Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** i **prof. Milanu Šariću** na dozvoli da knjižicu
"Metoda pomoćnih likova u planimetrijskim zadaćama (odabrani zadaci)"
skeniram i objavim na svojim web stranicama.

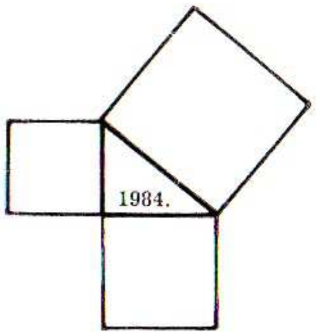
Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate
http://public.carnet.hr/mat-natj

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »PITAGORA«
BELI MANASTIR

PITAGORINI MATERIJALI ZA MLAĐE
MATEMATIČARE
26

LUKA ČELIKOVIĆ — MILAN ŠARIĆ

METODA POMOĆNIH LIKOVA U PLANIMETRIJSKIM ZADAĆAMA (ODABRANI ZADACI)



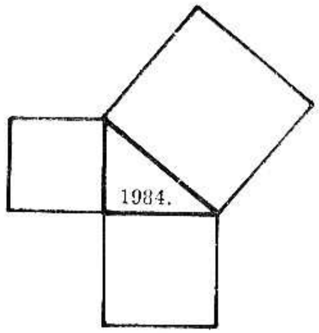
Beli Manastir, 1990.

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »PITAGORA«
BELI MANASTIR

PITAGORINI MATERIJALI ZA MLADE
MATEMATIČARE
26

LUKA ČELIKOVIĆ — MILAN ŠARIĆ

METODA POMOĆNIH LIKOVA U PLANIMETRIJSKIM ZADAĆAMA (ODABRANI ZADACI)



Beli Manastir, 1990.

LUKA ČELIKOVIĆ — MILAN ŠARIĆ — METODA POMOĆNIH LIKOVA U PLANIMETRIJSKIM ZADAĆAMA (ODABRANI ZADACI)

Izdavač:

Društvo mladih matematičara »PITAGORA« Beli Manastir

Školska 3, 54300 Beli Manastir

Recenzent:

Ivan Stanić, prof.

Urednici:

Luka Čeliković

Milan Šarić

Tehnički urednik:

Branko Vujaklija

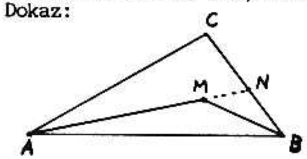
Tisak:

Grafičko poduzeće »Slovo« Beli Manastir

DOPUNA SLIKE U PLANIMETRIJSKIM ZADACIMA

Zadatak 1 (Općinsko natjecanje SR Srbije - I r. SŠ - 1981. g.): Ako je točka M u trokutu ABC, dokazati da je $|AM|+|MB| < |AC|+|CB|$.

Dokaz:



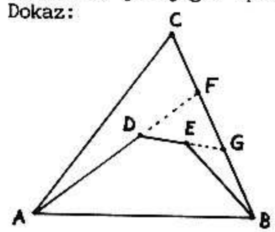
Nadopunom slike imamo:

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ANC:\ |AN| < |AC|+|CN| \\ \triangle BNM:\ |MB| < |MN|+|NB|\end{array}\right| + \Rightarrow$$

$\Rightarrow |AN|+|MB| < |AC|+|CN|+|MN|+|NB| \Rightarrow$
$\Rightarrow (|AM|+|MN|)+|MB| < |AC|+(|CN|+|NB|)+$
$+|MN| \Rightarrow |AM|+|MB| < |AC|+|CB|$.

Zadatak 2 (Općinsko natjecanje SR Hrvatske - I r. SŠ - 1981. g.): Neka su D i E točke unutar trokuta ABC, takve da je ABED konveksan četverokut. Dokaži da je njegov opseg manji od opsega trokuta ABC.

Dokaz:



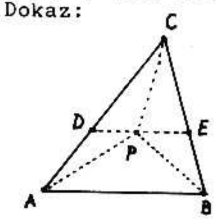
Nadopunom slike imamo:

$$\left.\begin{array}{l}\triangle AFC:\ |AF| < |AC|+|CF| \\ \triangle DGF:\ |DG| < |DF|+|FG| \\ \triangle EBG:\ |EB| < |EG|+|GB|\end{array}\right| + \Rightarrow$$

$\Rightarrow |AF|+|DG|+|EB| < |AC|+|CF|+|DF|+|FG|+$
$+|EG|+|GB| \Rightarrow (|AD|+|DF|)+(|DE|+|EG|) +$
$+|EB| < |AC|+(|CF|+|FG|+|GB|)+$
$+|DF|+|EG| \Rightarrow |AD|+|DE|+|EB| <$
$< |AC|+|CB|$ $\Rightarrow$ tvrdnja zadatka.

Zadatak 3: Neka je P unutrašnja točka trokuta ABC. Dokazati da je $|PA|+|PB|+|PC|$ manje od sume dvije dulje stranice trokuta.

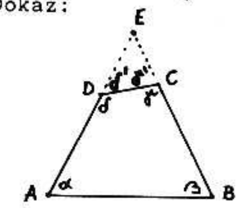
Dokaz:



Neka je $|AB| < |BC| < |CA|$. Treba dokazati da je $|AP|+|BP|+|CP| <$ $< |BC|+|CA|$.
Povucimo točkom P pravac DE, $D \in AC$, $E \in BC$, $DE \parallel AB$. Tada je $|CD| > |CE|$ i $|CD| > |CP|$, pa zbrajanjem nejednakosti :
$|AP| < |AD|+|DP|$, $|BP| < |BE|+|EP|$, $|CP| < |CD|$ i $|DE| < |CE|$ izlazi
$|AP|+|BP|+|CP|+|DE| < |AD|+|DP|+|BE|+|EP|+|CD|+|CE|$, odnosno
(zbog $|AD|+|CD|=|AC|$, $|DP|+|EP|=|DE|$ i $|BE|+|CE|=|BC|$)
$|AP|+|BP|+|CP| < |BC|+|CA|$.

Zadatak 4 (Republičko natjecanje SR Hrvatske - VII r. OŠ - 1990. g.): Neka su $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kutevi četverokuta ABCD i pritom $\alpha=\beta$, $\delta>\gamma$. Dokazati da je $|BC| > |AD|$.

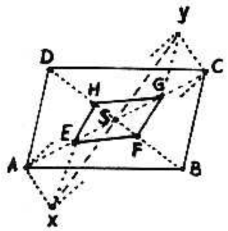
Dokaz:



Neka je $E=AD \cap BC$. Zbog $\alpha=\beta$, trokut ABE je jednakokračan, tj. $|BE|=|AE|$. Zbog $\delta>\gamma$ je $\delta' < \gamma'$, pa je $|CE| < |DE|$, a odatle izlazi da je $|BC|=|BE|-|CE| > |AE|-|DE| =$ $=|AD|$, tj. $|BC| > |AD|$.

Zadatak 5 (Republičko natjecanje SR Bosne i Hercegovine - II r. SŠ - 1986. g.): U ravnini je dan paralelogram ABCD. Neka točke E, F, G, H leže na dijagonalama paralelograma ABCD i neka je EFGH paralelogram. Za proizvoljnu točku X dokazati da je: $|XA|+|XB|+|XC|+|XD| \geq |XE|+|XF|+|XG|+|XH|$.

