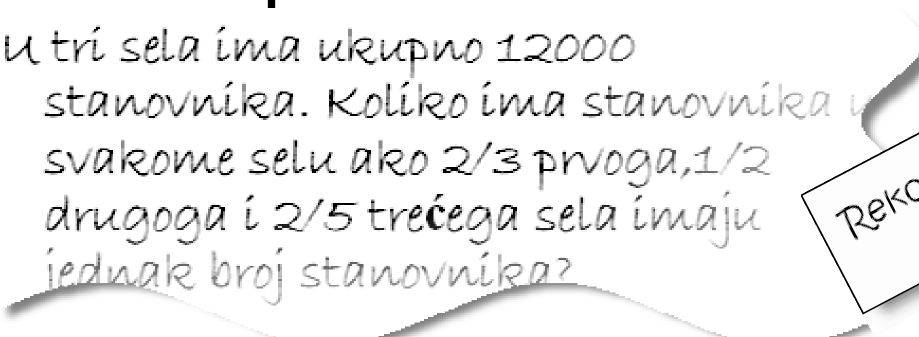
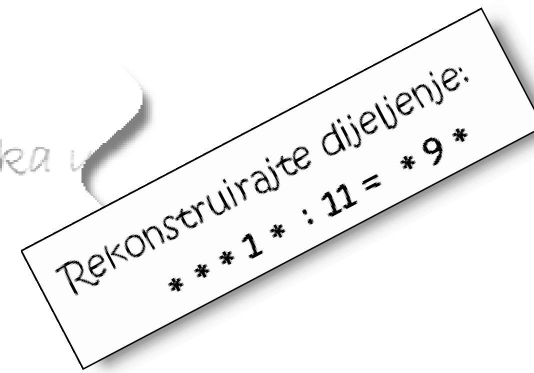
METODE I ZADATCI ZA NADARENE UČENIKE





Luka Čeliković, prof.

Recenzentica: Tamara Srnec, prof.

Sadržaj (I)

1. Metoda dužina (pravokutnika,…)
2. Metoda površine pravokutnika
3. Grafičko rješavanje problema jednolikoga gibanja
4. Logički zadatci
5. Dirichletov princip
6. Metoda pomoćnih likova u planimetrijskim zadatcima
7. Primjena radijus-vektora i koordinatne metode u planimetrijskim zadatcima
8. Opseg i površina lika omeđena kružnim lukovima
9. Oplošje i volumen (obujam) rotacijskoga tijela
10. Funkcija "apsolutna vrijednost"

Sadržaj (II)

11. Funkcija “najveće cijelo”
12. Rasprava rješenja linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom
13. Gaussova metoda eliminacije
14. Diofantove jednadžbe
    - linearne diofantove jednadžbe
    - nelinearne diofantove jednadžbe
15. Tablično rješavanje nejednadžaba
16. Logaritamske nejednadžbe u kojima su i logaritmand i baza promjenjive veličine
17. Dokazi algebarskih nejednakosti primjenom odnosa između sredina

1. METODA DUŽINA (PRAVOKUTNIKA)

Ovu metodu možemo primijeniti pri rješavanju problemskih zadataka.

Primjer 1.

(Regionalno natjecanje 2010., 4. razred OŠ)

Jedan je broj veći od drugoga za 406. Ako se veći broj podijeli manjim, dobit će se količnik 3 i ostatak 66. Koji su to brojevi?

m manji broj

m 406

veći broj

This image cannot currently be displayed.

m m m 66 veći broj

m m

406- 66 = 340

m

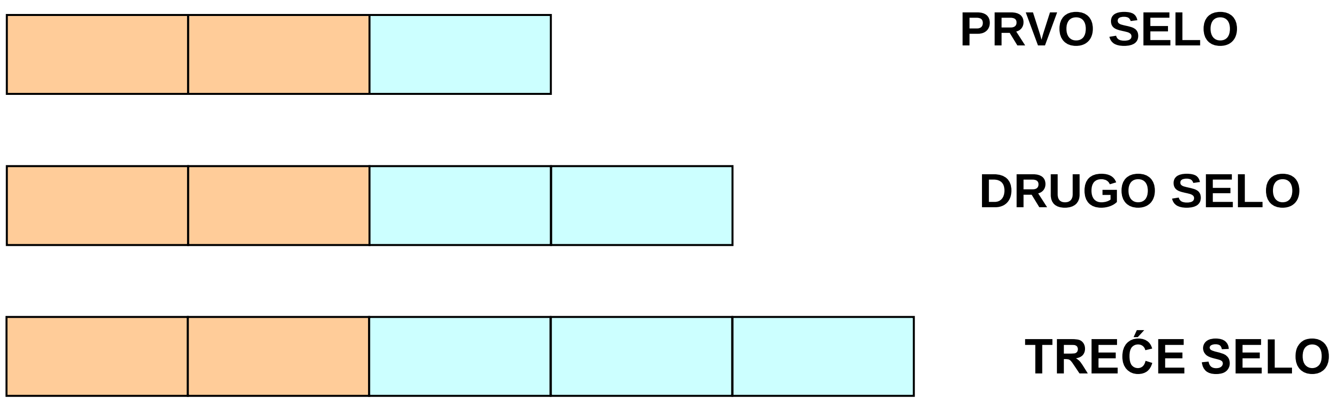
340:2 = 170

Manji broj ima vrijednost 170, a veći $3 \cdot 170 + 66 = 576$.

Primjer 2.

(Regionalno natjecanje 2005., 6. razred OŠ)

U tri sela ima ukupno 12000 stanovnika. Koliko ima stanovnika u svakome selu ako 2/3 prvoga,1/2 drugoga i 2/5 trećega sela imaju jednak broj stanovnika?



12 = 12 000

ukupan broj stanovnika u sva tri sela

= 1000 stanovnika

Prvo selo ima 3000, drugo 4000, a treće 5000 stanovnika.

Zadatak 1.

Razlika dvaju brojeva je 15. Koliki su ti brojevi ako je jedan od njih 4 puta veći od drugoga?

Rezultat.

Veći je broj 20, a manji 5.

Zadatak 2.

Antun i Branko pošli su na izlet. Usput je Antun kupio 5, a Branko 3 kolača, platiivši ukupno za njih 24 kune. Na izletu im se pridruži i Cvjetko te sva trojica zajedno pojedoše kolače. Za svoj dio kolača Cvjetko im plati 8 kuna. Kako će tih 8 kuna podijeliti Antun i Branko?

Rezultat.

Antun će dobiti 7, a Branko 1 kunu.

Rješenje Z2 (RADIONICA)

Za 8 kolača su Antun i Branko platili 24 kune, pa je svaki kolač koštao 3 kune.

I---I---I---I---I---I Antun je za 5 kolača platio 15 kuna

I---I---I---I Branko je za 3 kolača platio 9 kuna

Svaki od njih trojice je pojeo kolača za 24:3=8 kuna.

I---I---I---I---I---I Antun je platio 7 kuna više za kolače nego što ih je pojeo.

I---I---I---I Branko je platio 1 kunu više za kolače nego što ih je pojeo.

Od 8 dobivenih Cvjetkovih kuna
Antun će dobiti 7, a Branko 1 kunu.

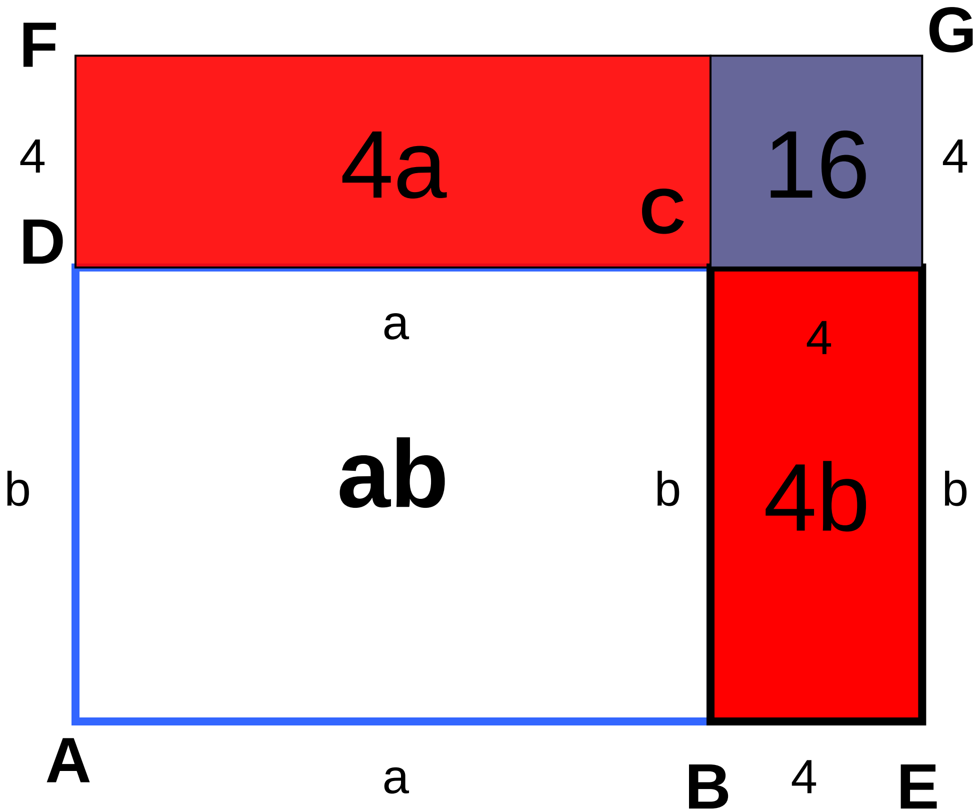
2. METODA POVRŠINE PRAVOKUTNIKA

Umjesto klasičnog rješavanja nekih jednadžaba u kojima se pojavljuje umnožak binoma možemo te jednadžbe rješavati grafički primjenom površine pravokutnika.

Primjer 1.

(Regionalno natjecanje 2007., 5. razred OŠ)

Zadan je pravokutnik ABCD opsega 4 cm. Produljimo stranicu AB za 4 cm preko točke B do točke E, a stranicu AD za 4 cm preko točke D do točke F. Za koliko se razlikuju površine zadanoga pravokutnika ABCD i pravokutnika komu su $\overline{AE}$ i $\overline{AF}$ susjedne stranice?

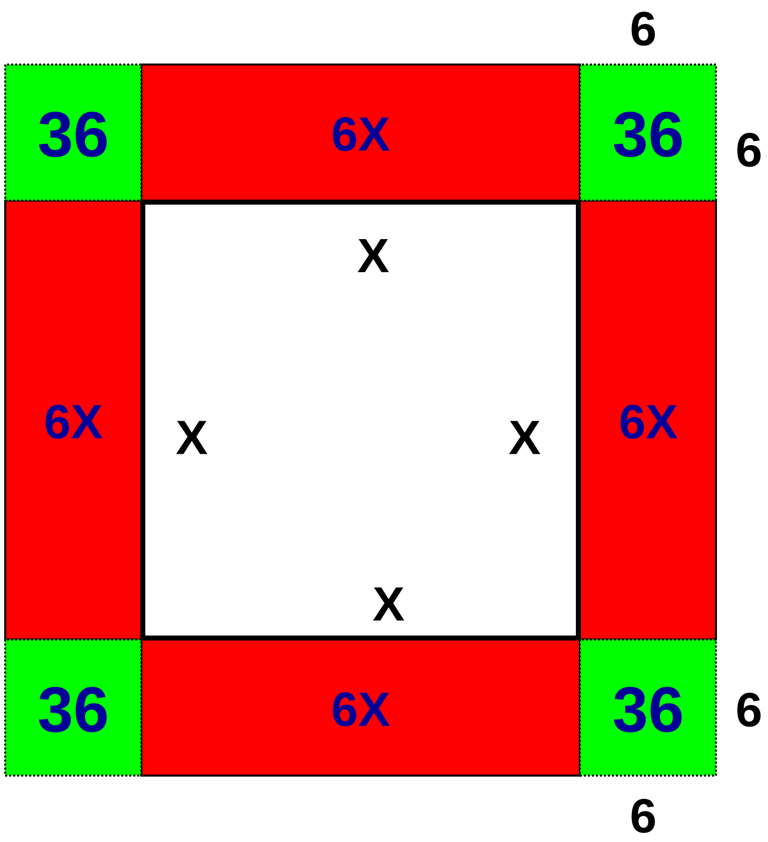


Iz o=2(a+b)=42 slijedi a+b=21, pa se površine novodobivenoga pravokutnika AEGF i danoga pravokutnika ABCD razlikuju za $4a+4b+16=4(a+b)+16=4\cdot 21+16=100$, tj. za $100\ cm^2$.

Primjer 2.

(Regionalno natjecanje 2001., 4. razred OŠ)

Iz jednoga kvadrata izrezan je u sredini drugi kvadrat, tako da je ostao okvir širine 6 cm. Kolika je duljina stranice novodobivenoga kvadrata ako je površina okvira 384 cm^2?



Površina okvira je 4·(6x+36)=384, odakle je
6x+36=384:4, 6x+36=96, 6x=96-36, 6x=60,
x=10 cm.

Zadatak 1.

(Regionalno natjecanje 1996., 4. razred OŠ)

Ako duljinu stranice kvadrata povećamo za 2 cm, dobit ćemo kvadrat koji ima površinu za 8 cm^2 veću od površine prvobitnoga kvadrata. Koliko iznosi duljina stranice, opseg i površina prvobitnoga kvadrata?

Rezulat.

$a = 1$ cm, $o = 4$ cm, $p = 1$ cm^2.

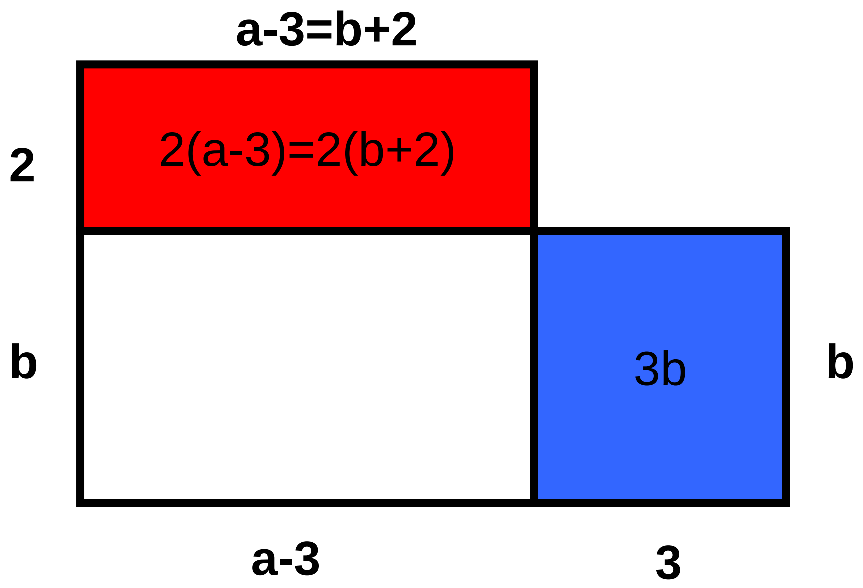
Zadatak 2.

