$ ukupne količine vode trećeg suda prelijemo u prvi, tada će se u svakom sudu naći po 6 litara vode. Koliko vode je u početku bilo u svakome sudu ?

4) Dokazati da je u svakom četvorouglu, upisanom u krug, proizvod dijagonala jednak zbiru proizvoda naspramnih stranica (Teorema Ptolomeja).

5) Kocka ivice a presečena je jednom ravni, koja sadrži tri njena temena. Kolika je površina i zapremina kocke, ako je površina preseka jednaka 1 $m^2$ ?

**R j e š e n j a :**

**VII razred:**

a)

| | | |
|---|---|---|
| a | b | $\frac{cd}{e}$ |
| c | d | $\frac{ab}{e}$ |
| $\frac{bd}{e}$ | $\frac{ac}{e}$ | e |

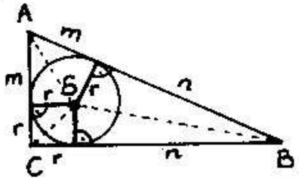
b)

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 20 |
| 4 | 5 | 6 |
| 15 | 8 | 1 |

2) 2.

3) Neka je $\overline{ab0(a-b)}$ traženi četveroznamenkasti broj. Tada iz $\overline{ab0(a-b)} = k^2$ $(k \in N)$ slijedi $1001a + 99b = k^2$, tj. $11 \cdot (91a + 9b) = k^2$. Zbog $91a + 9b = 11c^2$, $c \in N$, izlazi da je $a = 9$, $b = 8$, $c = 9$, pa je traženi broj $19801 = 99^2$.

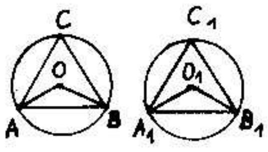
4)




Primjenom Pitagorinog teorema (vidi sliku i obrazloži je) izlazi $(m+r)^2 + (n+r)^2 = (m+n)^2$, tj. $mr + nr = mn$ $(*)$.

Sada imamo: $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2}(m+r)(n+r) = \frac{1}{2}(mn + mr + nr + r^2) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}(mn + mn) = mn$.

5)




Neka su dani sukladni jednakostranični trokuti $ABC$ i $A_1B_1C_1$ sa središtima $O$ i $O_1$ opisanim im kružnicama. Tada je $|AB| = |A_1B_1|$ i $\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle ACB = 120^\circ$ (odnos središnjeg i obodnog kuta) i analogno tome $\sphericalangle A_1O_1B_1 = 120^\circ$, pa su jednakokračni trokuti $ABO$ i $A_1B_1O_1$ sukladni. Odatle slijedi da je $|AO| = |A_1O_1|$, što se i tvrdilo.

**VIII razred:**

1) Vidi rješenje 1. zadatka za VII razred.

2) Neka je udaljenost izmedju mjesta A i B $x$ km, a predvidjeno vrijeme vožnje biciklom $y$ h. Prvih 10 km biciklist je prešao za za 40 min $= \frac{2}{3}$ h, pa mu je na tom dijelu brzina $10 : (\frac{2}{3}) = 15$ km/h. Ako bi preostalih $x-10$ km išao istom brzinom od 15 km/h, došao bi 24 min $= \frac{2}{5}$ h ranije nego što je predvidjeno, tj. prešao bi taj put za $y - \frac{2}{3} - \frac{2}{5}$ h, pa bi vrijedilo: $x - 10 = 15 \cdot (y - \frac{2}{3} - \frac{2}{5})$, tj. $x - 15y = -6$ $(*)$. Ako bi pak brzinu smanjio na 12 km/h, preostalih $x-10$ km bi prešao za 10 min $= \frac{1}{6}$ h ranije od predvidjenog vremena, tj. za $y - \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ h, pa bi vrijedilo: $x - 10 = 12 \cdot (y - \frac{2}{3} - \frac{1}{6})$, tj. $x - 12y = 0$ $(**)$. Sada iz $(*)$ i $(**)$ slijedi $x = 24$ km $(y = 2\text{h})$.