Dokaz:



Neka su ispunjeni uvjeti zadatka i neka su $E, G \in AC$, $F, H \in BD$. Tada je S zajedničko sjecište dijagonala oba paralelograma. Neka je nadalje Y centralno simetrična točka točki X u odnosu na centar S. Tada su AXCY i EXGY paralelogrami, pa imamo (prema Z 1):

$|XA|+|XC|=|YC|+|CX| \geq |YG|+|GX| = |XE|+|XG|$, tj.

$|XA|+|XC| \geq |XE|+|XG|$ (1).

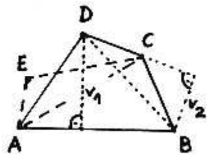
Analogno izlazi

$|XB|+|XD| \geq |XF|+|XH|$ (2).

Zbrajanjem (1) i (2) dobivamo tvrdnju zadatka.

Zadatak 6 (Republičko natjecanje SR Crne Gore - II r. SŠ - 1985. g.): Neka je ABCD konveksan četverokut. Dokazati da je $P(ABCD) \leq (|AB|.|CD|+|BC|.|AD|)/2$, gdje je $P(ABCD)$ površina četverokuta ABCD.

Dokaz:

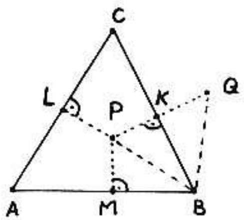


$P(ABCD)=P(ABD)+P(CDB)=$
$=|AB|.v_1/2 + |CD|.v_2/2 \leq$
$\leq |AB|.|AD|/2 + |CD|.|BC|/2 =$
$= (|AB|.|AD|+|BC|.|CD|)/2$, tj.
$P(ABCD) \leq (|AB|.|AD|+|BC|.|CD|)/2$ (1).

Neka je sada E takva točka da je $|AE|=|CD|$, $|CE|=|AD|$ i da su E i D sa iste strane dijagonale AC. Tada su trokuti ACD i ACE sukladni, pa je i $P(ACD)=P(ACE)$, odakle izlazi da je $P(ABCD)=P(ABC)+P(ACD)=P(ABC)+P(ACE)=P(ABCE)$. Primjenom (1) na to dobivamo $P(ABCD) = P(ABCE) \leq (|AB|.|AE|+|BC|.|CE|)/2 = (|AB|.|CD|+|BC|.|AD|)/2$, tj. $P(ABCD) \leq (|AB|.|CD|+|BC|.|AD|)/2$.

Zadatak 7 (Republičko natjecanje SR Srbije - I r. SŠ-1978.g.): Neka je P točka u šiljastokutnom trokutu ABC. Ako je d najmanja, a D najveća udaljenost točke P do točke na opsegu trokuta, dokazati da je $2d \leq D$. Kada vrijedi jednakost ?

Dokaz:

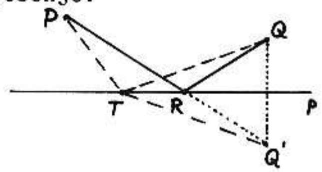


Neka su K, L, M nožišta okomica spuštenih iz P na BC, CA, AB. Tada je $d=\min\{|PA|,|PB|,|PC|\}$, $D=\max\{|PA|,|PB|,|PC|\}$. Od 6 kuteva sa vrhom P, bar jedan nije manji od 60°. Neka je na primjer $\angle BPK \geq 60^\circ$ i neka je Q točka simetrična točki P u odnosu na os simetrije BC. Tada je $|BQ|=|BP|$ i $\angle BQP=\angle BPQ \geq 60^\circ$, pa je $\angle PBQ \leq 60^\circ$, zbog čega je $|PQ| \leq |BP|$, tj. $2d \leq |PB|$.

Pošto je $|PB| \leq D$, tada je $2d \leq D$. Jednakost vrijedi kada je trokut ABC jednakostraničan i kada je P njegovo težište.

Zadatak 8 (Heronov teorem, Republičko natjecanje SR Makedonije -V r. OŠ-1989.g., Republičko natjecanje SR Hrvatske-VII r. OŠ -1990.g.): Dane su točke P i Q sa iste strane danog pravca p. Na pravcu p naći točku R tako da $|PR|+|RQ|$ bude minimalno.

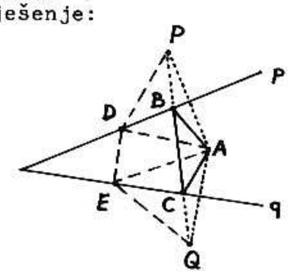
Rješenje:



Neka su Q' i Q osno simetrične točke u odnosu na pravac p i $R=p \cap PQ'$. Tada je $|PR|+|RQ|=|PQ'|$, pa je R tražena točka. Zaista, ako je $T \in p$, $T \neq R$, bilo koja druga točka pravca p, tada je $|PT|+|TQ|=|PT|+|TQ'| > |PQ'| = |PR|+|RQ|$.

Zadatak 9: Unutar šiljastog kuta dana je točka A. Na krakovima kuta odrediti točke B i C tako da opseg trokuta ABC bude minimalan.

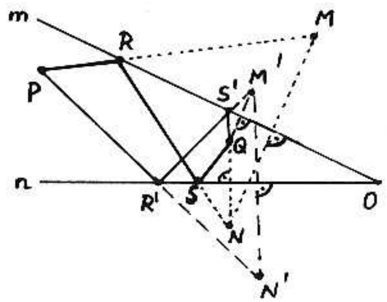
Rješenje:



Neka su P, Q simetrične točke točki A u odnosu na krake p, q kuta i neka su B, C sjecišta pravca PQ sa kracima p, q. Tada je trokut ABC traženi trokut. Naime, iz $|AB| = |PB|$ i $|AC|=|QC|$ slijedi $|AB|+|BC|+|CA|=|PB|+|BC|+|CQ|=|PQ|$. Neka su sada D, E proizvoljne točke na kracima p, q. Tada iz $|AD| = |PD|$ i $|AE|=|QE|$ slijedi $|AD|+|DE|+|EA|=|PD|+|DE|+|EQ| > |PQ| = |AB|+|BC|+|CA|$. Dakle, trokut ABC ima najmanji opseg.

Zadatak 10: U unutrašnjosti kuta dane su točke P i Q. Zraka svjetlosti polazi iz točke P, reflektira se prvo od jednog, a zatim od drugog kraka kuta i prolazi točkom Q. Koji je najkraći put zrake ?

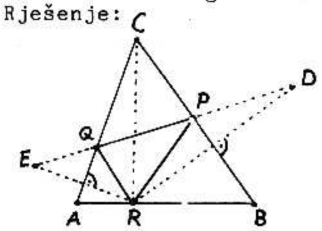
Rješenje:



Neka su N i Q osnosimetrične točke u odnosu na krak kuta n, M i N osnosimetrične točke u odnosu na krak kuta m, $R=m \cap PM$ i $S=n \cap RN$. Tada je $|PR|+|RS|+|SQ|=|PR|+|RS|+|SN|=|PR|+|RN|=|PR|+|RM|=|PM|$ najkraći put zrake svjetlosti koja se prvo reflektira na kraku m, a zatim na kraku n (dokažite to !). Analogno je $|PR'|+|R'S'|+|S'Q|=|PM'|$ najkraći put zrake svjetlosti koja se prvo reflektira na kraku n, a zatim na kraku m. Od ova dva puta manji će biti onaj kod koga su točke R i O sa iste strane pravca PQ (dokažite to !).