Dana su dva različita pozitivna broja. Ako od većega broja oduzmemo 3, a manjemu dodamo 2, dobit ćemo jednake brojeve čiji je produkt jednak produktu danih brojeva. Koji su dani brojevi?

Rezultat.

$a=9$, $b=4$.

Rješenje Z2 (RADIONICA)



Iz a-3=b+2 izlazi a=b+5, pa iz 2(b+2)=3b slijedi **b=4 i a=9**.

3. GRAFIČKO RJEŠAVANJE PROBLEMA JEDNOLIKOGA GIBANJA

Rabit ćemo formulu jednolikoga gibanja po pravcu

$s = v \cdot t$ **, odakle je** $v = \frac{s}{t}$ $t = \frac{s}{v}$

s = duljina puta

t = veličina vremena

v = veličina brzine

Primjer 1.

Put između mjesta A i B pješak prijeđe za 6, a biciklist za 2 sata. Pješak krene u 7, a biciklist u 9 sati. Kada će biciklist stići pješaka?

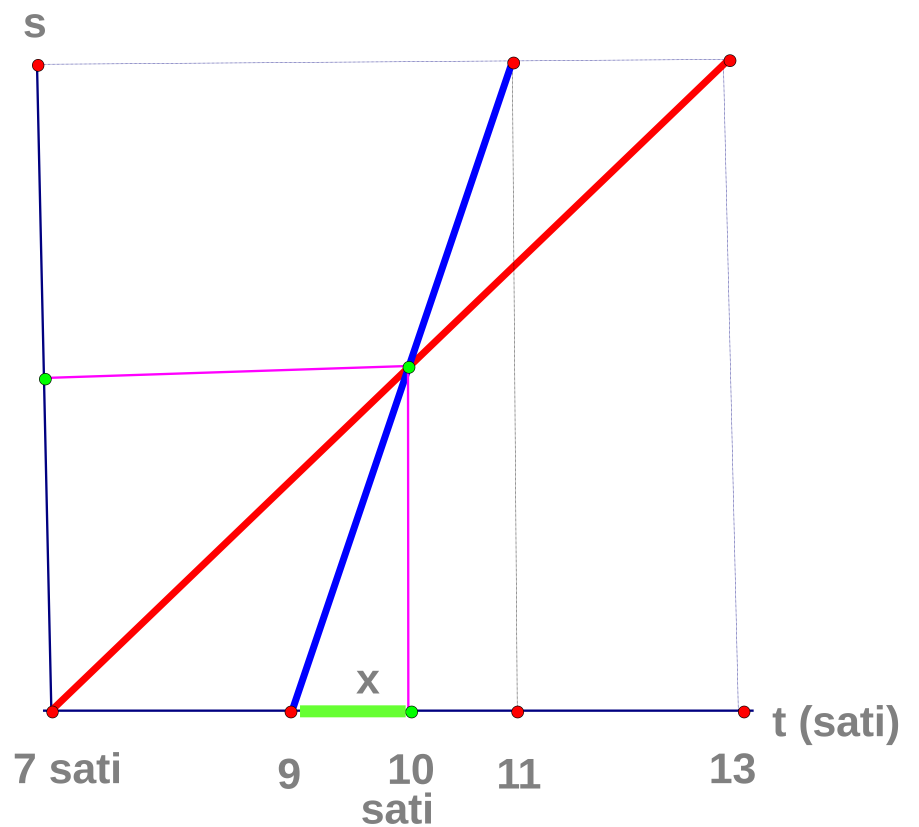
Neka je x broj sati koje će proteći nakon 9 sati do susreta biciklista i pješaka.

Tada iz $\frac{s}{6}(x+2)=\frac{s}{2}x$

$\Rightarrow$ *6x=2(x+2)* $\Rightarrow$ *4x=4*

$\Rightarrow$ *x=1* sat, tj.

biciklist će prestići pješaka u 10 sati.

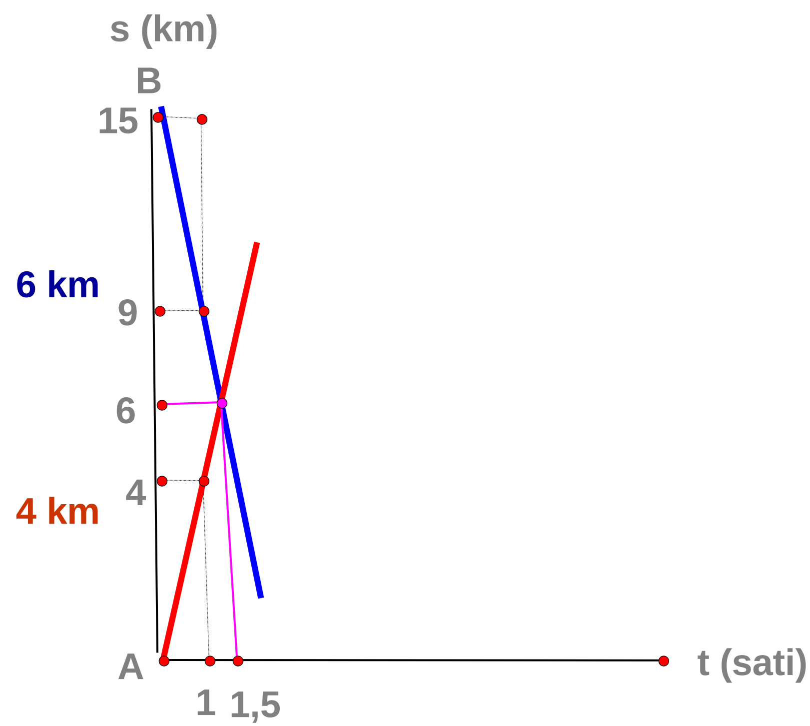


Primjer 2.

Dva pješaka, međusobno udaljena 15 km, kreću istovremeno jedan drugome u susret. Prvi ide 4 km/h, a drugi 6 km/h. Poslije koliko će se sati sresti i na kojim udaljenostima od polaznih točaka?

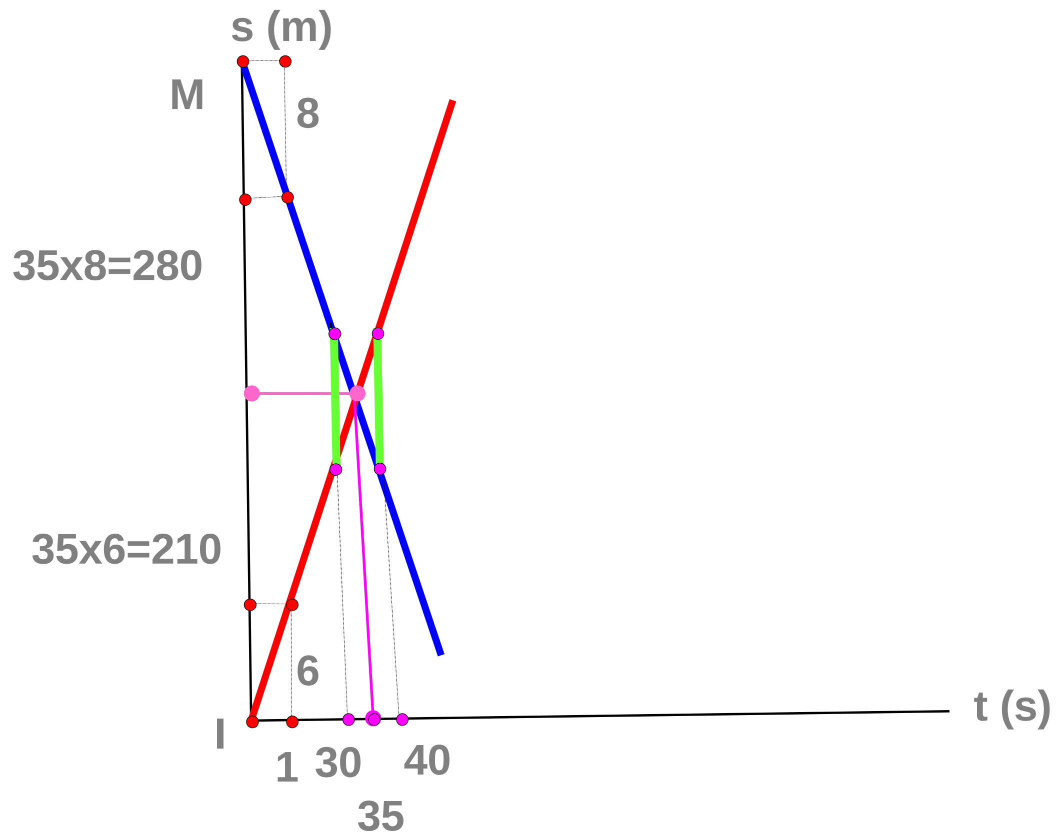
Iz 4x+6x=15 slijedi x=1,5.
Susret će biti 1,5 sati nakon polaska.

Za to će vrijeme
prvi pješak prijeći **6 km**, a drugi **9 km**.



Primjer 3.
(Županijsko natjecanje 2001., 6. razred OŠ)

Igor i Mario nalazili su se na ravnoj cesti, međusobno udaljeni, i istovremeno krenuli jedan prema drugomu. U svakoj sekundi Igor prijeđe 6 m, a Mario 8 m. Točno 30 sekundi od početka vožnje Igor i Mario bili su međusobno udaljeni jednako kao i 40 sekundi nakon početka vožnje. Koliko su metara Mario i Igor bili udaljeni na početku vožnje?



Lako zaključujemo da će se Igor i Mario sresti nakon 35 sekundi, odakle slijedi da su tada njihove udaljenosti od polaznih točaka 210 i 280 metara.

Zadatak 1.

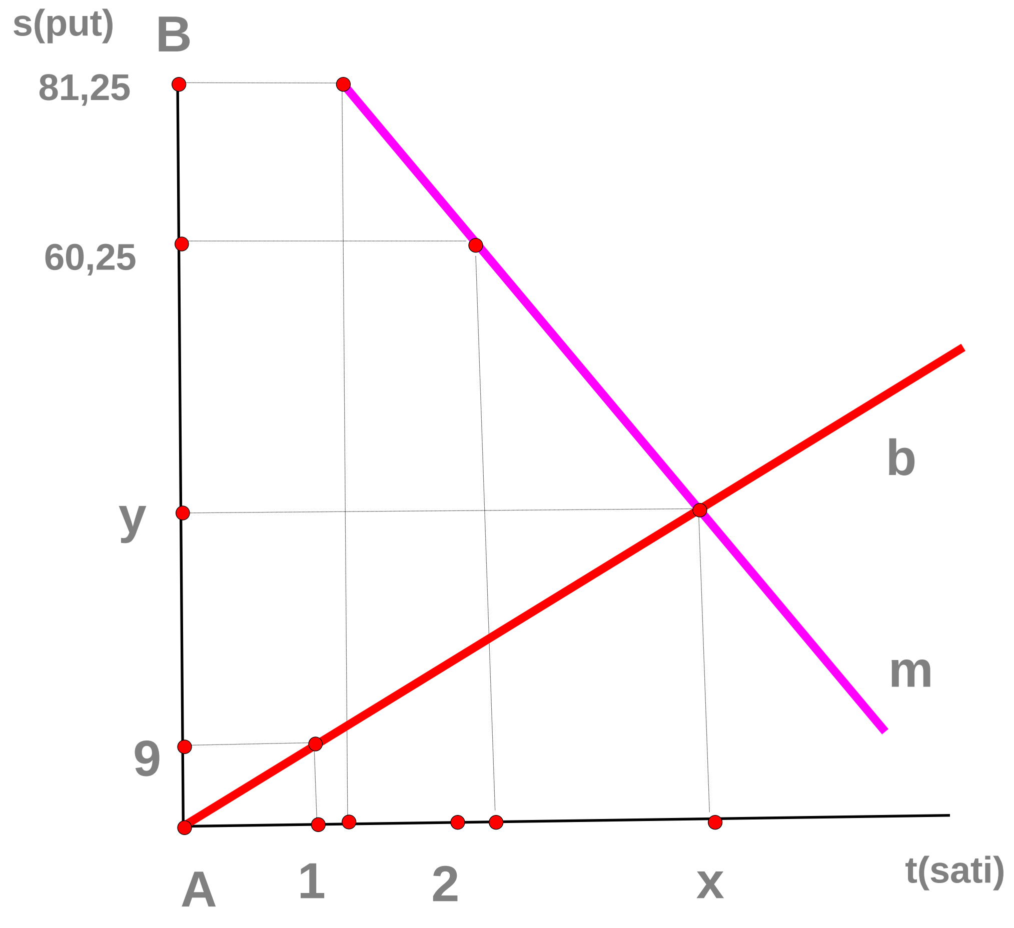
(Općinsko/gradsko natjecanje 1999., 7. razred OŠ)

Iz mjesta A krenuo je biciklist u mjesto B brzinom 9 km/h. Jedan sat i 15 minuta nakon biciklista krenuo je motorist iz mjesta B u mjesto A brzinom od 21 km/h. Koliko km od mjesta A su se susreli biciklist i motorist, ako je udaljenost mjesta A i B jednaka 81¼ km?

Rezultat.

Susret je bio na udaljenosti 32¼ km od mjesta A.

Rješenje Z1 (RADIONICA)



Za vrijeme x proteklo od polaska biciklista do njegova susreta s motociklistom

$$(\text{iz } 9x+21\cdot(x-5/4)=81+1/4)$$

dobivamo

$$x = 43/12 \text{ sati},$$

odakle za udaljenost y njihova susreta od mjesta A slijedi

$y=(43/12)\cdot 9=129/4$, tj. $y=(32+1/4)$ km.

Zadatak 2.