3) Neka je u prvom sudu bilo $x$ $\ell$, a u drugom $y$ $\ell$ vode. Tada

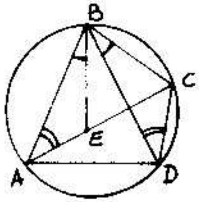


je u trećem sudu bilo $(18-x-y)$ $\ell$ vode. Ako se iz prvog suda prelije u drugi $\frac{1}{2}x$ litara vode, tada će u prvom sudu ostati $\frac{1}{2}x$ $\ell$, a u drugom će biti $(y + \frac{1}{2}x)$ $\ell$ vode. Ako sada iz drugog suda prelijemo u treći $\frac{1}{3}(y + \frac{1}{2}x)$ $\ell$ vode, u drugom sudu će ostati $\frac{2}{3}(y + \frac{1}{2}x)$ $\ell$ vode, a u trećem će biti $(18 - \frac{5}{6}x - \frac{2}{3}y)$ $\ell$ vode. Ako, konačno, iz trećeg suda prelijemo $\frac{1}{4}(18 - \frac{5}{6}x - \frac{2}{3}y)$ $\ell$ vode, u trećem će ostati $\frac{3}{4}(18 - \frac{5}{6}x - \frac{2}{3}y)$ $\ell$ vode, a u prvom sudu će biti $(\frac{7}{24}x - \frac{1}{6}y + \frac{9}{2})$ $\ell$ vode. Kako je na kraju u svakom sudu bilo po 6 $\ell$ vode, tada rješavanjem sustava jednadžbi

$$\frac{7}{24}x - \frac{1}{6}y + \frac{9}{2} = \frac{2}{3}(y + \frac{1}{2}x) = \frac{3}{4}(18 - \frac{5}{6}x - \frac{2}{3}y) = 6 \text{ slijedi}$$

$x = 8$, $y = 5$, $18 - x - y = 5$, tj. u prvoj posudi je bilo 8 $\ell$ vode, a u drugoj i trećoj po 5 $\ell$ vode.

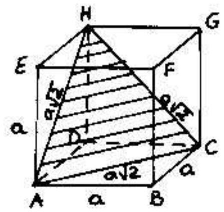
4)




Neka je $ABCD$ tetivni četverokut i točka $E$ točka dijagonale $\overline{AC}$ za koju je $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBD$. Tada je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$ (kutevi nad istim kružnim lukom $\widehat{CB}$), pa su trokuti $AEB$ i $DCB$ slični. Iz sličnosti tih trokuta slijedi da je $|AB| : |AE| = |BD| : |CD|$, tj. $|AB| \cdot |CD| = |AE| \cdot |BD|$ $(*)$

Lako se vidi da su i trokuti $BCE$ i $BDA$ slični, pa je $|BC| : |EC| = |BD| : |AD|$, tj. $|AB| \cdot |CD| = |EC| \cdot |BD|$ $(**)$. Zbrajanjem $(*)$ i $(**)$ slijedi $|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BD| = |AC| \cdot |BD|$, što se i tvrdilo.

5)




Iz $\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 1$ slijedi $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ m, pa je $O = 6a^2 = 8$ m$^2$, $V = a^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9}$ m$^3$.

# SFR JUGOSLAVIJA

**VII razred:**

1) Trećina robe prodana je po cijeni koja je za 10% viša od planirane, a polovina iste robe prodana je za 15% jeftinije od planirane cijene. Sa koliko postotaka iznad planirane cijene je prodan ostatak robe, kada je na kraju naplaćen iznos koji bi se dobio da je ukupna količina robe prodana po planiranoj cijeni ?
2) Odredi sve troznamenkaste brojeve čije su sve znamenke različite, sa svojstvom da je troznamenkasti broj djeljiv sa 7 i da je zbroj njegovih znamenaka takodjer djeljiv sa 7.
3) U trokutu ABC stranica $\overline{AB}$ je najdulja. Na stranici $\overline{AB}$ odabrane su točke D i E, tako da je $|AD|=|AC|$ i $|BE|=|BC|$. Odredi kut $\sphericalangle ACB$ ako je $\sphericalangle ECD=20^{\circ}$.
4) Dana je kružnica k i točka P u istoj ravnini. Konstruirati pravac p koji siječe kružnicu u točkama A i B, tako da zbroj $|PA|+|PB|$ bude najveći. Obrazložiti konstrukciju za svaka od 3 slučaja: P je unutar kružnice, P je na kružnici, P je izvan kružnice.
5) U unutrašnjosti danog trokuta ABC izabrana je bilo koja točka M. Dokažati:
   a) $\sphericalangle AMB > \sphericalangle ACB$ ,
   b) $|AM|+|MB|<|AC|+|CB|$.

**VIII razred:**

1) Četiri učenika, Amir, Boris, Cvjetko i Darko sakupljali su stari papir. Zajedno su sakupili 288 kg papira. Koliko je kg papira sakupio svaki od njih, ako se zna da je Amir sakupio 36 kg više nego Boris, odnosno $\frac{3}{4}$ količine koju su sakupili Boris i Cvjetko zajedno, a Darko je sakupio dva puta više od Cvjetka ?
2) Da li je moguće da suma $1+2+3+...+p$, za bilo koji prirodni broj p, završava znamenkama 1989 ? Obrazložiti zaključak.
3) Zbroj znamenki broja X je Y, a zbroj znamenaka broja Y je Z. Ako je $X+Y+Z=60$, odredi broj X.