Zadatak 11 (Schwarzov problem za trokut): U zadani šiljastokutan trokut upisati trokut najmanjeg opsega, tako da na svakoj stranici zadanog trokuta leži po jedan vrh upisanog trokuta.

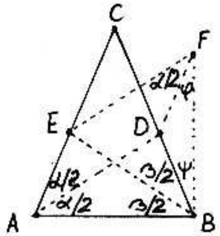
Rješenje:



Neka je ABC zadani trokut i $R \in AB$ jedan vrh upisanog trokuta. Neka su nadalje D i E točke simetrične točki R u odnosu na stranice BC i CA, te $P=BC \cap ED$ i $Q=AC \cap ED$. Tada za fiksiranu točku R upisani trokut PQR ima najmanji opseg jednak $|ED|$. Trokut EDC je jednakokračan (zbog $|EC|=|RC|=|DC|$) i $\sphericalangle DCE=2\cdot\sphericalangle BCA$, pa je $|ED|$ minimalno kada je $|EC|=|DC|$ minimalno, tj. kada je $|RC|$ minimalno, a to je ispunjeno kada je $CR \perp AB$. Analogno se pokazuje da su P i Q nožišta visina na stranice BC i CA trokuta ABC, pa je visinski trokut PQR traženo rješenje.

Zadatak 12: Trokut je jednakokračan ako su mu jednake simetrale dva unutrašnja kuta.

Dokaz:

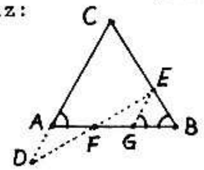


Po pretpostavci je $|AD|=|BE|$ (1). Treba dokazati da je $\alpha=\beta$. Pretpostavimo (suprotno tome) da je na primjer $\alpha>\beta$ (2). Neka je F takva točka da je ADFE paralelogram. Tada je $\sphericalangle DFE=\sphericalangle DAE=\alpha/2$ i $|EF|=|AD|=|BE|$ (prema (1)), tj. trokut BFE je jednakokračan, pa je $\sphericalangle BFE=\sphericalangle EBF$, tj. $\alpha/2+\varphi=\beta/2+\psi$ (3). Iz (2) i (3) slijedi $\varphi<\psi$, a odatle $|BD|<|FD|=|AE|$, tj. $|BD|<|AE|$ (4).

Kako trokuti ABE i BAD imaju po 2 stranice jednake, tada je prema (4) $\alpha/2<\beta/2$, tj. $\alpha<\beta$, što je kontradukcija sa (2).

Zadatak 13 (Republičko natjecanje SR Slovenije - I r. SŠ - 1966. g., Općinsko natjecanje SR Srbije - VI r. OŠ-1989.g.): Dan je jednakokračan trokut ABC sa osnovicom AB. Na produžetku stranice CA, iza vrha A izabrana je proizvoljna točka D, a na produžetku BC točka E, tako da je $|AD|=|BE|$. Dokazati da osnovica AB raspolavlja dužinu DE.

Dokaz:

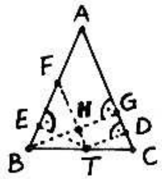


Neka je $F=AB \cap DE$ i $G \in AB$, $EG \parallel AD$. Tada je trokut GBE jednakokračan ($\sphericalangle BGE=\sphericalangle GBE$), pa je $|GE|=|BE|=|AD|$. Iz sukladnosti trokuta ADF i GEF slijedi da je $|DF|=|EF|$.

Zadatak 14: Zbroj normala, spuštenih iz bilo koje točke jednakokračnog trokuta na krake je stalan.

Dokaz:

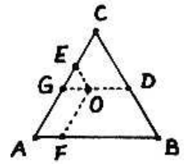
Neka je $|AB|=|AC|$, $T \in BC$ i neka su TD i TE normale iz T na AC i AB. Neka je nadalje $FT \parallel AC$ ($F \in AB$), $BG \perp AC$ ($G \in AC$) i H =



$=BG \cap FT$. Tada su trokuti BTE i BTH sukladni, pa je $|TE|=|BH|$. Nadalje je $|TD|=|HG|$ (jer je četverokut TDGH pravokutnik), pa je $|TE|+|TD|=|BH|+|HG|=|BG|$.

Zadatak 15: Dan je jednakostraničan trokut ABC i točka O unutar njega. Paralele iz točke O redom sa stranicama AB, BC, CA sijeku redom stranice u točkama D, E, F. Dokazati da je $|OD|+|OE|+|OF|$ jednako duljini stranice trokuta.

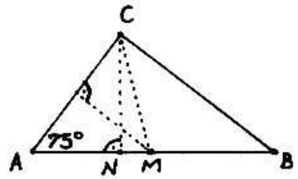
Dokaz:



Neka je G presjek pravca OD sa stranicom AC. Tada su trokuti GOE i GDC jednakostranični, a četverokut AFOG je paralelogram, pa vrijedi: $|OD|+|OE|+|OF| = |OD|+|OG|+|GA| = |GD|+|AG| = |GC|+|AG| = |AC|$.

Zadatak 16: Naći kut $\sphericalangle ABC$ trokuta ABC, ako je duljina visine CN ($N \in AB$) jednaka polovini duljine stranice AB i ako je kut $\sphericalangle BAC=75^\circ$.

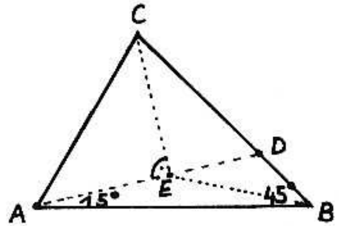
Rješenje:



Neka je M sjecište simetrale stranice AC i stranice AB. Tada (iz jednakokračnosti trokuta CAM) izlazi: $\sphericalangle MAC=75^\circ$, $\sphericalangle AMC=30^\circ$, $\sphericalangle MCN=60^\circ$, pa je (u trokutu MCN) $|CN|=|MC|/2$. Kako je po pretpostavci $|CN|=|AB|/2$, tada je $|AB|=|MC|=|AM|$, tj. $B \equiv M$, pa je traženi kut $\sphericalangle AMC=30^\circ$.

Zadatak 17: Na stranici BC trokuta ABC dana je točka D, takva da je $\sphericalangle BAD=15^\circ$ i $|BD|=|CD|/2$. Naći kuteve trokuta ako je $\sphericalangle ABC=45^\circ$.

Rješenje:

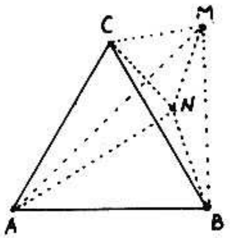


Neka je E točka na dužini AD, takva da je $CE \perp AD$. Tada je: $\sphericalangle ADC=15^\circ+45^\circ=60^\circ$, $\sphericalangle DCE=90^\circ-\sphericalangle EDC=90^\circ-60^\circ=30^\circ$, $|ED|=|DC|/2=|DB|$, $\sphericalangle EDB=180^\circ-\sphericalangle EDC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$, $\sphericalangle BED=\sphericalangle EBD=(180^\circ-120^\circ)/2=30^\circ$, $\sphericalangle ABE=15^\circ$, pa iz jednakokračnosti trokuta ABE i BCE ($|AE|=|BE|$ i $|BE|=|CE|$) slijedi jednakokračnost trokuta CAE ($|CE|=|AE|$), zbog čega je $\sphericalangle CAE=45^\circ$.