(Općinsko/gradsko natjecanje 2000., 8. razred OŠ)

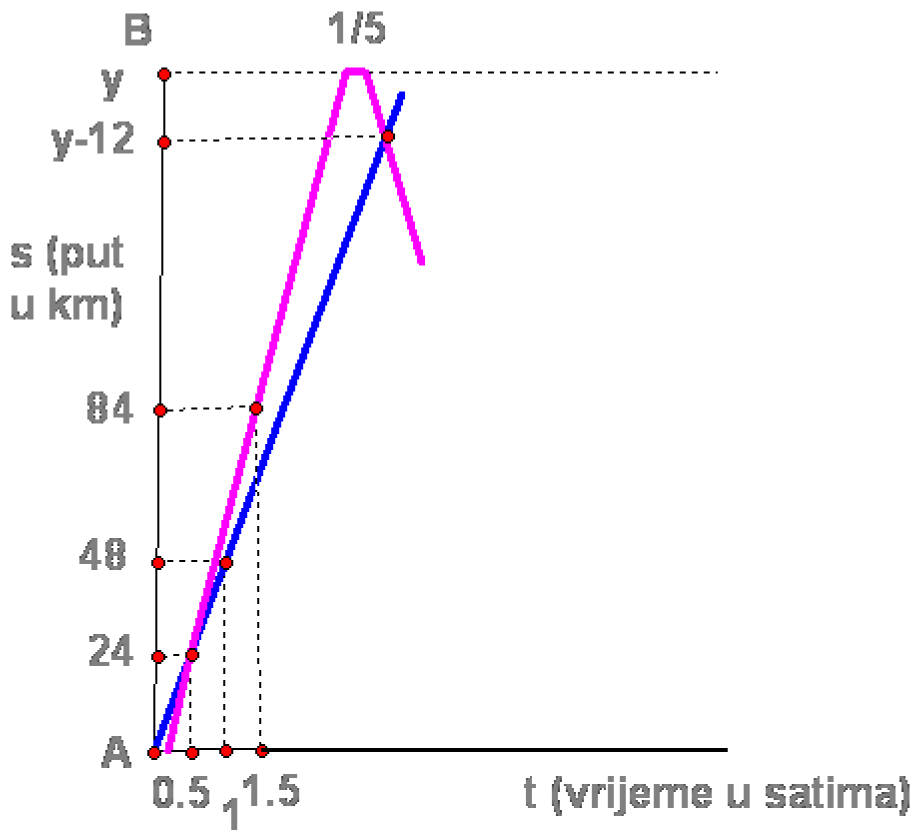
Iz mjesta A krenuo je autobus u mjesto B brzinom od 48 km/h. Nakon pola sata vožnje autobusa, motorist se kretao isto iz mjesta A u B brzinom od 60 km/h, sustigao je autobus i odmah nastavio vožnju u mjesto B. Došavši u mjesto B motorist se zadržao u mjestu 12 minuta i nastavio vožnju natrag u mjesto A, pa se tako susreo s autobusom na udaljenosti 12 km od mjesta B.

Kolika je udaljenost mjesta A i B?

Rezultat.

Udaljenost mjesta A i B je 180 km.

Rješenje Z2. (RADIONICA)



Autobus za 1 sat prijeđe 48 km, pa će za pola sata prijeći 24 km.

Dakle, motociklist će prestići autobus na udaljenosti 24 km od mjesta A *(motociklist je očito krenuo prema mjestu B nakon početka kretanja autobusa).*

Motociklist za 1 sat prijeđe 60 km, pa će nakon 1.5 sati od početka vožnje autobusa biti na udaljenosti 84 km (24+60) od mjesta A.

Motociklist i autobus srest će se na udaljenosti 12 km od mjesta B, pri čemu će autobus još uvijek ići prema mjestu B, dok će se motociklist već vraćati iz mjesta B, zadržavajući se prethodno u mjestu B 12 minuta (1/5 sata).

Pri tome za vrijeme između 2 susreta vrijedi

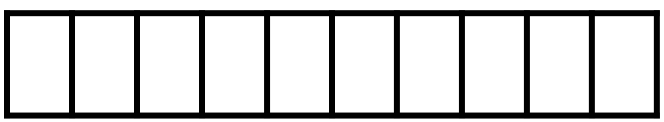
(y-24-12)/48=(y-24+12)+1/5, odakle je

y=180 km.

4. LOGIČKI ZADATCI

Primjer 1.

U deset pravokutnika upisati devet slova, ali tako da u svaki pravokutnik dođe točno jedno slovo. Izostavite složena slova dž, lj, nj.

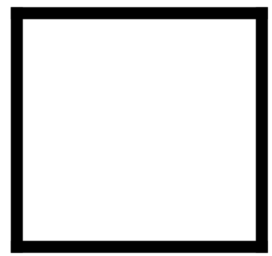


Rješenje 1.

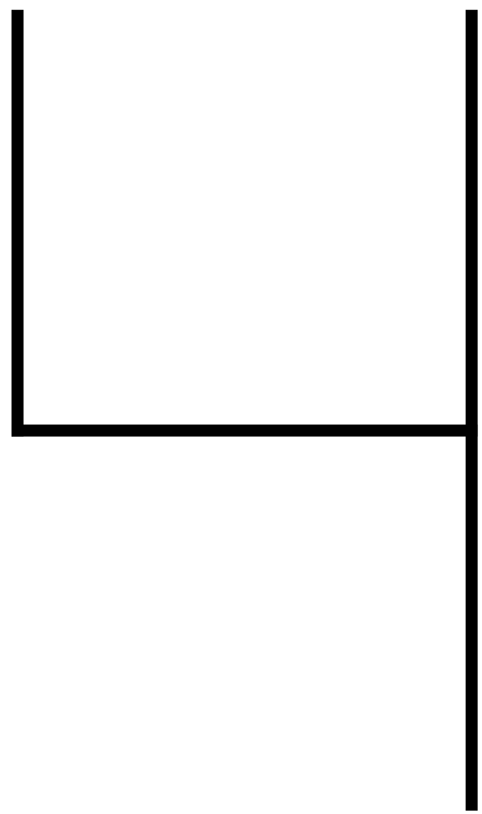
D	E	V	E	T	S	L	O	V	A

Primjer 2.

Pomoću četiri šibice složen je jedan kvadrat. Kako pomicanjen samo jedne šibice od toga jednog kvadrata dobiti četiri?



Rješenje 2.



Primjer 3.

Rekonstruirajte dijeljenje:

$$* * * 1 * : 11 = * 9 *$$

Rješenje 3.

$$\begin{array}{r}
\underline{\quad *9*\cdot 11} \\
9 \\
\underline{*9*} \\
***1*
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\underline{992\cdot 11} \\
992 \\
\underline{992} \\
10912
\end{array} \quad \text{ili} \quad 10912:11=992$$

Primjer 4.

(Regionalno natjecanje 1999., 5. razred OŠ)

Izračunaj vrijednost izraza

$$\frac{\mathbf{T \cdot A \cdot L \cdot E \cdot S}}{\mathbf{P \cdot I \cdot T \cdot A \cdot G \cdot O \cdot R \cdot A}},$$

ako svako slovo predstavlja jednu znamenku (0,1,2, ..., 9) i to tako da različita slova predstavljaju različite, a jednaka slova jednake znamenke.

Rješenje 4.

Budući da je 10 različitih slova, a 10 različitih znamenaka, tada su zastupljene sve znamenke. Budući da nula ne može biti u nazivniku, tada je ona u brojniku, pa je vrijednost razlomka nula.

Primjer 5.

Dva dječaka, Antun i Branko pošli su na izlet. Antun je ponio 5, a Branko 3 kolača. Na izletu im se pridruži i Cvjetko i sva trojica zajedno pojedoše kolače. Za svoju trećinu Cvjetko im plati 8 kuna.

Tebi 5, a meni 3 kune – reče Branko.

Neće biti tako – odgovori Antun.

Kako će Antun i Branko pravedno podijeliti 8 kuna?

Rješenje 5.

Ukupno je bilo 8 kolača, pa je svaki dječak pojeo 8/3 kolača. Antun je ponio 5, a Branko 3 kolača, od čega je svaki pojeo 8/3 kolača, pa Antunu treba platiti za 7/3, a Branku za 1/3 kolača, tj. u omjeru 7:1. Dakle, Antun treba dobiti 7, a Branko 1 kunu.

Primjer 6. (Regionalno natjecanje 1997., 5. razred OŠ)

U istoj zgradi u 4 stana stanuju osobe A, B, C i D. Osobe B, C i D su braća osobe A, a osim njih osoba A nema više braće. U stanu osobe A postoje 2 vrata i 3 prozora.

U stanu osobe B ima toliko vrata koliko u stanu osobe C ima prozora i toliko prozora koliko tamo ima vrata.

U stanovima braće osobe D ima jednak broj vrata i prozora.

Živi li u toj zgradi punica (tašta) osobe A?

Rješenje 6.

U stanu osobe A ima dvoja vrata i tri prozora. S druge strane u stanovima braće osobe D ima jednak broj vrata i prozora, pa zaključujemo da osoba A nije brat nego sestra osobama B, C i D. Zato osoba A nema punicu, pa je odgovor zadatka niječan.

Primjer 7. **(Regionalno natjecanje 1997., 6. razred OŠ)**

Prodavačica prodaje punu korpu jaja. Kupac A prvo kupi polovinu sadržaja korpe i još pola jajeta. Zatim dođe kupac B i kupi polovinu ostatka jaja i još pola jajeta. To isto učine redom kupci C, D i E. Nakon odlaska kupca E, u korpi više nije bilo jaja.

Koliko je jaja bilo u korpi?

Je li prodavačica mogla prodati cijela jaja?

Rješenje 7.

Računanje unatrag.

Iza kupca E nije ostalo ništa jaja. On je uzeo jedno (posljednje) jaje (pola ostatka tj. 0.5 i još pola jajeta). Iza kupca D ostalo je 1 jaje. On je uzeo 2 jajeta (pola ostatka, tj 1.5 i još pola jajeta). Iza kupca C ostalo je 3 jaja. On je uzeo 4 jajeta (pola ostatka 3.5 i još pola jajeta). Iza kupca B ostalo je 7 jaja. On je uzeo 8 jaja (pola ostatka 6.5 i još pola jajeta). Iza kupca A ostalo je 15 jaja. On je uzeo 16 jaja (pola ukupne količine 15.5 i još pola jajeta). Dakle, u korpi je bilo ukupno 31 jaje. Od toga je A uzeo 16, B 8, C 4, D 2 i E 1 jaje. Provjerite to.

Metoda lažne pretpostavke.

Pretpostavimo da je u korpi bilo (na primjer) 15 jaja (neparan broj). Kupac A uzima pola od 15 i još pola jajeta, tj. uzima 8 jaja. Ostaje još u korpi 7 jaja. Kupac B uzima $3.5+0.5=4$ jaja, pa u korpi ostaje 3 jajeta. Kupac C uzima 2 jajeta, a u korpi ostaje 1 jaje. Kupac D uzima $0.5+0.5=1$ jaje i u korpi ne ostaje više ni jedno jaje za kupca E. Dakle, u korpi treba biti $2\cdot(15+0.5)=31$ jaje.

Primjer 8.

Jedna osoba u skupini stavlja prsten na jedan članak na jednome prstu jedne ruke. Označimo osobe brojevima 1,2,3, ..., desnu ruku s 1, a lijevu sa 2, prste na ruci s 1,2,3,4 i 5 (računajući od palca) i članke na prstu s 1, 2 i 3 (računajući od vrha prsta). Sada računajte sljedeće:

Broj osobe koja ima prsten pomnožite s 2, dodajte tomu 5 i sve pomnožite s 5. Rezultatu dodajte broj ruke na kojoj je prsten, sve pomnožite s 10 i tomu dodajte redni broj prsta na kome je prsten. Rezultat pomnožite s 10, tomu dodajte broj članka na kome je prsten i sve to umanjite za 491. Recite rezultat. Ja ću pogoditi osobu kod koje je prsten, na kojoj je ruci, na komu prstu i na komu članku prsta.

Obrazložite odgovor!

Rješenje 8.

Označimo:

a – broj osobe (1,2,3…)

b – broj ruke, 1- desna, 2- lijeva)

c – broj prsta na ruci (1,2,3,4,5 - računajući od palca)

d – broj članka na prstu (1,2,3 - računajući od vrha)

$(((a \cdot 2 + 5) \cdot 5 + b) \cdot 10 + c) \cdot 10 + d - 491 = K$ (konačni rezultat)

$1000a + 100b + 10c + d + 2009 = K$

$\overline{abcd} = K - 2009$

Nagradni zadatak

Točno u 8 sati Smotanko je krenuo u dugu šetnju iz Slavonskoga Broda u Bukovlje, udaljeno 4 km od Slavonskoga Broda.

Nakon 5 minuta za njim je poletio njegov papagaj Smušenko 5 puta većom brzinom od brzine kretanja Smotanka. Pošto je sustigao Smotanka, Smušenko se okrenuo u letu, vratio do Slavonskoga Broda, odmorio 5 minuta i ponovno poletio prema Smotanku. Kada ga je sustigao, Smušenko mu sleti na rame, tu ostane 5 minuta, a nakon toga poleti prema Bukovlju. Nakon 5 minuta leta Smušenko doleti do Pospanka koji je drijemao u hladu, pojede mu dio doručka i nakon ukupnoga zadržavanja od 5 minuta ponovno poleti prema Bukovlju. Sto metara ispred Bukovlja ugleda Zanesenka kako vozi “osmice” biciklom, sleti na bicikl i vozi se sa Zanesenkom 5 minuta. Potom Smušenko ponovno poleti prema Bukovlju i leti amo-tamo od Bukovlja do Smotanka i natrag sve dok Smotanko ne stigne u Bukovlje, odmarajući se na tomu dijelu puta još ukupno 5 minuta.

U međuvremenu Smotanko je pješačio prema Bukovlju, odmarajući se unutar svake trećine puta po 5 minuta, te je stigao u Bukovlje u 9 sati i 15 minuta.

U koje je vrijeme iz Slavonskoga Broda krenuo Šašavko, hodajući unatraške prema Bukovlju dvostruko sporije od kretanja Smotanka, ako je u Bukovlje stigao nakon Smotanka onoliko minuta koliko je ukupno kilometara preletio Smušenko do 9 sati i 15 minuta?

Pretpostavit ćemo da su kretanja Smotanka, Smušenka i Šašavka bila jednolika.

Rješenje nagradnoga zadatka.