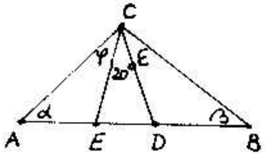


4) Dan je kvadrat i devet različitih pravaca u njegovoj ravnini. Svaki od tih pravaca dijeli dani kvadrat na dva trapeza čije se površine odnose kao 2:3. Dokaži da medju danim pravcima postoje tri koji imaju jednu zajedničku točku.
5) U ravnini danog trokuta ABC dan je pravac p koji ne presijeca dani trokut. Ako su $A_1, B_1, C_1, T_1$ redom nožišta okomica iz A, B, C, T (T je težište trokuta) na dani pravac, dokazati da je $|AA_1|+|BB_1|+|CC_1|=3|TT_1|$.

**R j e š e n j a :**

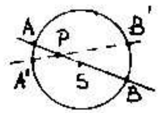
**VII razred:**

1) Neka je x postotak po kome se $\frac{1}{6}$ preostale robe prodavala iznad planirane cijene. Tada iz $\frac{1}{3}\cdot 1{,}1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}85+\frac{1}{6}x=1$ slijedi $x=1{,}25$, pa je roba prodavana 25% iznad planirane cijene.
2) Neka je $\overline{abc}=100a+10b+c$ traženi broj. Tada prema uvjetima zadatka mora biti: $100a+10b+c=7n$ $(n\in N)$ i $a+b+c=7m$ $(m\in N)$. Oduzimanjem tih jednakosti dobivamo $9(11a+b)=7(n-m)$. Zbog $M(9,7)=1$ slijedi da $7/11a+b$. Analizom svih mogućnosti, dolazimo do rješenja zadatka $\overline{abc}\in\{329, 392, 518, 581\}$.
3)



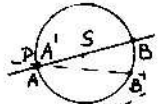

Iz jednakokračnosti trokuta EBC i CAD slijedi da je $\sphericalangle BEC=\varepsilon+20^{\circ}$ i $\sphericalangle ADC=\varphi+20^{\circ}$, pa je ( u $\triangle EDC$) $20^{\circ}+(\varepsilon+20^{\circ})+(\varphi+20^{\circ})=180^{\circ}$, tj. $\varepsilon+\varphi+20^{\circ}=140^{\circ}$, odnosno (u $\triangle ABC$) $\gamma=140^{\circ}$.

4) a)



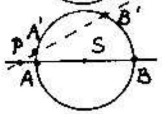
Traženi pravac prolazi točkom P i središtem S kružnice, jer je promjer najdulja tetiva kružnice.

b)

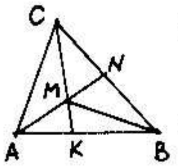


Traženi pravac prolazi točkom P i središtem S kružnice (razlog isti kao u prethodnom slučaju)

c)



Traženi pravac ponovo prolazi točkom P i središtem S kružnice (obrazložite tvrdnju).

5) 

a) Iz $\sphericalangle AMK > \sphericalangle ACK$ (vanjski kut trokuta ACM) i iz $\sphericalangle KMB > \sphericalangle KCB$ (vanjski kut trokuta MCB) slijedi (zbrajanjem) $\sphericalangle AMB > \sphericalangle ACB$.

b) $\left.\begin{array}{l} \Delta ANC: \ |AN| < |AC| + |CN| \\ \Delta BNM: \ |MB| < |MN| + |NB| \end{array}\right| + \Rightarrow$

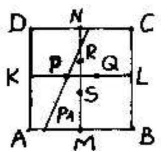
$\Rightarrow |AN| + |MB| < |AC| + |CN| + |MN| + |NB| \Rightarrow (AM + MN) + |MB| <$
$< |AC| + (|CN| + |NB|) + |MN| \Rightarrow |AM| + |MB| < |AC| + |CB|$.

**VIII razred:**

1) Neka su Amir, Boris i Cvjetko sakupili redom x,y,z kg papira. Tada je Darko sakupio 288-x-y-z kg papira. Iz uvjeta: $x = y+36 = \frac{3}{4}(y+z)$ i $288-x-y-z = 2z$ izlazi: $x = 72$, $y = 36$, $z = 60$, pa je Amir sakupio 72 kg, Boris 36 kg, Cvjetko 60 kg i Darko 120 kg papira.

2) Neka se suma $1+2+\ldots+p = \frac{p(p+1)}{2}$ završava sa 1989, tj. neka je $\frac{p(p+1)}{2} = 10000m + 1989$ $(m \in N)$. Tada je (množenjem posljednje jednakosti sa 8) $(2p+1) = 80000m + 15913$. Kako desna strana ima znamenku jedinica 3, a kvadrat ni jednog prirodnog broja to nema, zadatak nema rješenja.