Dakle, $\sphericalangle BAE=15^\circ+45^\circ=60^\circ$, $\sphericalangle ABE=45^\circ$, $\sphericalangle BCA=30^\circ+45^\circ=75^\circ$.

Zadatak 18: U ravnini jednakostraničnog trokuta ABC dana je točka M, takva da je $\sphericalangle BCM=75^\circ$ i $\sphericalangle BAM=45^\circ$. Dokazati da je $MB \perp AB$.

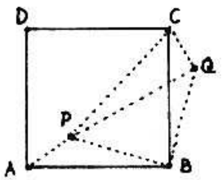
Dokaz:



Neka je N točka u unutrašnjosti trokuta BMC, takva da je trokut MCN jednakostraničan. Tada je $\sphericalangle ACN=\sphericalangle ACB+\sphericalangle BCM-\sphericalangle NCM=60^\circ+75^\circ-60^\circ=75^\circ=\sphericalangle BCM$. Iz sukladnosti trokuta ACN i BCM ($|AC|=|BC|$, $|CN|=|CM|$, $\sphericalangle ACN=\sphericalangle BCM=75^\circ$) izlazi da je $|AN|=|BM|$. Nadalje u trokutu ABC izlazi da je $\sphericalangle AMC=180^\circ-(15^\circ+135^\circ)=30^\circ$, pa je $\sphericalangle AMN=60^\circ-30^\circ=30^\circ$, zbog čega su trokuti AMC i AMN sukladni. Odatle je $|AN|=|AC|$, pa zbog $|AC|=|BC|$ i $|AN|=|BM|$ je $|BC|=|BM|$, tj. trokut CBM je jednakokračan. Zato je $\sphericalangle BMC=\sphericalangle BCM=75^\circ$, pa je $\sphericalangle CBM=180^\circ-2.75^\circ=30^\circ$. Dakle, $\sphericalangle ABM=90^\circ$, što se i tvrdilo.

Zadatak 19 (Republičko natjecanje SR Makedonije - II r. SŠ - 1986. g.): Točka P nalazi se unutar kvadrata ABCD, tako da je $|AP|:|BP|:|CP|=1:2:3$. Naći $\sphericalangle APB$.

Rješenje:

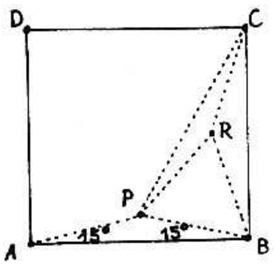


Zarotirajmo trokut BPA oko B za -90°. Točka A se preslika u točku C, a P u Q. Tada je $\sphericalangle PQB=45^\circ$ i $|PQ|^2=2.|BP|$. Prema uvjetu zadatka je $|BP|=2.|AP|$ i $|CP|=3.|AP|$, odakle je $|PQ|^2+|CQ|^2=8.|AP|^2+|AP|^2=9.|AP|^2=|CP|^2$, pa je $\sphericalangle PQC=90^\circ$.

Konačno je $\sphericalangle APB=\sphericalangle CQB=\sphericalangle CQP+\sphericalangle PQB=90^\circ+45^\circ=135^\circ$.

Zadatak 20 (Republičko natjecanje SR Hrvatske - VII r. OŠ - 1989. g.): Neka je u unutrašnjosti kvadrata ABCD odabrana točka P, takva da je $\sphericalangle ABP=\sphericalangle PAB=15^\circ$. Dokazati da je trokut PCD jednakostraničan.

Dokaz:

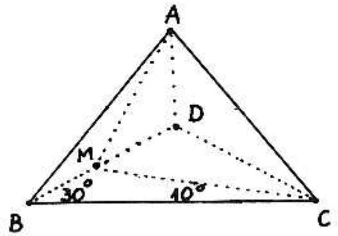


Neka je R unutrašnja točka kvadrata ABCD, takva da su trokuti BCR i ABP sukladni. Tada je trokut PBR jednakostraničan (jer je $|PB|=|BR|$ i $\sphericalangle PBR=60^\circ$), pa iz $|PR|=|BR|=|RC|$ slijedi da je trokut PRC jednakokračan. Iz $\sphericalangle PRC=360^\circ-\sphericalangle PRB-\sphericalangle BRC=150^\circ$ slijedi sukladnost trokuta PRC i BRC, odakle je $|PC|=|BC|=a$. Analogno izlazi da je i $|PD|=a$, pa je trokut PCD jednakostraničan.

Zadatak 21 (Savezno natjecanje - I r. SŠ - 1983. g., Republičko natjecanje SR Srbije - VII r. OŠ - 1989. g.): Zadan je jednakokračan trokut ABC sa osnovicom BC i kutom pri vrhu A 80°.

Unutar trokuta nalazi se točka M, takva da je $\sphericalangle MBC=30^\circ$ i $\sphericalangle MCB=10^\circ$. Koliki je kut $\sphericalangle AMC$?

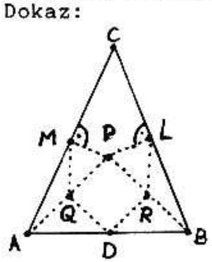
Rješenje:



Iz uvjeta zadatka slijedi da je $\sphericalangle CBA=\sphericalangle BCA=50^\circ$. Neka je D sjecište simetrale kuta $\sphericalangle CAB$ i pravca BM. Tada je $\sphericalangle DAC=40^\circ$ i $|BD|=|CD|$, pa je $\sphericalangle BCD=30^\circ$, $\sphericalangle MCD=20^\circ$, $\sphericalangle DCA=50^\circ-30^\circ=20^\circ$, $\sphericalangle CDA=120^\circ$. Iz $\sphericalangle BDC=120^\circ$ izlazi $\sphericalangle DMC=180^\circ-120^\circ-20^\circ=40^\circ$. Iz sukladnosti trokuta ADC i MDC (podudarnost u stranici $|CD|$ i dva kuta) slijedi da je $|MD|=|AD|$, zbog čega je $\sphericalangle AMD=(180^\circ-\sphericalangle MDA)/2=(180^\circ-120^\circ)/2=30^\circ$, pa je $\sphericalangle AMC=\sphericalangle AMD+\sphericalangle DMC=30^\circ+40^\circ=70^\circ$.

Zadatak 22 (Savezno natjecanje - IV r. SŠ - 1983. g.): Neka je P točka unutar trokuta ABC, takva da je $\sphericalangle PAC=\sphericalangle PBC$ i neka su M i L nožišta normala iz P na pravce AC i BC. Ako je D središte stranice AB, dokazati da je $|DL|=|DM|$.

Dokaz:

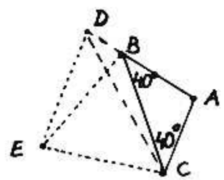


Neka su Q i R središta dužina AP i BP. Tada su trokuti MAQ i LBR jednakokračni i međusobno slični, pa je $\sphericalangle MQP=2.\sphericalangle MAP=2.\sphericalangle LBP=\sphericalangle PRL$. Četverokut DRPQ je paralelogram (jer su DR i DQ srednjice trokuta ABP), pa je $\sphericalangle PQD=\sphericalangle DRP$, zbog čega je $\sphericalangle MQD=\sphericalangle LRD$. Zbog $|MQ|=|QP|=|DR|$ i $|LR|=|RP|=|DQ|$, trokuti MQD i LRD su sukladni, pa je $|DM|=|DL|$.