Smotanko:

SB	***4 km***	***B***
8:00	**1 sat i 15 minuta**	**9:15**

Odmor: **$3 \cdot 5 = 15$ minuta**

Vrijeme pješačenja: **1 sat**

Prijeđeni put: **4 km**

Brzina: **4 km/h**

Smušenko:

↔

SB	**?**	**B**
8:05	**1 sat i 10 minuta**	**9:15**

Brzina: **$5 \cdot 4 = 20$ km/h**

Odmor: **$5 \cdot 5 = 25$ minuta**

Vrijeme leta:

1 sat 10 minuta - 25 minuta = ¾ sata

Prijeđeni put: **$(3/4) \cdot 20 = 15$ km**

Šašavko:

SB	**4 km**	**B**
?		**9:15+0:15=9:30**

Brzina: **4:2=2 km/h**

Prijeđeni put: **4 km**

Vrijeme pješačenja: **2·1=2 sata**

Odmor: **3·10=30 minuta**

<u>Vrijeme polaska: 7 sati</u>

5. DIRICHLETOV PRINCIP

("princip zečeva i kaveza",

"princip kuglica i kutija",…)

[Pierre Gustave Lejeune Dirichlet, 1805.-1859.]

Dirichletov princip pokazuje postojanje objekata koji imaju jedno ili više unaprijed danih svojstava, ali ne pokazuje kako se to konkretno ostvaruje.

Ako *n+1 zeca raspoređujemo u n praznih kaveza, tada će postojati barem jedan kavez u kome su smještena barem 2 zeca.*

Općenito:

Ako nk+1 zeca raspoređujemo u n kaveza, tada postoji barem jedan kavez u kome su smješteni barem k+1 zec.

Primjer 1.

(Županijsko natjecanje 1995., 7. razred OŠ)

U jednoj županiji na općinskom natjecanju iz matematike od 4. do 8. razreda sudjelovalo je 1995 učenika. Svaki natjecatelj rođen je jedne od ovih godina: 1980., 1981., 1982., 1983. ili 1984.

(a) Dokaži da postoje barem dva učenika rođena istoga dana iste godine.

(b) Dokaži da postoji barem 6 natjecatelja koji su rođeni istoga dana i mjeseca.

(a) ***Rješenje.***

Budući da su 1980. i 1984. bile prijestupne godine, zaključujemo da u pet navedenih godina ima 1827 dana. Kako je na natjecanju sudjelovalo 1995 natjecatelja, izlazi da su barem dva natjecatelja rođena istoga dana iste godine.

(b)

Prema nadnevku rođenja natjecatelje možemo razvrstati u 366 skupina. Kako je $1995=366\cdot 5+165$, tada prema Dirichletovom principu postoji barem jedna skupina s najmanje 6 natjecatelja, tj. najmanje 6 natjecatelja je rođeno istoga dana i mjeseca.

Primjer 2.

(Državno natjecanje 2008., 2. razred SŠ A i B)

Dano je 10 složenih prirodnih brojeva manjih od 840. Dokaži da među njima postoje barem dva broja koja nisu relativno prosta.

Rješenje.

Kako je $29^2=841$, tada je svaki složeni broj, koji je manji od 840, djeljiv barem s jednim prostim brojem koji nije veći od 23. To su prosti brojevi: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 i 23 (ukupno 9 prostih brojeva). Budući da ima 10 složenih brojeva, a 9 prostih brojeva ≤ 23, tada po Dirichletovom principu postoje barem dva složena broja koja su djeljiva istim od 9 navedenih prostih brojeva.

Primjer 3.

Na nekom šahovskom turniru sudjeluje 8 šahista. Svaki od njih igra sa svakim od preostalih 7 šahista po jednu partiju šaha. Dokazati da u svakome trenutku postoje barem dva šahista koja su odigrala jednak broj partija šaha.

Rješenje.

Ako postoji šahist koji je već odigrao svih 7 partija šaha, tada ne postoji šahist koji još nije odigrao ni jednu partiju šaha. Broj odigranih partija šaha svakoga šahista tada može biti 1,2,…,6 ili 7, tj. ukupno 7 mogućnosti. Budući da je 8 šahista, a 7 mogućih brojeva odigranih partija šaha, tada po Dirichletovom principu barem dva šahista imaju jednak broj odigranih partija šaha.

Ako postoji šahist koji nije odigrao ni jednu partiju šaha, tada ne postoji šahist koji je odigrao svih 7 partija šaha. Mogući broj odigranih partija šaha svakoga šahista sada je 0,1,…,5 ili 6, tj. ukupno 7 mogućnosti. Slučaj se svodi na prethodni slučaj.

Zadatak 1.

(Općinsko natjecanje 1998., 1. razred SŠ)

U konveksnom mnogokutu s 1998 stranica duljine su stranica prirodni brojevi. Opseg mnogokuta je 1997000. Dokažite da barem dvije stranice mnogokuta imaju jednake duljine.

Zadatak 2.

Dokazati da između 11 proizvoljno odabranih prirodnih brojeva uvijek postoji dva broja čija je razlika djeljiva sa 10.

Rješenje Z2 (RADIONICA)

Ostaci dijeljenja prirodnih brojeva sa 10 mogu biti: 0,1,2,…,9 (ukupno 10 različitih ostataka).

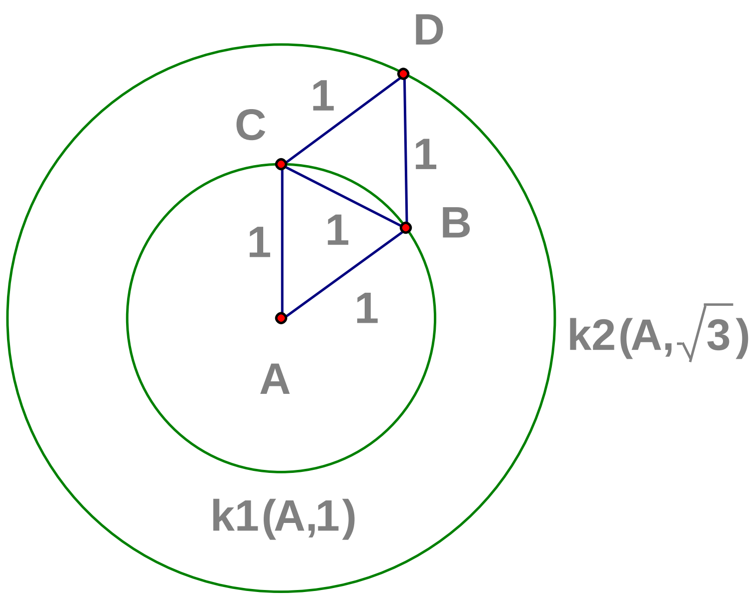
Budući da je 11 prirodnih brojeva, a 10 različita ostatka, tada po Dirichletovom principu među njima postoje bar dva broja s istim ostatkom. Razlika tih brojeva je djeljiva sa 10.

Zadatak 3.

(Republičko natjecanje RH 1989., 4. razred SŠ)

Svaka točka ravnine obojena je jednom od 3 boje: crvenom, bijelom ili plavom. Dokazati da postoje dvije točke na međusobnoj udaljenosti 1 cm, koje su obojene istom bojom.

Rješenje Z3 (RADIONICA)



Ne smanjujući općenitost, pretpostavimo da je točka A obojena crvenom bojom.

Nadopunimo sliku.

Ako je cijela kružnica k1 obojena istom bojom, tada su točke B i C tražene točke. Neka su točke B i C različitih boja.

Ako je bilo koja točka na kružnici k1 crvena točka, tada su ta točka i točka A tražene točke. Neka na kružnici k1 nema crvenih točaka.

Tada su te točke bijele ili plave boje. Ako su B i C iste boje (bijele ili plave), tada su B i C tražene točke. Ne smanjujući općenitost pretpostavimo da je B bijela, a C plava točka.

Ako je točka D bijela točka, tada su B i D, tražene točke, a ako je plava točka, tada su C i D tražene točke.

Ako su sve točke kružnice k2 crvene boje, tada na toj kružnici možemo pronaći crvenu točku D1 na udaljenosti 1 cm od točke D, pa su D i D1 tražene točke. Dakle, sve točke kružnice k2 ne mogu biti crvene.

Imamo sljedeće činjenice: A je crvena točka, točke kružnice k1 obojane su bijelom ili plavom bojom, a sve točke kružnice k2 nisu crvene.

Provedimo sada ovu raspravu:

Rotirajmo romb ABDC oko točke A dok točka D (na kružnici k2) ne bude bijela ili plava točka. Neka je točka D bijela točka. Ako je B ili C bijela točka, tada su D i B, odnosno D i C tražene točke. Ako su B i C obje plave točke, tada su one tražene točke.

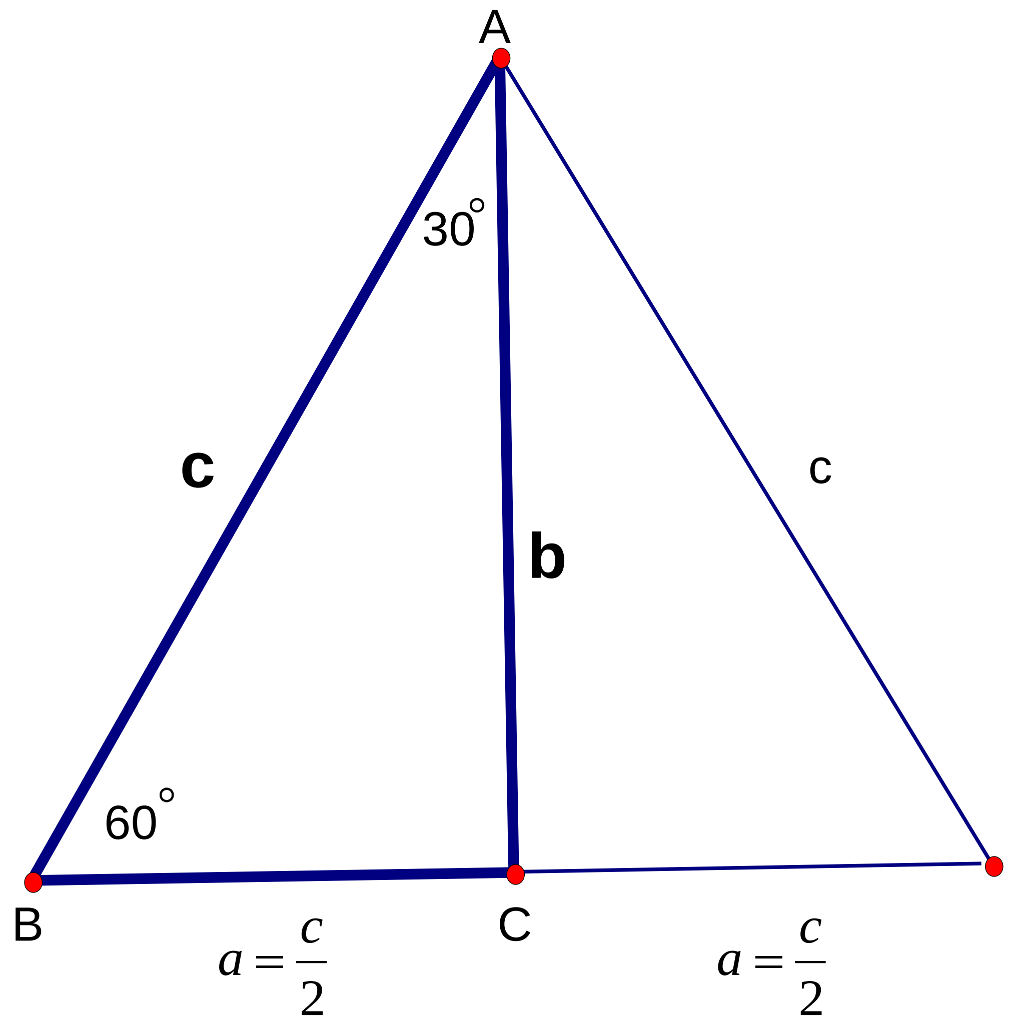
Analogno zaključujemo ako je D plava točka.

Time je tvrdnja zadatka dokazana.

6. METODA POMOĆNIH LIKOVA U PLANIMETRIJSKIM ZADATCIMA

LEMA 1.

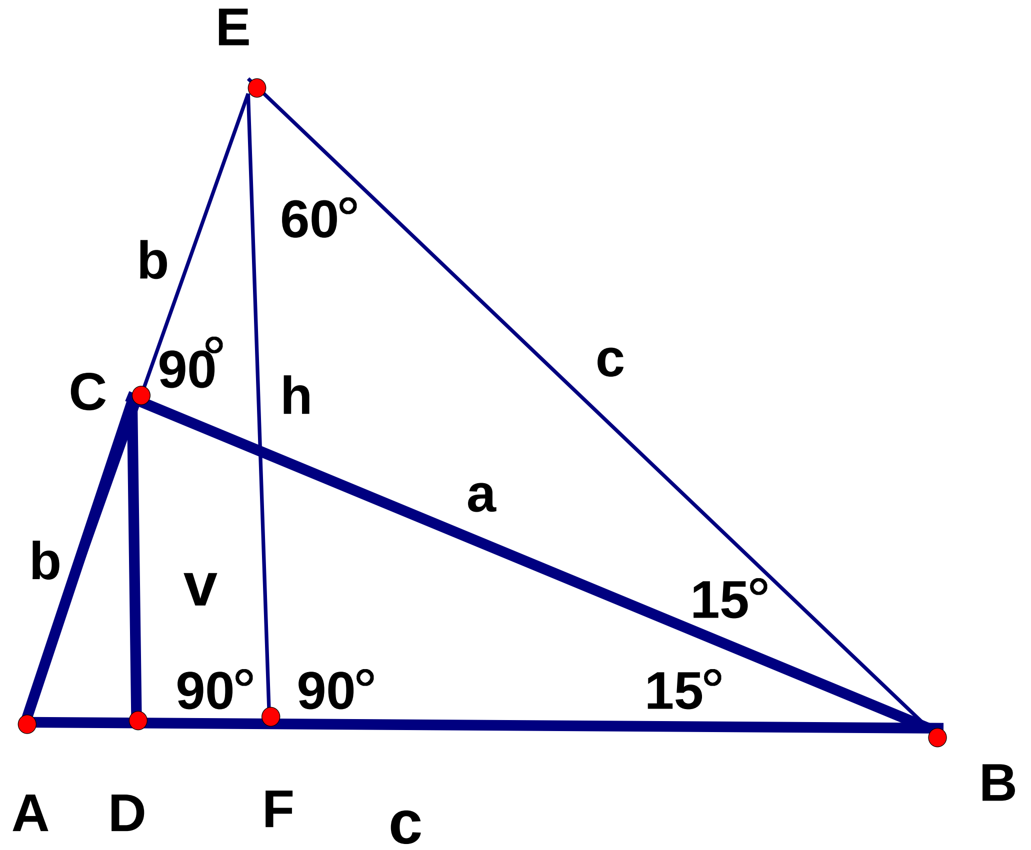
Duljina katete pravokutnoga trokuta s kutovima 30 i 60 koja se nalazi nasuprot kutu od 30 jednaka je polovini duljine hipotenuze.