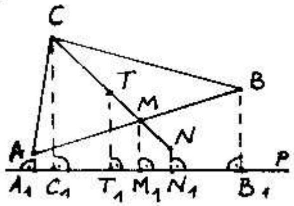
3) Očigledno X može biti najviše dvoznamenkasti broj, jer u suprotnom bi bilo $X+Y+Z > 60$. Dalje, X nije jednoznamenkasti broj, jer u suprotnom bi bilo $X+Y+Z = 3X < 60$. Dakle, neka je $X = 10a+b$, $a,b \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. Tada je $Y = a+b$, a za Z vrijedi: $Z = Y = a+b$ ako je $a+b = 9$; $Z = a+b-9$ ako je $a+b > 9$. Neka je $Z = a+b$. Tada je $X+Y+Z = 10a+b+a+b+a+b = 60$, tj. $4a+b = 20$. Rješenja ove diofantske jednadžbe u skupu dopustivih vrijednosti za a i b su: $a_1 = b_1 = 4$, $a_2 = 5, b_2 = 0$, $a_3 = 3, b_3 = 8$. Zbog $3+8 > 9$, broj 38 nije rješenje, pa je traženi broj X 44 ili 50. Neka je $Z = a+b-9$. Tada je $X+Y+Z =$ $= 10a+b+a+b+a+b-9 = 60$, tj. $4a+b = 23$. Rješenje ove diofantske jednadžbe u skupu dopustivih vrijednosti za a i b su: $a_1 = 4, b_1 = 7$, $a_2 = 5, b_2 = 3$. Zbog $5+3 < 9$ broj 53 nije rješenje, pa je traženi broj $X = 47$. Dakle, traženi brojevi su 44, 50 i 47.

4) 

Neka je ABCD dani kvadrat i $p_1$ jedan od 9 danih pravaca. Kako je površina trapeza mh, gdje je m srednjica, to će površine $P_1$ i $P_2$ trapeza, odredjenih pravcem



$p_1$, dati jednakost $P_1 : P_2 = 2:3$, odnosno $m_1h : m_2h = 2:3$, odakle je $m_1 : m_2 = 2:3$ ili $|KP| : |PL| = 2:3$. Zaključujemo da traženi pravci moraju proći kroz točku P za koju je $|KP| : |PL| = 2:3$ (K i L su središta stranica kvadrata) ili pak kroz jednu od točaka Q, R ili S (za koje isto vrijedi $m_1 : m_2 = 2:3$). Medjutim, ako 9 pravaca prolazi kroz 4 točke, tada najmanje 3 moraju proći kroz jednu od tih točaka (Dirichletov princip).

5) 

Neka je N točka pravca CM, takva da je M središte dužine TN. Koristeći činjenice da težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1, računajući od vrha trokuta, te da je zbroj osnovica trapeza jednak dvostrukoj srednjici trapeza, imamo:

$\left.\begin{array}{ll} \triangle CC_1N_1N: & |CC_1| + |NN_1| = 2 \cdot |TT_1| \\ \triangle TT_1N_1N: & 2 \cdot |MM_1| = |TT_1| + |NN_1| \\ \triangle AA_1B_1B: & |AA_1| + |BB_1| = 2 \cdot |MM_1| \end{array}\right| + \Rightarrow$

$\Rightarrow |AA_1| + |BB_1| + |CC_1| = 3 \cdot |TT_1|$ .

# S A D R Ž A J


| | Zadaci | Rješenja |
|---|---|---|
| **SR BOSNA I HERCEGOVINA** | | |
| Opštinsko takmičenje | 5 | 6 |
| Regionalno takmičenje | 9 | 10 |
| Republičko takmičenje | 11 | 12 |
| **SR CRNA GORA** | | |
| Opštinsko takmičenje | 14 | 15 |
| Republičko takmičenje | 16 | 17 |
| **SR HRVATSKA** | | |
| Općinsko natjecanje | 20 | 21 |
| Republičko natjecanje | 24 | 25 |
| **SR MAKEDONIJA** | | |
| Opštinsko takmičenje | 27 | 28 |
| Republički natprevar | 30 | 31 |
| **SR SLOVENIJA** | | |
| Občinsko tekmovanje | 34 | 35 |
| Republičko tekmovanje | 38 | 39 |
| **SR SRBIJA** | | |
| Opštinsko takmičenje | 41 | 43 |
| Medjuopštinsko takmičenje | 46 | 48 |
| Republičko takmičenje | 51 | 52 |
| XV "Arhimedesov" turnir | 55 | 62 |
| **SAP VOJVODINA** | | |
| Opštinsko takmičenje | 67 | 69 |
| Pokrajinsko takmičenje | 72 | 73 |
| **SFR JUGOSLAVIJA** | | |
| Savezno natjecanje | 76 | 77 |