Zadatak 23 (Savezno natjecanje - I r. SŠ - 1986. g.): U trokutu ABC kutevi kod vrhova B i C su po 40°. Stranica AB je preko B produžena do točke D, tako da je $|AD|=|BC|$. Odredite kuteve trokuta ADC .

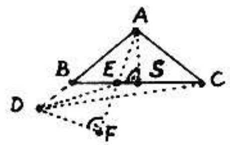
Rješenje:

I način:



Neka je BCE jednakostraničan trokut. Tada je $\sphericalangle DAC=\sphericalangle ACE=100^\circ$ i $|DA|=|BC|=|EC|$, pa je DECA jednakokračan trapez. Nadalje je $\sphericalangle EDA=\sphericalangle DBE=80^\circ$, pa je $|DE|=|BE|=|EC|$, odakle je $\sphericalangle EDC=\sphericalangle DCE=(180^\circ-80^\circ)/2=50^\circ$, $\sphericalangle CDA=80^\circ-50^\circ=30^\circ$, $\sphericalangle DCA=180^\circ-(30^\circ+100^\circ)=50^\circ$, $\sphericalangle DAC=100^\circ$.

II način:



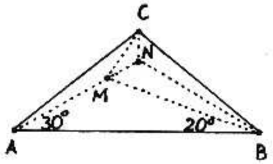
Neka je $E\in BC$, $|EC|=|AC|$ ($=|AB|$). Tada je $\sphericalangle CAE=70^\circ$, pa zbog $|AD|=|BC|$ izlazi $|BD|=|BE|$, $\sphericalangle BDE=\sphericalangle BED=\sphericalangle EBA/2=20^\circ$. Neka je F projekcija točke D na pravac AE. Tada je $\sphericalangle DAF=30^\circ$, $|DF|=|AD|/2=|BC|/2$, pa zbog $\sphericalangle DEF=90^\circ-40^\circ=50^\circ$ slijedi sukladnost trokuta DEF i

BAS, gdje je S polovište stranice BC. Odatle je $|DE| = |AB| = |BC|$, pa je $\sphericalangle EDC=\sphericalangle DCE=\sphericalangle DEB/2=10^\circ$, tj. $\sphericalangle ADC=30^\circ$, $\sphericalangle DCA=50^\circ$, $\sphericalangle CAD=100^\circ$.

Zadatak 24: U jednakokračnom trokutu ABC je $\sphericalangle ACB=100^\circ$. Unutar trokuta je dana točka M, takva da je $\sphericalangle BAM=30^\circ$ i $\sphericalangle ABM=20^\circ$. Naći $\sphericalangle ACM$.

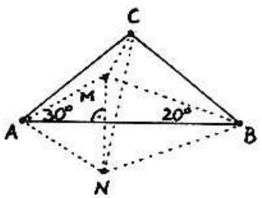
Rješenje:

I način:



Iz uvjeta zadatka slijedi da je $\sphericalangle MAC=10^\circ$, $\sphericalangle MBC=20^\circ$. Neka simetrala kuta $\sphericalangle ACB$ siječe pravac AM u točki N. Trokuti ACN i BCN su sukladni ($|AC|=|BC|$, $|AN|=|BN|$, $\sphericalangle ACN=\sphericalangle BCN=50^\circ$), pa je $\sphericalangle NBC=\sphericalangle NBM=10^\circ$, $\sphericalangle BNC=\sphericalangle ANC=120^\circ$, odakle je $\sphericalangle BNM=120^\circ$. Iz sukladnosti trokuta BMN i BCN ($|BN|=|BN|$, $\sphericalangle MBN=\sphericalangle CBN=10^\circ$, $\sphericalangle BNM=\sphericalangle BNC=120^\circ$) slijedi da je $|BM|=|BC|$, a odatle $\sphericalangle BCM=\sphericalangle BMC=(180^\circ-20^\circ)/2=80^\circ$, pa je $\sphericalangle ACM=100^\circ-80^\circ=20^\circ$.

II način:

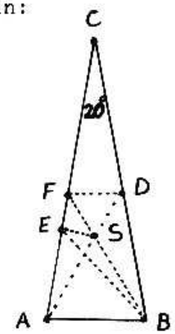


Neka je točka N simetrična točki M u odnosu na os AB. Tada je trokut ANM jednakostraničan. Nadalje je $\sphericalangle ANB=\sphericalangle AMB=130^\circ$. Kako je $180^\circ-\sphericalangle ANB=180^\circ-130^\circ=50^\circ=\sphericalangle ACB/2$, tada točke A ,N,B leže na kružnici čije je središte u točki C. Stoga je $|CA|=|CN|$, pa iz sukladnosti trokuta AMC i NMC slijedi da je $\sphericalangle ACM=\sphericalangle NCM$. Kako je trokut ANC jednakokračan, to je $\sphericalangle ACN=180^\circ-2.70^\circ=40^\circ$, pa je $\sphericalangle ACM=\sphericalangle ACN/2=20^\circ$.

Zadatak 25: Dan je jednakokračan trokut ABC s kutom pri vrhu C od 20°. Na kracima BC i AC dane su točke D i E, takve da je $\sphericalangle DAB=60^\circ$ i $\sphericalangle ABE=50^\circ$. Odrediti $\sphericalangle ADE$.

Rješenje:

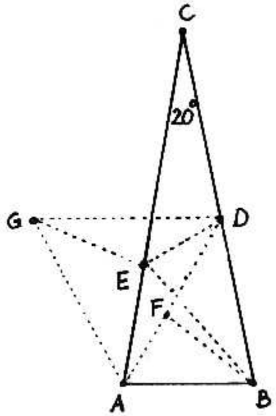
I način:



Prema uvjetima zadatka je $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ABC=80^\circ$, $\sphericalangle ABE=\sphericalangle BEA=50^\circ$, pa je trokut BEA jednakokračan, tj. $|AB|=|AE|$. Neka je F točka na kraku AC, takva da je $\sphericalangle ABF=60^\circ$ i neka je S presjek dužina BF i AD. Tada je trokut ABS jednakostraničan, pa iz $|AS|=|AB|=|AE|$ slijedi jednakokračnost trokuta ASE, tj. $\sphericalangle AES=\sphericalangle ASE=(180^\circ-\sphericalangle SAE)/2=80^\circ$. Zbog $FD||AB$ je $\sphericalangle ADF=60^\circ$, pa je trokut SDF jednakostraničan. Kako je trokut ESF jednakokračan (jer je $\sphericalangle ESF=\sphericalangle SFE=40^\circ$), to su

trokuti ESD i EFD sukladni (podudarnost u 3 stranice), pa je $\sphericalangle SDE=\sphericalangle FDE=60^\circ:2=30^\circ$. Dakle, $\sphericalangle ADE=30^\circ$.