A
30°
c
c
b
60°
B
C
$a = \frac{c}{2}$
$a = \frac{c}{2}$

LEMA 2.

Duljina visine na hipotenuzu pravokutnoga trokuta s kutovima 75 i 15 jednaka je četvrtini duljine hipotenuze.

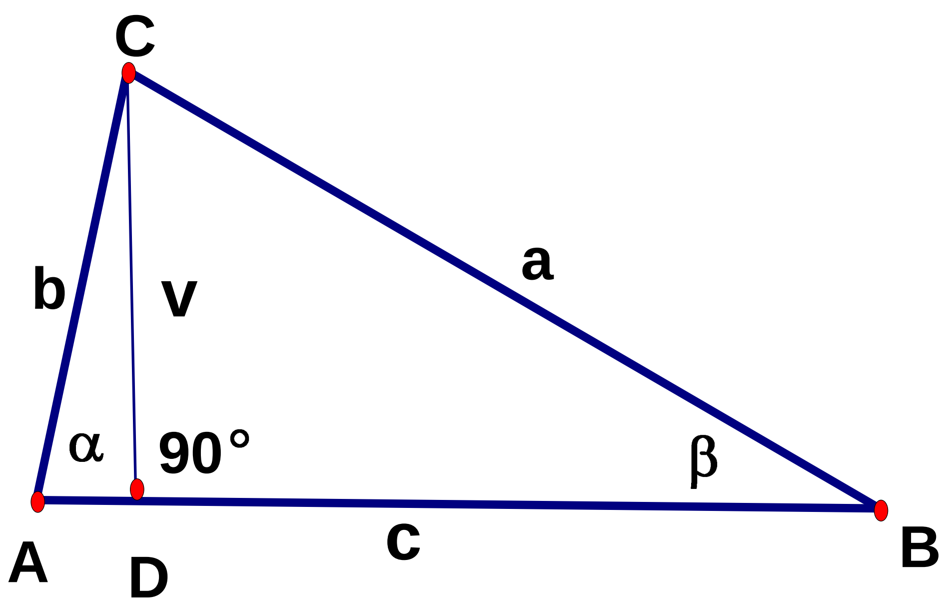


$$\Delta\,\mathrm{BEF} : h = \frac{c}{2} \qquad \Delta\,\mathrm{EAF} : v = \frac{h}{2} \qquad v = \frac{c}{4}$$

Primjer 1.

(Državno natjecanje 2010., 7. r. OŠ)

U pravokutnome trokutu s duljinom hipotenuze c veličine šiljastih kutova odnose se kao 1:5. Izrazi površinu toga trokuta pomoću duljine c hipotenuze.



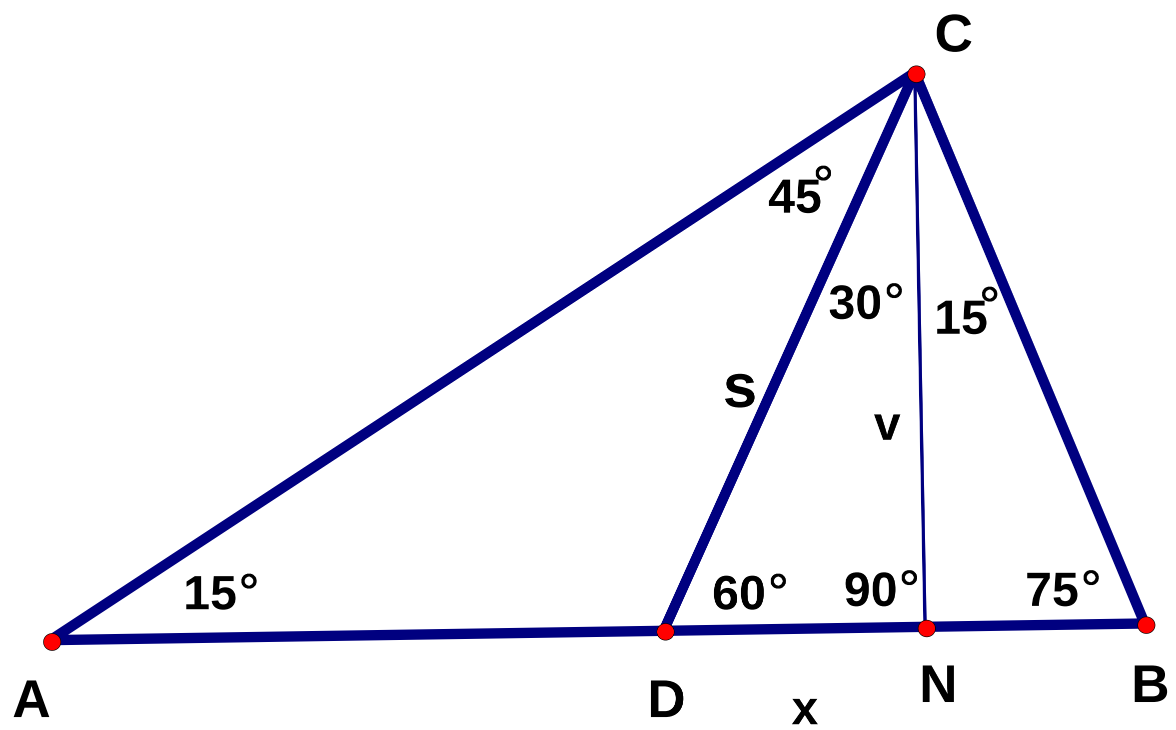
Iz $\alpha+\beta=90$ i iz uvjeta zadatka $\alpha=5\beta$ slijedi $\alpha=75$ i $\beta=15$.

Za površinu ΔABC tada dobivamo $P=c\cdot(c/4)/2=c^2/8$.

Primjer 2.

(Općinsko/školsko natjecanje 2009., 3. razred SŠ B)

Duljina hipotenuze pravokutnoga trokuta je 15 cm, a jedan njegov kut je 15 . Izračunaj duljinu odreska simetrale pravoga kuta koji je unutar trokuta.



c = 15 cm

ΔABC: **v=c/4=15/4 cm**

ΔCDN: **x=s/2**

$$s^2 = v^2 + x^2,\ s = \frac{5}{2}\sqrt{3}\ cm.$$

Zadatak 1.

(Republičko natjecanje RH 1989., 7. razred OŠ)

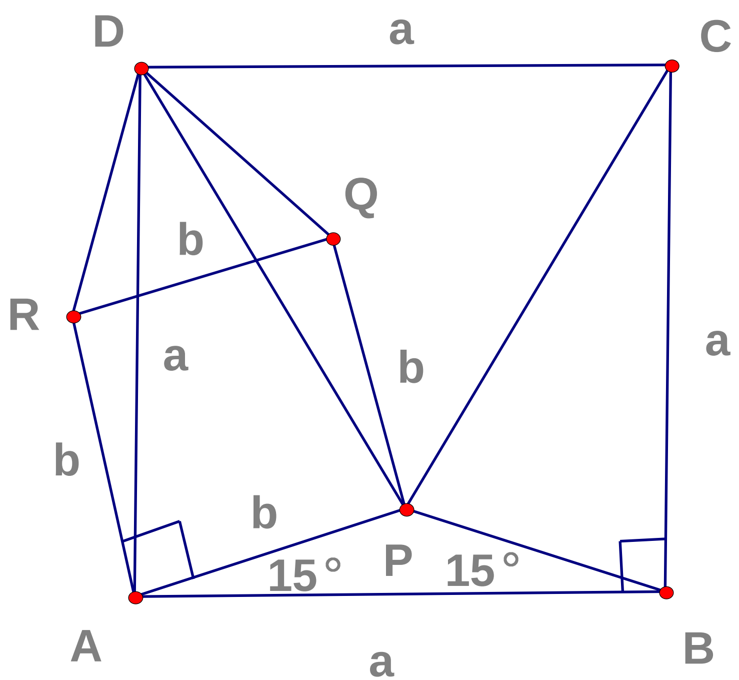
Dan je kvadrat ABCD i točka M unutar kvadrata takva da je $\angle ABP = \angle PAB = 15^\circ$.

Dokazati da je trokut ΔPCD jednakostraničan.

Uputa.

Riješite zadatak kada je pomoćni lik pravokutan trokut s kutovima 30º i 60º, pravokutan trokut s kutovima 15º i 75º, jednakostraničan trokut, kvadrat, trapez,...

Rješenje Z1 (RADIONICA)



Pomoćni lik je kvadrat.

Neka su ispunjeni uvjeti zadatka.

Tada je trokut ΔCDP jednakokračan.

Konstruirajmo kvadrat APQR.

Tada su trokuti ΔADR i ΔABP sukladni.

(IADI= IABI=a, IARI=IAPI=b,

∠DAR= ∠ BAP=15º (*kutovi s okomitim kracima*)),

pa je IDRI=IARI=b,

∠RDA= ∠RAD=15º i

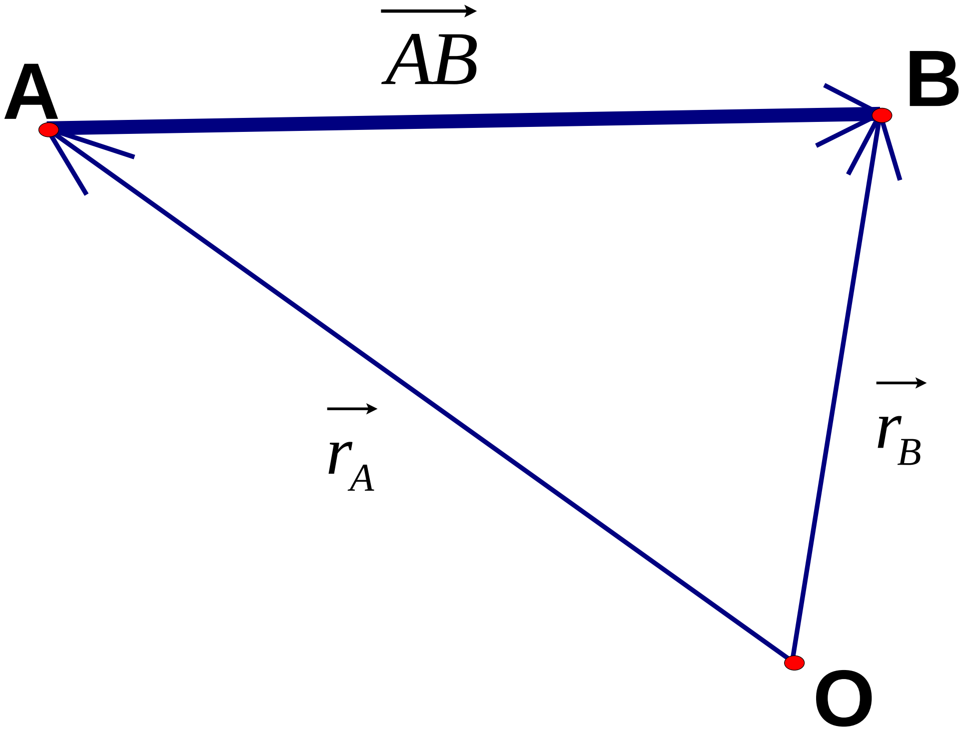
∠ARD=180º-2·15º=150º.

Stoga je $\angle$ QRD=150º-90º=60º, pa je (zbog IQRI=IRDI=b) ΔRQD jednakostraničan trokut, tj. $\angle$ RQD=60º i DQ = PQ =b, pa je $\angle$ PQD=90º+60º=150º.

Dalje slijedi da su trokuti ΔDPQ i ΔADR sukladni (PQ = AR =b, DQ = DR =b, $\angle$PQD = $\angle$DRA=150º), pa je DP = AD =a, zbog čega je ΔCDP jednakostraničan trokut.

7. PRIMJENA RADIJUS-VEKTORA I KOORDINATNE METODE U PLANIMETRIJSKIM ZADATCIMA

- **Vektori koji imaju početak u ishodištu zovu se radijus-vektori**.
- **Svaki se vektor u ravnini može prikazati kao razlika radijus-vektora svoje završne i radijus-vektora svoje početne točke.**



$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

Dva su pravca AB i CD paralelna akko za njihove koeficijente smjera k_{AB} i k_{CD} vrijedi $k_{AB}=k_{CD}$.

Dva su pravca AB i CD okomita akko za njihove koeficijente smjera k_{AB} i k_{CD} vrijedi $k_{AB} \cdot k_{CD} = -1$.

Primjer 1.
(Državno natjecanje 1996., 1. razred SŠ)

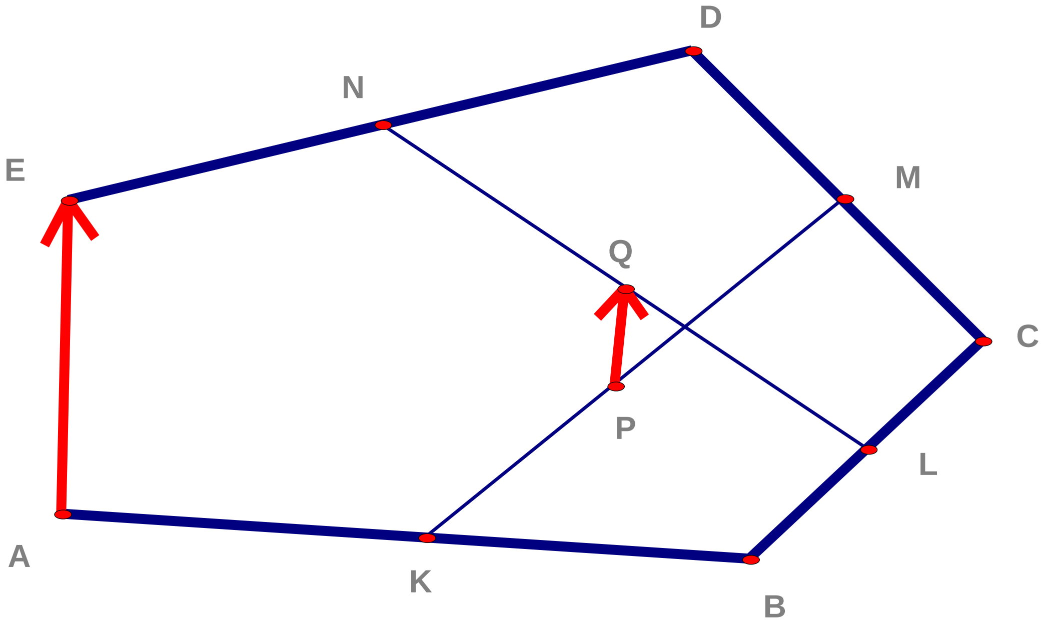
Točke K, L, M, N redom su polovišta stranica

$$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$$

peterokuta ABCDE, a P i Q redom su polovišta dužina $\overline{KM}$ i $\overline{LN}$.