II način:

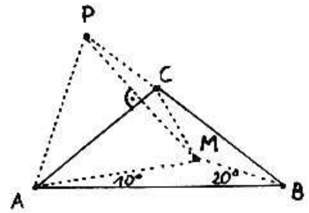


Iz uvjeta zadatka slijedi da je trokut BEA jednakokračan ($\sphericalangle BEA=\sphericalangle ABE$), tj. da je $|AB|=|AE|$ (1). Neka je BF ($F\in AD$) simetrala $\sphericalangle ABD$ i neka je G takva točka da je $\sphericalangle EAG=\sphericalangle EGA=40^\circ$. Iz sličnosti trokuta ABF i ADB slijedi $|BF|:|AB|=|BD|:|AD|$, tj. $|BF|.|AD|=|AB|.|DB|$ (2). Iz sličnosti jednakokračnih trokuta AGE i BDF slijedi $|AG|:|AE|=|BD|:|BF|$, tj. (zbog (1)) $|AG|.|BF|=|AB|.|BD|$ (3). Iz (2) i (3) slijedi $|BF|.|AD|=|AG|.|BF|$, tj. $|AD|=|AG|$, pa je (zbog $\sphericalangle DAG=60^\circ$) trokut ADG jednakostraničan. Zbog $|AE|=|GE|$, točka E je na simetrali $\sphericalangle ADG$, pa je $\sphericalangle ADE=30^\circ$.

Zadatak 26: U jednakokračnom trokutu ABC kutevi uz osnovicu su po 40°. Odabrana je unutrašnja točka M trokuta ABC, takva da je $\sphericalangle MAB=10^\circ$ i $\sphericalangle MBA=20^\circ$. Naći $\sphericalangle CMB$.

Rješenje:

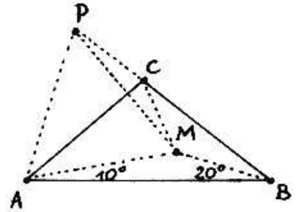
I način:



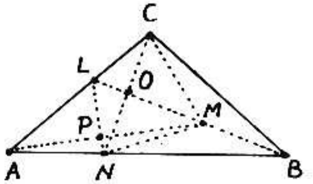
Iz uvjeta zadatka slijedi da je $\sphericalangle MAC=30^\circ$, $\sphericalangle MBC=20^\circ$, $\sphericalangle AMB=150^\circ$. Neka je P simetrična točka točki M u odnosu na AC. Tada je trokut AMP jednakostraničan. U trokutu ABP je $\sphericalangle APB=70^\circ$, pa je $\sphericalangle BPM=10^\circ$. Iz jednakokračnosti trokuta PMC ($|PC|=|MC|$) slijedi da je $\sphericalangle PMC=\sphericalangle MPC=10^\circ$. Lako se vidi da je $\sphericalangle CMB=360^\circ-(\sphericalangle AMB+\sphericalangle AMP+\sphericalangle PMC)=360^\circ-(150^\circ+60^\circ+10^\circ)=140^\circ$.

II način:

Neka je $P\in BC$, $|BP|=|BA|$. Slučaj se svodi na I način.

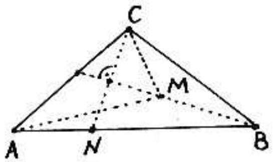


III način:



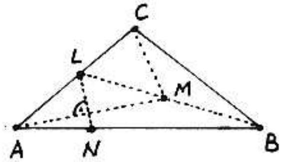
Neka je $N \in AB$, $|BN|=|BC|$, $L=BM \cap AC$ i $O=CN \cap ML$. Tada je BL simetrala $\sphericalangle ABC$, pa iz sukladnosti trokuta BMN i BMC, odnosno BLN i BLC slijedi da je $LNMC$ deltoid, tj. $ML \perp NC$. Nadalje je $\sphericalangle BCO=70^\circ$, $\sphericalangle OCL=100^\circ-70^\circ=30^\circ$, $\sphericalangle CLO=60^\circ$, $\sphericalangle OLN=\sphericalangle OLC=60^\circ$, $\sphericalangle APL=90^\circ$, $\sphericalangle PML=30^\circ$, $\sphericalangle PMN=10^\circ$, $\sphericalangle OMC=\sphericalangle NMO=40^\circ$, $\sphericalangle CMB=180^\circ-\sphericalangle OMC=140^\circ$.

IV način:



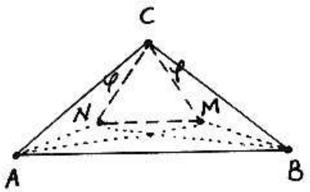
Neka je $N \in AB$, $CN \perp BM$.
Slučaj se svodi na III način.

V način:



Neka je $L=AC \cap BM$ i $N \in AB$, $LN \perp AM$.
Slučaj se svodi na III način.

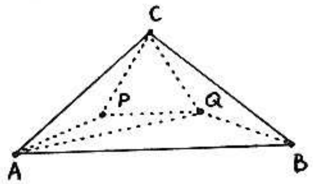
VI način:



Neka je N točka u unutrašnjosti trokuta ABC, takva da je $\sphericalangle NAB=20^\circ$ i $\sphericalangle NBA=10^\circ$. Tada su trokuti ABN i BAM sukladni ($|AB|=|AB|$, $\sphericalangle ABN=\sphericalangle BAM=10^\circ$, $\sphericalangle BAN=\sphericalangle ABM=20^\circ$), pa je $|AN|=|BM|$ i $NM \| AB$ (zbog jednakosti visina na AB spomenutih trokuta), tj. $ABMN$ je jednakokračan trapez. Zbog $\sphericalangle MNA=160^\circ$ i $\sphericalangle MAN=10^\circ$ je i $\sphericalangle AMN=10^\circ$, pa iz jednakokračnosti trokuta AMN slijedi da je $|AN|=|MN|$. Dalje, iz sukladnosti trokuta ANC i BMC slijedi da je $\sphericalangle ACN=\sphericalangle BCM=\varphi$, zbog čega je trokut

NMC jednakokračan. Ostaje još pokazati da je $\varphi=20^\circ$. Za $\varphi>20^\circ=\sphericalangle MBC \Rightarrow |NM|=|BM|>|CM| \wedge \sphericalangle NCM<60^\circ \Rightarrow |NM|>|CM| \wedge \sphericalangle CMN>60^\circ>\sphericalangle NCM \Rightarrow |NM|>|CM|$ $|CM|=|CN|>|NM| \Rightarrow |NM|>|CM| \wedge |CM|>|NM|$, što je očito kontradikcija. Slično se pokazuje da ne može biti ni $\varphi<20^\circ$, pa je $\varphi=20^\circ$, zbog čega je $\sphericalangle CMB=180^\circ-2.20^\circ=140^\circ$.

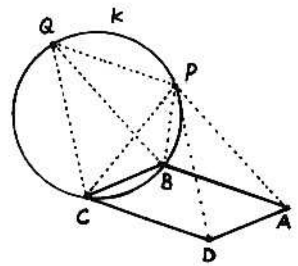
VII način:



Neka su CAP i CBQ jednakokračni trokuti sa kutom od 20° uz osnovice AC i BC. Tada je trokut PQC jednakostraničan ($|PC|=|QC|$, $\sphericalangle PCQ=60^\circ$), pa je trokut AQP jednakokračan sa kutevima $\sphericalangle PAQ=\sphericalangle AQP=(180^\circ-\sphericalangle APQ)/2=10^\circ$. Nadalje je $\sphericalangle QAB=10^\circ$, $\sphericalangle QBA=40^\circ-20^\circ=20^\circ$, pa je $Q \equiv M$. Kako je $\sphericalangle CQB=180^\circ-2.20^\circ=140^\circ$, to je i $\sphericalangle CMB=140^\circ$.

Zadatak 27 (Bugarska, 1976. g.): Zadan je paralelogram $ABCD$ i točka P, tako da je $\sphericalangle PAB=\sphericalangle PCB$, pri čemu A i C leže s raznih strana pravca PB. Dokazati da je $\sphericalangle APB=\sphericalangle DPC$.

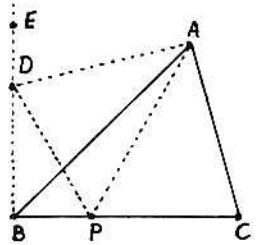
Dokaz:



Neka je Q takva točka da je $CDPQ$ paralelogram. Tada je (zbog $|QP|=|CD|=|BA|$ i $QP \| CD \| BA$) i $BAPQ$ paralelogram. Kako je $\sphericalangle BCP=\sphericalangle BAP$ (uvjet zadatka) $=\sphericalangle BQP$ ($BAPQ$ je paralelogram), tada kuteve $\sphericalangle BCP$ i $\sphericalangle BQP$ možemo smatrati kao periferne kuteve nad istim lukom $\overset{\frown}{BP}$ kružnice na kojoj se nalaze točke P,Q,C,B. Odatle je $\sphericalangle APB=\sphericalangle PBQ$ (izmjenični kutevi u paralelogramu $BAPQ$) $=\sphericalangle PCQ$ (periferni kutevi nad istim kružnim lukom $\overset{\frown}{PQ}$) $=\sphericalangle DPC$ (izmjenični kutevi u paralelogramu $CDPQ$).

Zadatak 28 (DR Njemačka): Na stranici BC trokuta ABC dana je točka P za koju je $|PC|=2.|BP|$. Naći $\sphericalangle ACB$, ako je $\sphericalangle ABC=45^\circ$ i $\sphericalangle APC=60^\circ$.

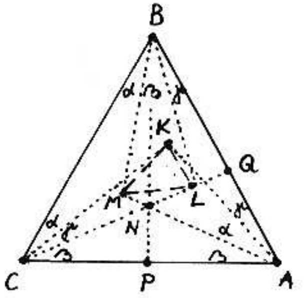
Rješenje:



Iz uvjeta zadatka izlazi da je $\sphericalangle PAB=15^\circ$. Neka je D točka simetrična točki C u odnosu na AP. Tada je $\sphericalangle APD=\sphericalangle APC=60^\circ$, odakle je $\sphericalangle BPD=60^\circ$. Kako je, osim toga, još i $|DP|=|CP|=2.|BP|$, to je $\sphericalangle PBD=90^\circ$, pa je AB simetrala $\sphericalangle PBD$. Pošto je i AP simetrala $\sphericalangle CPD$, to je A središte pripisane kružnice trokuta PDB, pa je $\sphericalangle PDA=\sphericalangle ADE$ ($E \in BP$) $=(180^\circ-30^\circ)/2=75^\circ$. Odatle je $\sphericalangle PAD=\sphericalangle PAC=45^\circ$, pa je $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ACP=75^\circ$.

Zadatak 29 (Nizozemska, 1970. g.): Unutar jednakostraničnog trokuta ABC dane su točke K, L, M, takve da je $\angle KAB=\angle LBA=15^\circ$, $\angle MBC=\angle KCB=20^\circ$, $\angle LCA=\angle MAC=25^\circ$. Naći kuteve trokuta KLM.

Rješenje:

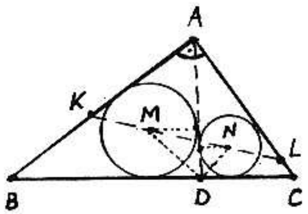


Prema uvjetima zadatka je $\alpha=20^\circ$, $\beta=25^\circ$, $\gamma=15^\circ$, $\alpha,\beta,\gamma<30^\circ$, $\alpha+\beta+\gamma=60^\circ$, $\angle KAM=60^\circ-\angle MAC-\angle KAB=\alpha$ i analogno tome $\angle LBM=\beta$, $\angle KCL=\gamma$.
Neka je $AM\cap CL=N$, $BN\cap AC=P$, $CL\cap AB=Q$.
Pošto je $|AB|=|BC|$ (trokut ABC je jednakostraničan) i $|AN|=|CN|$ (jer je $\angle ACN=\angle CAN=\beta$), to je BP simetrala kuta $\angle ANC$, pa onda i kuta $\angle LNM$.
Neka je B' točka unutar kuta $\angle LNM$, izvan trokuta LMN i jednako udaljena od pravaca LN, LM i MN. Tada je B' na simetrali dužine BN i na simetrali vanjskih kuteva u M i N (tj. B' je središte pripisane kružnice trokuta LMN), pa imamo:
$\angle LB'M=180^\circ-\angle B'LM-\angle B'ML=180^\circ-(180^\circ-\angle NLM)/2-(180^\circ-\angle NML)/2=(\angle NLM+\angle NML)/2=(180^\circ-\angle LNM)/2=(\angle NAC+\angle NCA)/2=\beta=\angle LBM$, tj. $B\equiv B'$.
Odatle je: $\angle BLM=\angle BLQ=180^\circ-\angle CQB-\angle ABL=\angle ABC+\angle BCQ-\angle ABL=60^\circ+\alpha+\gamma-\gamma=60^\circ+\alpha$, $\angle BLC=180^\circ-\angle LBC-\angle LCB=180^\circ-(\beta+\alpha)-(\alpha+\gamma)=120^\circ-\alpha$, $\angle MLC=\angle BLC-\angle BLM=120^\circ-\alpha-(60^\circ+\alpha)=60^\circ-2\alpha$ (jer je $\alpha<30^\circ$).
Analogno se pokazuje da je $\angle KLB=60^\circ-2\alpha$, pa imamo:
$\angle KLM=\angle BLC-\angle KLB-\angle MLC=(120^\circ-\alpha)-(60^\circ-2\alpha)-(60^\circ-2\alpha)=3\alpha=60^\circ$.
Analogno izlazi: $\angle LKM=3\beta=75^\circ$, $\angle KML=3\gamma=45^\circ$.

Zadatak 30 (Međunarodna matematička olimpijada u Australiji, 1988. g.): ABC je trokut sa pravim kutom pri vrhu A, a točka D je nožište visine iz A. Spojnica središta kružnica, upisanih trokutima ABD i ADC, siječe stranice AB i AC redom u točkama K i L. Označimo sa S i T redom površine trokuta ABC i AKL. Dokaži da je $S\geq 2T$.