Dokazati da je

$$\overline{PQ} \parallel \overline{AE} \text{ i } |PQ| = \frac{|AE|}{4}.$$



Dokazat ćemo da je: $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{\overrightarrow{AE}}{4}$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{r_Q} - \overrightarrow{r_P} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_L} + \overrightarrow{r_N}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_K} + \overrightarrow{r_M}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}\right)\right] =$$

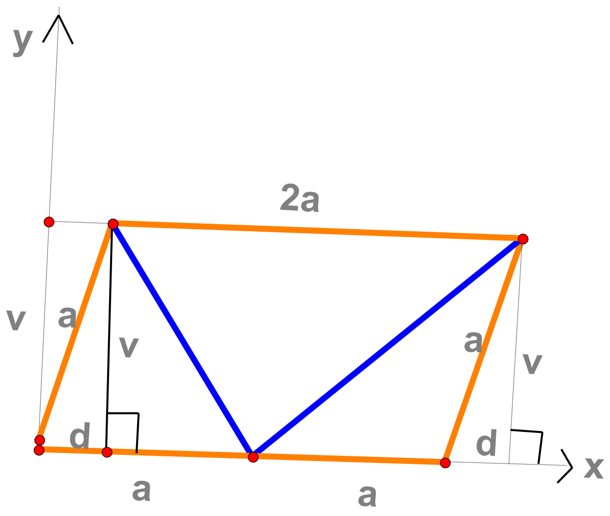
$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{r_E} - \overrightarrow{r_A}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}.$$

Primjer 2.
(Županijsko natjecanje 1994., 7. razred OŠ)

Dan je paralelogram ABCD, pri čemu je |AB|=2|BC|. Ako je točka M polovište stranice $\overline{AB}$ onda je $\overline{CM} \perp \overline{DM}$.

Dokažite!

Neka je $A(0,0)$, $B(2a,0)$, $C(d+2a,v)$ i $D(d,v)$.



Tada je $v^2=a^2-d^2$ i $M(a,0)$, pa je

$k_{MC}=v/(d+a)$ i

$k_{MD}=v/(d-a)$.

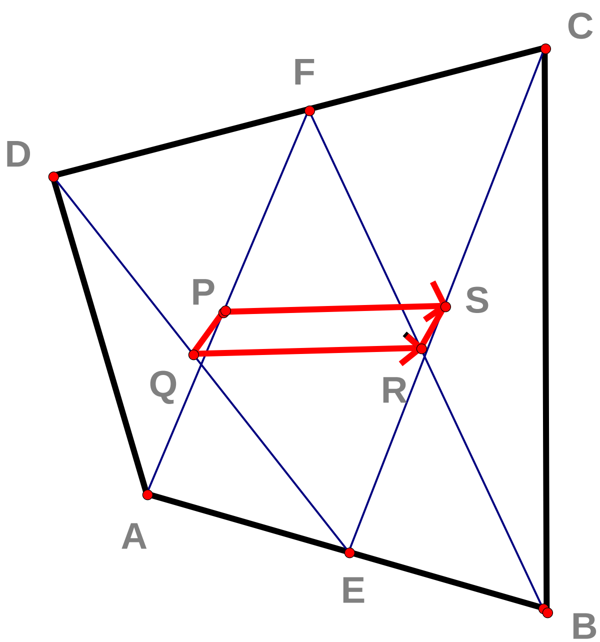
Iz $k_{MC} \cdot k_{MD}=v^2/(d^2-a^2)=v^2/(-v^2)=-1$ slijedi

$$\overline{CM} \perp \overline{DM}.$$

Zadatak 1.

Točke E i F redom su središta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ četverokuta ABCD, a točke P, Q, R i S redom su središta dužina $\overline{AF}$, $\overline{ED}$, $\overline{BF}$ i $\overline{EC}$. Dokazati da je četverokut PQRS paralelogram.

Rješenje Z1 (RADIONICA)



$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{r_S} - \overrightarrow{r_P}$$

$$\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_C}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_F}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}\right) + \overrightarrow{r_C}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_A} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}\right)$$

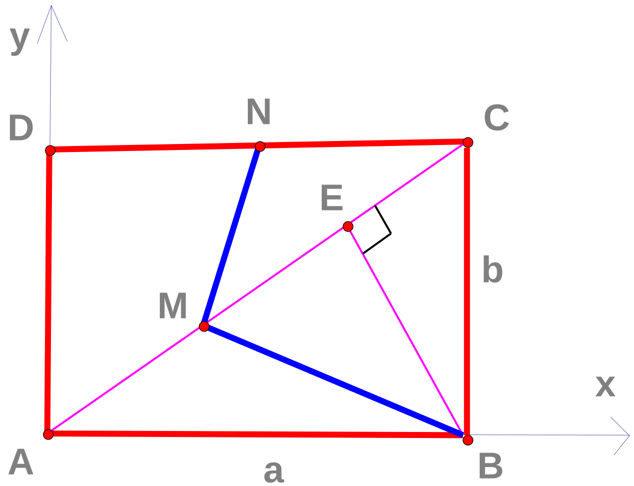
Isto se dobije i za $\overrightarrow{QR}$, pa iz $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}$ slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak 2.

(Županijsko natjecanje 1999., 8. razred OŠ)

U pravokutniku ABCD točka E je nožište okomice spuštene iz vrha B na dijagonalu $\overline{AC}$. Ako je točka M polovište dužine $\overline{AE}$, a točka N polovište stranice $\overline{CD}$, dokažite da je $<BMN=90$.

Rješenje Z2 (RADIONICA)



Neka je A(0,0), B(a,0), C(a,b),D(0,b). Tada je N(a/2,b), pa imamo

AC … $y = (b/a)x$, $k_{AC} = b/a$

$k_{BE} = -1/k_{AC} = -a/b$

BE … $y = -(a/b)x + a^2/b$

$E(a^3/(a^2+b^2),\ a^2b/(a^2+b^2))$

$M(a^3/2(a^2+b^2),\ a^2b/2(a^2+b^2))$

$k_{MN} = (a^2+2b^2)/ab$

$k_{MB} = -ab/\ (a^2+2b^2)$

$k_{MN} \cdot k_{MB} = -1$

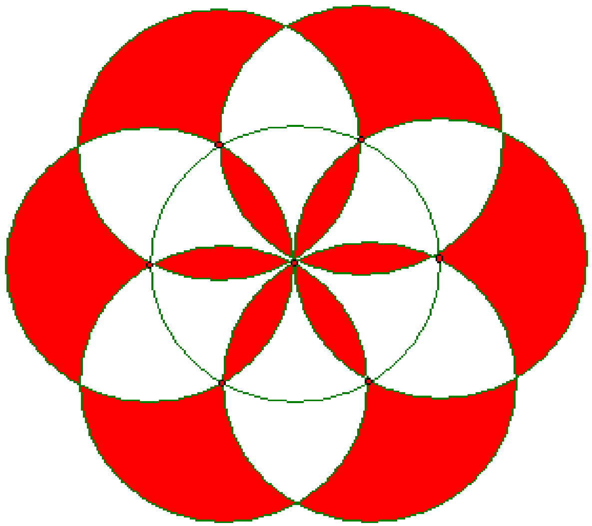
$\angle BMN = 90^{o}$

8. OPSEG I POVRŠINA LIKA OMEĐENA KRUŽNIM LUKOVIMA

$o_k=2r\pi,\ p_k=r^2\pi$	krug
$l=r\pi\alpha/180,\ o_{ki}=2r+l,\ p_{ki}=lr/2=r^2\pi\alpha/360$	kružni isječak
$o_{ko}=t+l,\ p_{ko}=p_{ki}-p_{\Delta}$	kružni odsječak
$o_{kv}=2\pi(R+r),\ p_{kv}=\pi(R-r)(R+r)$	kružni vijenac
$L=R\pi\alpha/180,\ l=r\pi\alpha/180,$ $o_{ikv}=2(R-r)+L+l,$ $p_{ikv}=(LR-lr)/2=\pi\alpha(R-r)(R+r)/360$	isječak kružnog vijenca

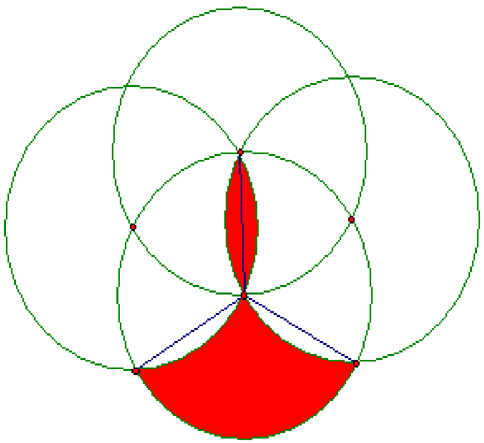
Primjer 1.

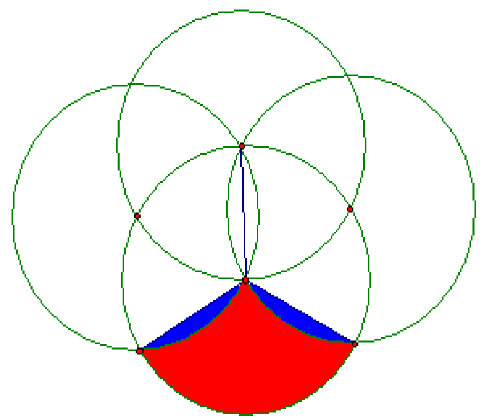
Izračunajte opseg i površinu obojanoga lika ako je duljina polumjera svih kružnica jednaka *a*.



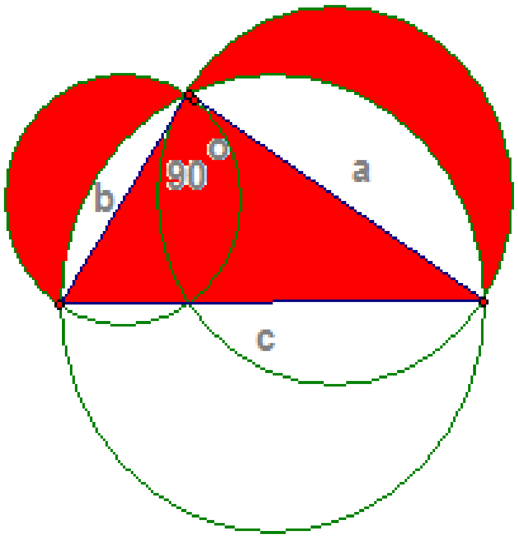
$o = 6 \cdot o_{k\ (r = a)} = 6 \cdot 2a\pi = 12a\pi.$

$P = 6 \cdot p_{ki(r=a,\alpha=120^{\circ})} = 2 \cdot p_{\ k(r=a)} = 2a^2\pi.$





Primjer 2.



Izračunajte opseg i površinu obojanoga lika.

$$O = \frac{1}{2}Ok_{(r=\frac{a}{2})} + \frac{1}{2}Ok_{(r=\frac{b}{2})} + \frac{1}{2}Ok_{(r=\frac{c}{2})} + O\Delta(a,b,c) =$$

$$= \frac{a\pi}{2} + \frac{b\pi}{2} + \frac{c\pi}{2} + a + b + c$$

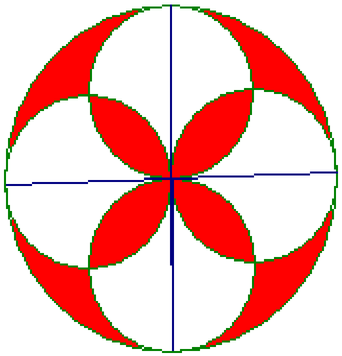
$$= (\frac{\pi}{2} + 1)(a + b + c)$$

$$P = \frac{1}{2}Pk_{(r=\frac{a}{2})} + \frac{1}{2}Pk_{(r=\frac{b}{2})} - \frac{1}{2}Pk_{(r=\frac{c}{2})} + 2P\Delta(a,b,c) =$$

$$= \frac{a^2\pi}{8} + \frac{b^2\pi}{8} - \frac{c^2\pi}{2} + ab$$

$$= ab = 2P\Delta(a,b,c)$$

Zadatak 1.



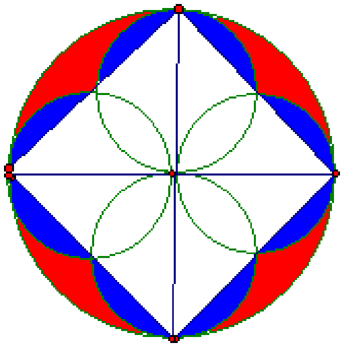
Odredite opseg i površinu obojanoga lika ako je promjer manjega kruga jednak *a*, a većega 2*a*.

Rezultat.

$O = 6a\pi$

$P = (\pi - 2)a^2$

Rješenje Z1 (RADIONICA)



$o = 4 \cdot o_k \ _{(r = a/2)} + o_k \ _{(r = a)}$

$= 4 \cdot a\pi + 2a\pi$

$= 6a\pi$

$p = p_k - p = a^2\pi - (2a)^2/2$

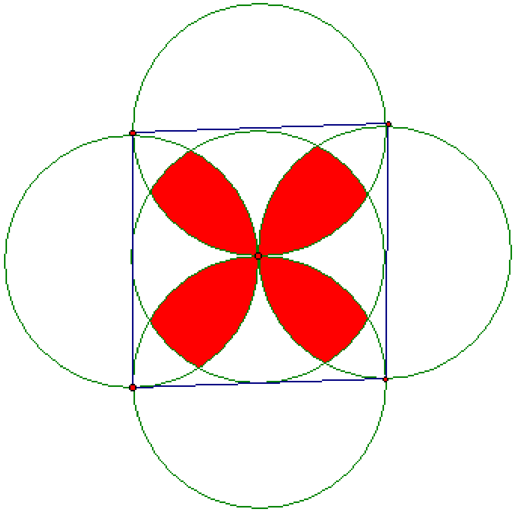
$= a^2\pi - 2a^2$

$= (\pi - 2)a^2$

Zadatak 2.

(Državno natjecanje iz matematike 2007., 1. razred SŠ B)

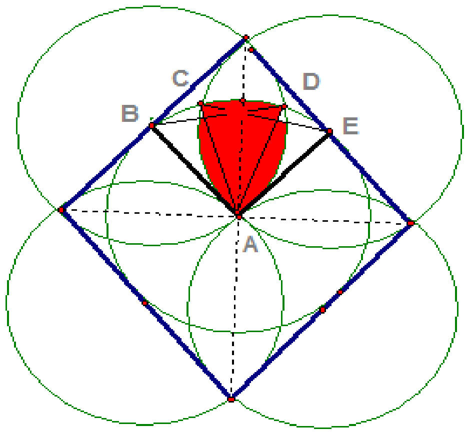
Kvadratu stranice duljine 1 upisana je kružnica, a nad njegovim stranicama kao promjerima konstruirane su 4 kružnice. Izračunaj opseg “propelera” na slici.