Dokaz:

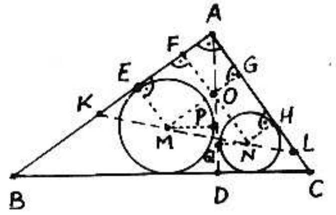
I način:



Neka su M i N središta kružnica upisanih u trokute ABD i ADC, a m i n njihovi polumjeri. Kako su DM i DN simetrale pravih kuteva, tada je $\angle MDN=90^\circ$ i $|MD|:|ND|=m\sqrt{2}:n\sqrt{2}=m:n$. Iz sličnosti trokuta ABD i CAD slijedi $|MD|:|ND|=|AB|:|AC|$, pa su (zbog $\angle MDN=90^\circ$) trokuti ABC i NMD slični. Odatle slijedi da je $\angle ABC=\angle DMN$. Dalje je u četverokutu BDMK $\angle BKM=135^\circ$, pa je $\angle AKL=45^\circ$, zbog čega je $|AK|=|AD|$. Analogno izlazi da je i $|AL|=AD$, pa imamo:
$S:T=(|BC|\cdot|AD|):(|AK|\cdot|AL|)=(|BC|\cdot|AD|):(|AD|^2)=|BC|:|AD|=$

$=|BC|^2:(|BC|\cdot|AD|)=(|AB|^2+|AC|^2):(|AB|\cdot|AC|)=|AB|/|AC|+|AC|/|AB|\geq 2$ (dokažite to !), tj. $S\geq 2T$.

II način:



Neka su M, N središta kružnica upisanih u trokute ABD i ACD, a m, n pripadni im polumjeri. Označimo nožišta okomica, spuštenih iz M i N na stranice AB, AC i AD sa E, F, G, H, P, Q, sjecište MG i NF sa O, a duljinu visine AD trokuta ABC sa v. Tada je $|AE|=v-m$, $|AH|=v-n$, pa je $|EF|=|AE|-|AF|=v-m-n$ i $|HG|=|AH|-|AG|=v-n-m$, tj. $|EF|=|HG|$, pa je MNO jednakokračam pravokutan trokut, što su onda i trokuti KME i NLH. To znači da je $|KE|=m$ i $|LH|=n$, pa je $|AK|=|AE|+|KE|=v$ i $|AL|=|AH|+|LH|=v$. Dalje (kao u I načinu) dobivamo da je $S\geq 2T$.

Zadaci za vježbu

1) U pravokutnom trokutu ABC kateta BC je kraća od katete CA. Nad stranicama trokuta s vanjske strane konstruirani su kvadrati CBFG, ACHI, BADE. Dokazati da je $|EF|<|DI|$.

2) Dan je jednakostraničan trokut ABC i točka O unutar njega. Iz točke O spuštene su normale OD, OE, OF na stranice BC, CA, AB trokuta. Dokazati da je suma $|AD|+|BE|+|CF|$ stalna i da ne zavisi od izbora točke O.

3) U kružnicu je upisan jednakostraničan trokut ABC. Na luku $\overset{\frown}{BC}$ je dana proizvoljna točka M. Dokazati da je $|MA|=|MB|+|MC|$.

4) Tri jednaka kvadrata ABCD, CDEF i EFGH jedan do drugoga čine pravokutnik ABGH. Dokazati da je $\angle ADB+\angle AEB+\angle AHB=90^\circ$.

5) Točke M i N su na stranicama AB i CD četverokuta ABCD i vrijedi: $|AM|:|MB|=|DN|:|NC|=|AD|:|BC|$. Dokazati da se pravci AD, BC, MN sijeku u istoj točki.

6) Na stranici AB trokuta ABC dana je točka P, tako da je $|AP|:|PB|=1:2$. Naći $\angle ACP$, ako je $\angle CAB=45^\circ$ i $\angle ABC=75^\circ$. (R: $\angle ACP=15^\circ$).

7) U trokutu ABC kut kod vrha B iznosi 40°. U unutrašnjosti trokuta odabrana je točka D, tako da je BD simetrala $\angle ABC$ i da su trokuti DAB i DBC jednakokračni. Odrediti $\angle ACD$. (R: $\angle ACD=30^\circ$).

8) **(SFRJ - II r. SŠ - 1973. g.)** Dan je jednakostraničan trokut ABC duljine stranice a i sa središtem O i točka P koja pripada dužini OC. Konstruirati jednakostranični trokut XYZ upisan u trokut ABC, tako da točke X, Y, Z pripadaju redom stranicama BC, CA, AB i da stranica XY sadrži

točku P. Kada zadatak ima rješenje ?
(R: Zadatak ima rješenje za $|OP| \geq |OC|/4$).

9) **(SFRJ - I r. SŠ - 1980. g.)** Neka je D točka na stranici BC danog trokuta ABC, takva da je $|DC|=2.|BD|$. Odrediti ostale kuteve trokuta ABC, ako je $\sphericalangle ABC=45^{\circ}$, $\sphericalangle ADC=60^{\circ}$.
(R: $\sphericalangle BCA=75^{\circ}$, $\sphericalangle CAB=60^{\circ}$).

10) **(SFRJ - II r. SŠ - 1984. g.)** Dan je konveksan četverokut ABCD kod koga je $\sphericalangle ABD=50^{\circ}$, $\sphericalangle ADB=80^{\circ}$, $\sphericalangle ACB=40^{\circ}$, $\sphericalangle DBC=\sphericalangle BDC+30^{\circ}$. Izračunati $\sphericalangle DBC$.
(R: $\sphericalangle DBC=70^{\circ}$).

11) **(SFRJ - I r. SŠ - 1985. g.)** U unutrašnjosti kvadrata ABCD dana je točka E, tako da je trokut CDE jednakokračan sa kutom od 150° kod vrha E. Odrediti kuteve trokuta ABE.
(R: $\sphericalangle EAB=\sphericalangle ABE=\sphericalangle BEA=60^{\circ}$).

12) **(SFRJ - II r. SŠ - 1986. g.)** Na promjeru AD kružnice dana je točka C. Neka je B točka te kružnice za koju je $|AB|=|CD|$. Dokazati da se u trokutu ABC simetrala unutrašnjeg kuta kod vrha A, težišnica iz vrha B i visina iz vrha C sijeku u jednoj točki.

13) **(SFRJ - I r. SŠ - 1988. g.)** Izračunati kuteve trokuta ABC ako težišnica, simetrala kuta i visina iz vrha C dijele kut $\sphericalangle ACB$ na 4 jednaka dijela.
(R: $\sphericalangle BCA=90^{\circ}$, $\sphericalangle CAB=67^{\circ}30'$, $\sphericalangle ABC=22^{\circ}30'$).

14) **(Međunarodna matematička olimpijada u Finskoj - 1985. g.)** Dan je trokut ABC i kružnica sa središtem u O koja prolazi vrhovima A i C i siječe stranice AB i BC u točkama K i L. Kružnice, opisane trokutima ABC i KBL, imaju dvije zajedničke točke B i M. Dokaži da je $\sphericalangle OMB$ pravi kut.

15) **(Međunarodna matematička olimpijada u Kubi - 1987. g.)** U šiljastokutnom trokutu ABC simetrala kuta kod vrha A siječe stranicu BC u točki L, a njemu opisanu kružnicu u točki N. Na stranicama AB i AC su odabrane točke K i M, takve da je $\sphericalangle AKL=\sphericalangle AML=90^{\circ}$. Dokaži da su površine četverokuta AKNM i trokuta ABC međusobno jednake.

16) Konstruirati trokut kome je zadano: $a+b+c, \alpha, \beta$.

17) Konstruirati trokut kome je zadano: t_a, h_a, s_{α}.

18) Konstruirati trokut kome je zadano: a, h_a, $\beta-\gamma$.

19) Konstruirati jednakokračan trokut kome je zsdano: $2b-a, \alpha$.

20) Konstruirati pravokutan trokut kome je zadano: $a+b-c, \alpha$.