Rezultat.

o=10π/3

Rješenje Z2 (RADIONICA)



Uzmimo oznake kao na slici.

Zbog <DAC=30º,

<EAC=<DAB=60º i

AC = AD = BA = BD = EA = EC =1/2 slijedi

$o=4\cdot(2\cdot l_{(r=1/2,\ \alpha=60º)}+l_{(r=1/2,\ \alpha=30º)})=$

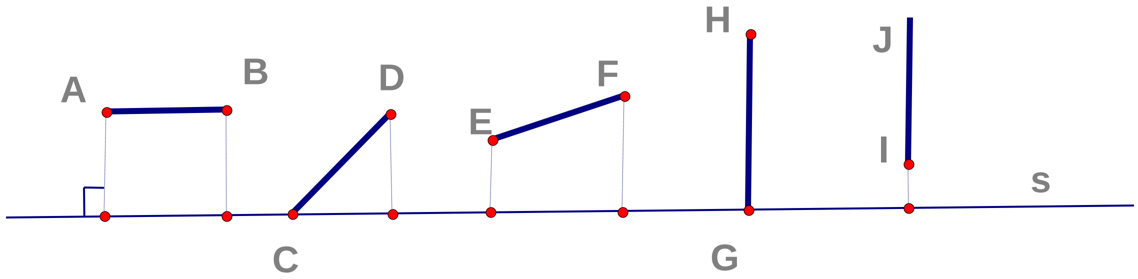
$=4\cdot(\pi/3+\pi/12)$

$=10\pi/3$

9. OPLOŠJE I VOLUMEN ROTACIJSKOGA TIJELA

$P_v=2r\pi v$, $B_v=r^2\pi$, $O_v=2r\pi(r+v)$, $V_v=r^2\pi v$	uspravni kružni valjak
$P_s=r\pi s$, $B_s=r^2\pi$, $O_s=r\pi(r+s)$, $V_s=r^2\pi v/3$	uspravni kružni stožac
$Pks=\pi s(R+r)$, $Bks=R^2\pi$, $B\ ks=r^2\pi$, $Oks=\pi(R^2+r^2+s(R+r))$, $Vks=\pi v(R^2+r^2+Rr)$	uspravni krnji kružni stožac
$Ok=4r^2\pi$, $Vk=4r^3\pi/3$	kugla

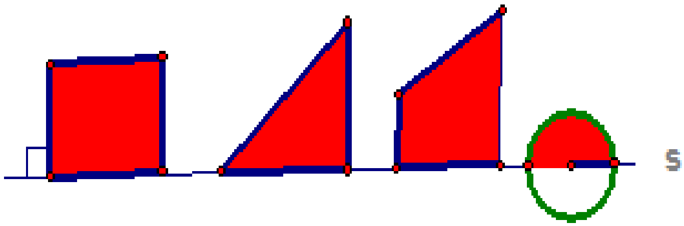
Zadatak 1. Što opisuje zadana dužina rotacijom oko zadane osi s?



Rezultat.

Redom dobivamo: plašt uspravnoga kružnog valjka, plašt uspravnoga kružnog stošca, plašt uspravnoga krnjeg kružnog stošca, krug i kružni vijenac.

Zadatak 2. Što opisuje zadani lik raotacijom oko zadane osi s?



Rezultat.

Redom dobivamo:

uspravni kružni valjak,

uspravni kružni stožac,

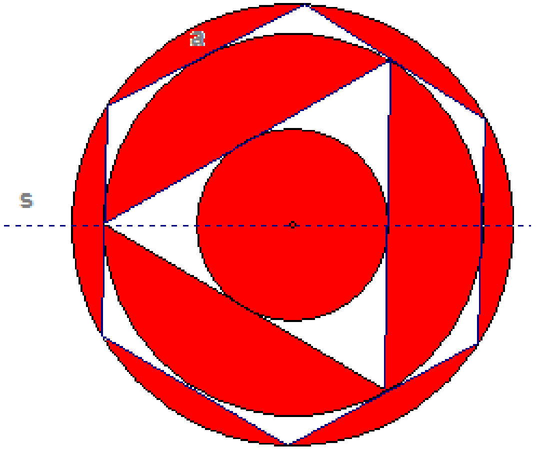
uspravni kružni krnji stožac i

kuglu

Primjer 1.

(Općinsko/gradsko natjecanje 1998., 3. razred SŠ)

Naći oplošje i volumen (obujam) rotacijskoga tijela koje nastaje rotacijom zadanoga (obojenog) lika oko zadane osi s.



$$O=O_{k(r=a)}+2P_{ks(R=a,r=a/2,v=a\sqrt{3}/2,s=a)}+2p_{k(r=a/2)}+$$

$$+O_{k(r=a\sqrt{3}/2)}+O_{s(r=3a/4,v=3a\sqrt{3}/4,s=3a/2)}+O_{k(r=a\sqrt{3}/4)}=$$

$$=195\pi a^2/16.$$

$$V=V_{k(r=a)}-2V_{ks(R=a,r=a/2,v=a\sqrt{3}/2,s=a)}+$$

$$+V_{k(r=a\sqrt{3}/2)}-V_{s(r=3a/4,v=3a\sqrt{3}/4,s=3a/2)}+V_{k(r=a\sqrt{3}/4)}=$$

$$=\pi(4/3-31\sqrt{3}/192)a^3.$$

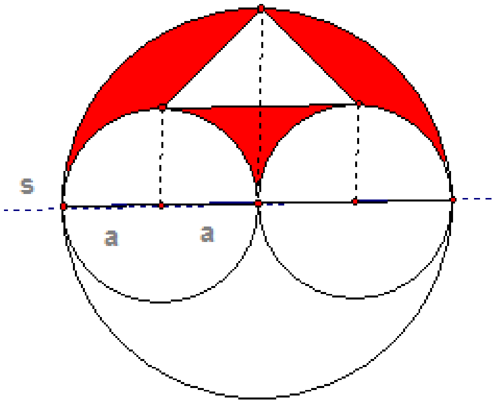
Zadatak 3.

Odredite oplošje i volumen (obujam) rotacijskoga tijela nastalog rotacijom zadanoga (obojenog) lika oko zadane osi s.

Rezultat.

$O=2(14+3\sqrt{2})\pi a^2$

$V=16\pi a^3/3$



Rješenje Z3 (RADIONICA)

$$O = O_{k(r=a)} + 2O_{k(r=a)} + P_{v(r=a,\ v=2a)} + 2P_{ks(R=2a,\ r=a,\ v=a,\ s=a\sqrt{2})}$$

$$= 2(14 + 3\sqrt{2})\pi a^2$$

$$V = O = V_{k(r=a)} - 2V_{k(r=a)} + V_{v(r=a,\ v=2a)} - 2V_{ks(R=2a,\ r=a,\ v=a,\ s=a\sqrt{2})}$$

$$= 16\pi a^3/3$$

10. FUNKCIJA “APSOLUTNA VRIJEDNOST”

Funkciju *apsolutna vrijednost* definiramo kao funkciju:

$$| \ | : R \to R_0^+, x \mapsto |x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ x, x > 0 \end{cases}$$

Za ovu funkciju vrijedi:

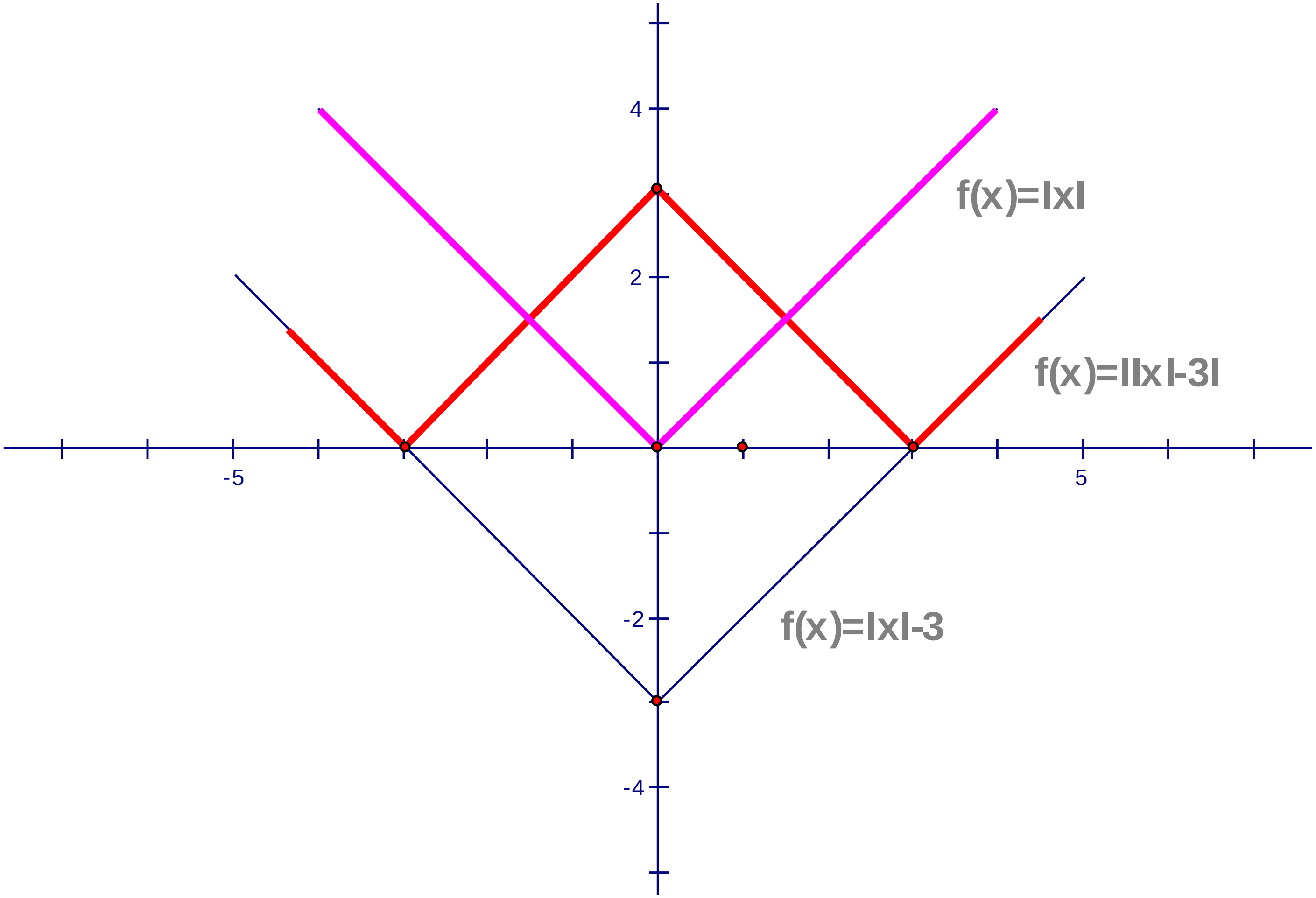
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

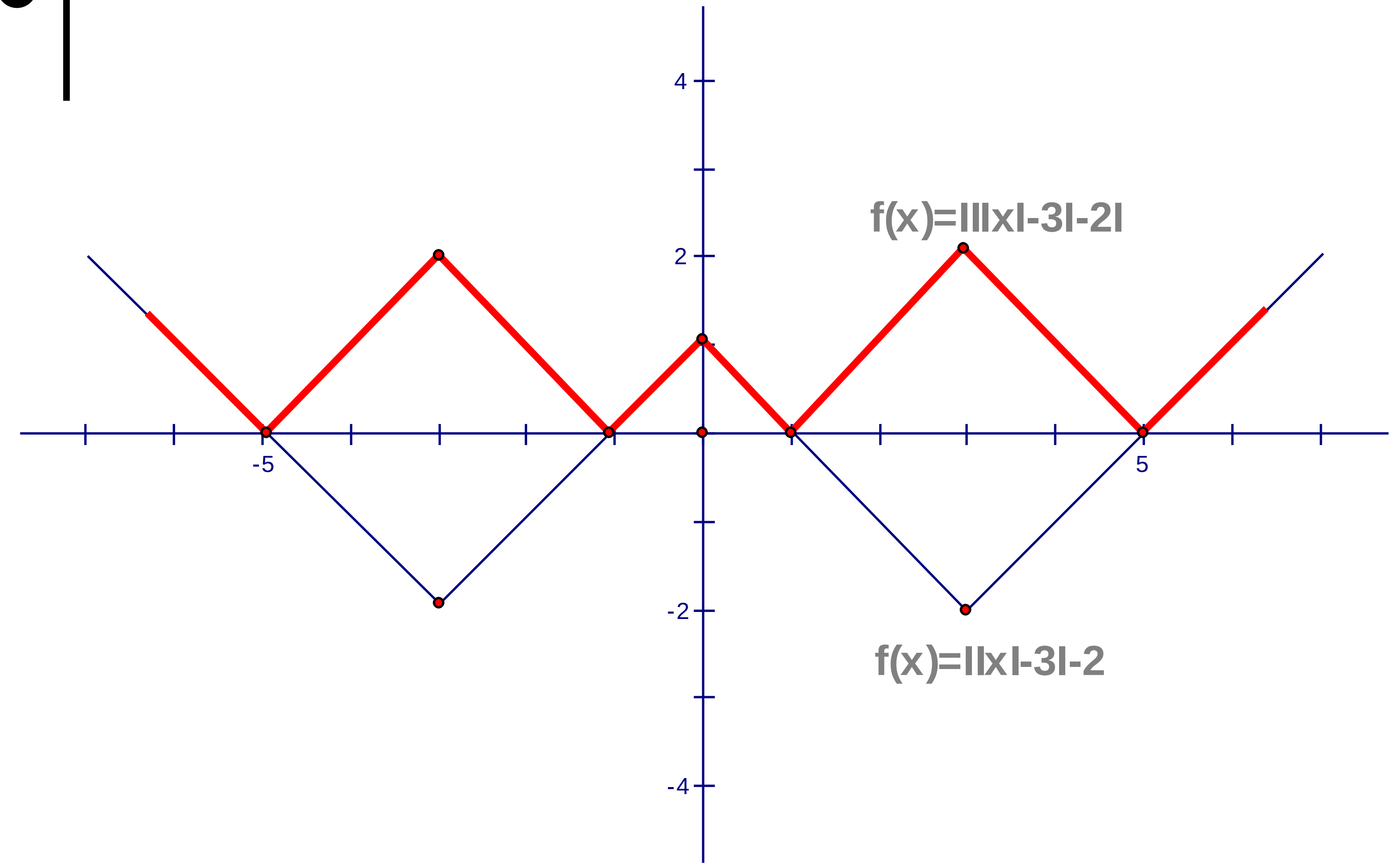
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

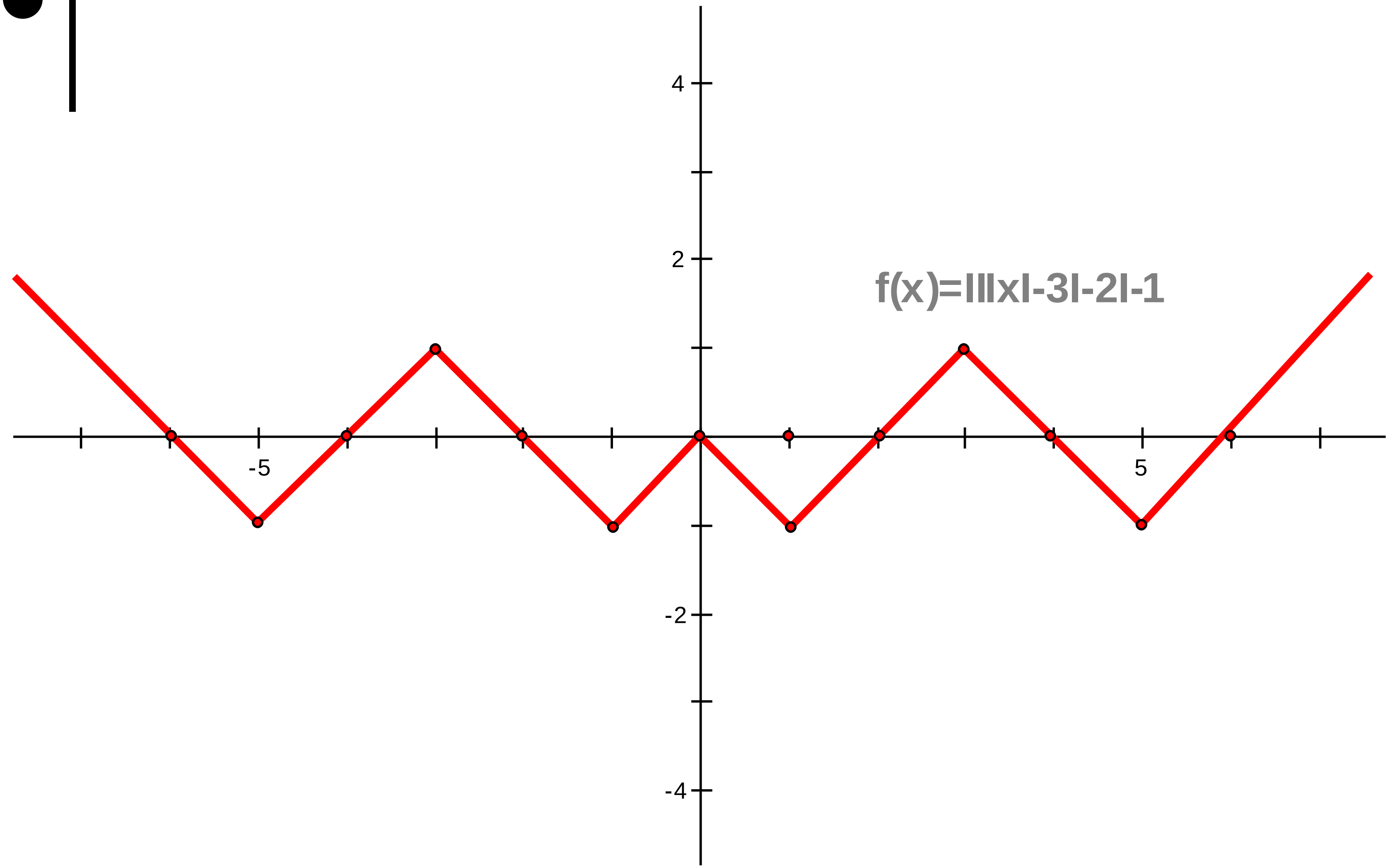
Primjer 1.

Nacrtajte graf funkcije f(x)=|||x|-3|-2|-1, x∈R.





4
2
-2
-4
-5
5
f(x)=IIIxI-3I-2I
f(x)=IIxI-3I-2



4
2
-2
-4
-5
5
f(x)=lllxl-3l-2l-1

Primjer 2.

Riješite jednadžbu $|||x|-3|-2|-1=0$, $x \in R$.

Grafička metoda.

Prema prethodnomu primjeru nultočke funkcije su

$$x \in \{-6,-4,-2,0,2,4,6\}.$$

Primjer 3.

Riješite nejednadžbu $|||x|-3|-2|-1 \leq 0$, $x \in R$.

Grafička metoda.

Prema primjeru 1. rješenja nejednadžbe su

$$x \in [-6,-4] \cup [-2,2] \cup [4,6].$$

Primjer 4.

Riješite jednadžbu |3-x|+1=|x|-2x, $x \in R$.

Metoda razlikovanja slučajeva.

$3-x=0 \Rightarrow x=3$, $x=0$

Interval	$(-\infty, 0)$		$[0, 3]$		$(3, \infty)$
x		0		3	
3-x	+	+	+	0	-
x	-	0	+	+	+
$\|3-x\|+1=\|x\|-2x$	$3-x+1=-x-2x$		$3-x+1=x-2x$		$-(3-x)+1=x-2x$
"Rješenja"	$x = -2$		$0 \cdot x=-4$		$x = 1$
Rješenja	$x = -2$		Φ		Φ

Dakle, jedino je rješenje zadane jednadžbe $x= -2$.

Zadatak 1.

Nacrtajte grafove funkcija
$f_0(x)=|x|$, $f_1(x)=|x-3|$, $f_2(x)=|x|+2$ i $F(x)=|x-3|+2$, $x\in R$, i usporedite ih.

Rezultat.

Graf funkcije $f_1(x)$ nastaje translacijom grafa funkcije $f_0(x)$ u smjeru osi x za 3.

Graf funkcije $f_2(x)$ nastaje translacijom grafa funkcije $f_0(x)$ u smjeru osi y za 2.

Graf funkcije $F(x)$ nastaje translacijom grafa funkcije $f_0(x)$ u smjeru osi x za 3 i u smjeru osi y za 2.

Zadatak 2.

Riješite jednadžbu

$|2-x|-|2x-3|+4x-1)/|x+4|=1,\ x\in R.$

This image cannot currently be displayed.

This image cannot currently be displayed.

Rezultat.

$x\in[3/2,2]$

Zadatak 3.

Riješite nejednadžbu

$|2-x|-|2x-3|+4x-1)/|x+4|\geq 1,\ x\in R.$

Rezultat.

$x\in[-3/2,\infty)$

Rješenje Z3 (RADIONICA)

Za x ≠- 4 zadanu nejednadžbu možemo pisati u obliku

I2-xI-I2x-3I+4x-1-Ix+4I≥0, x≠-4. (*)

Metoda razlikovanja slučajeva.

2-x=0 ⇒ x=2, 2x-3=0 ⇒ x=3/2, x+4=0 ⇒ x=-4

-4, 3/2, 2 (dobivene nultočke poredane po veličini)

1º) $x \in (-\infty, -4)$ **(**)**

Iz (*) izlazi (2-x)+(2x-3)+4x-1+(x+4) ≥0, odakle je x≥-1/2, pa u intervalu (**) nejednadžba nema rješenja.

2º) x∈(-4,3/2) (***)

Iz (*) izlazi (2-x)+(2x-3)+4x-1-(x+4)≥0, odakle je x≥-3/2, pa su u intervalu (***) rješenja nejednadžbe x∈(-372,3/2)

3º) x$\in$[3/2,2]   (****)

Iz (*) izlazi 2-x-(2x-3)+4x-1-(x+4)≥0, odakle je 0x≥0, pa su u

intervalu (****) rješenja nejednadžbe x$\in$[3/2,2].

4º) $x \in (2,\infty)$ **(*****)**

Iz (*) izlazi –(2-x)-(2x-3)+4x-1-(x+4)≥0, odakle je x≥-2, pa su u intervalu (*****) rješenja nejednadžbe $x \in (2,\infty)$ **.**

Dakle, rješenja zadane nejednadžbe su $x \in (-3/2,\infty)$

11. FUNKCIJA “NAJVEĆE CIJELO”

Funkciju $\lfloor\ \rfloor : R \to Z$,

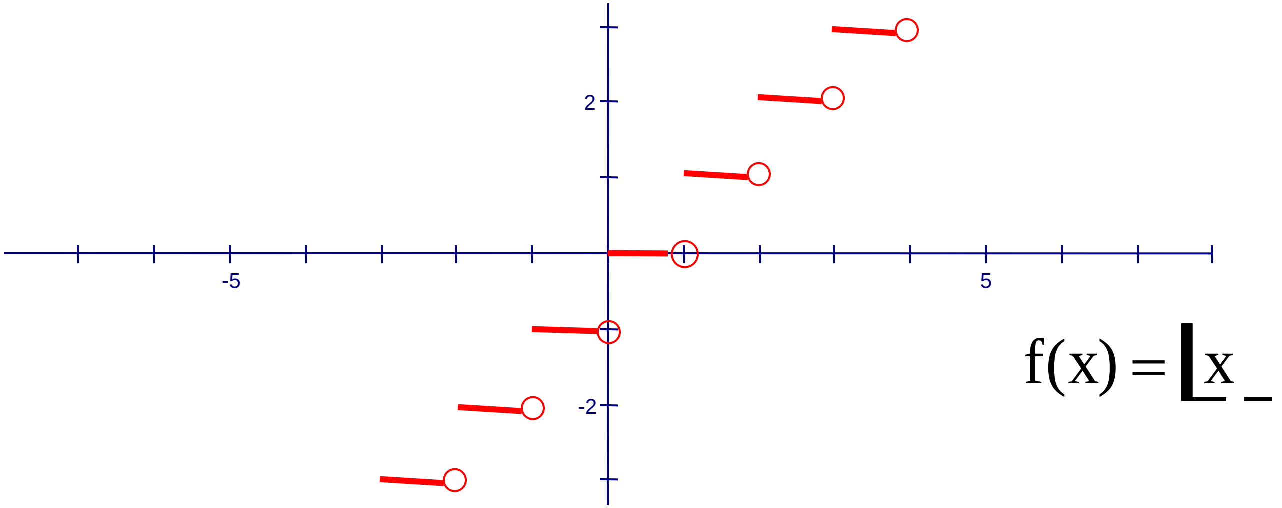
$$x \mapsto \lfloor x \rfloor = \max \{k \in Z : k \leq x\}$$

zovemo **funkcija "najveće cijelo“**,

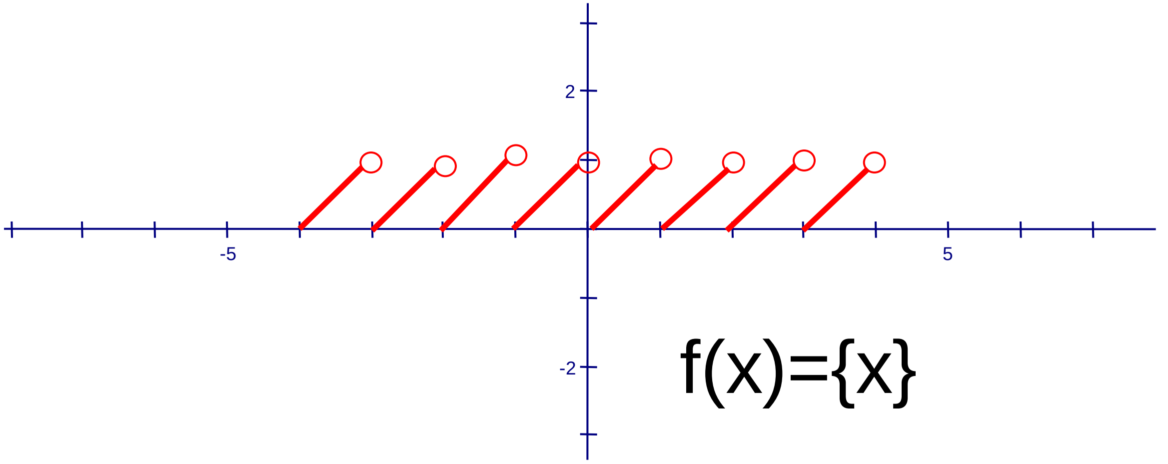
a funkciju { }: $R \to [0,1)$,

$$x \mapsto \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$

zovemo **funkcija "razlomljeni (decimalni) dio“.**



2
-2
-5
5
$f(x) = \lfloor x \rfloor$



2
-2
-5
5
f(x)={x}

Poučak.

Za funkciju "najveće cijelo" vrijede ova svojstva:

(a) $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$, $x \in R$

(b) $0 \le \{x\} < 1$, $x \in R$

(c) $\lfloor k \rfloor = k$, $k \in Z$

(d) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x$, $x \in R$

(e) $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$, $x \in R$

(f) $\lfloor k + x \rfloor = k + \lfloor x \rfloor$, $k \in Z$, $x \in R$

U sljedećim ćemo primjerima primijeniti ovu funkciju na rješavanje jednadžaba.

Primjer 1.

Riješite jednadžbu $\left\lfloor \frac{2x+2}{3} \right\rfloor = x, x \in R.$

Prema definicije funkcije "najveće cijelo" lijeva je strana zadane jednadžbe cijeli broj, pa je onda to i desna strana, tj. $x \in Z$.

$$\frac{2x+2}{3} - 1 < \left\lfloor \frac{2x+2}{3} \right\rfloor \leq \frac{2x+2}{3}$$

$$\frac{2x+2}{3} - 1 < x \leq \frac{2x+2}{3} \; / \cdot 3$$

$$2x - 1 < 3x \leq 2x + 2$$

$$-1 < x \leq 2$$

pa, zbog $x \in Z$, izlaze rješenja zadane jednadžbe $x \in \{0,1,2\}$.

Primjer 2.

Riješite jednadžbu $\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor = \frac{x-1}{2}, x \in R.$

Neka je lijeva strana zadane jednadžbe cijeli broj k.

Tada je to i desna strana, pa iz k=(x-1)/2 slijedi x=2k+1, što znaći da je i x cijeli broj.

Supstitucijom x=2k+1 u zadanu jednadžbu dobivamo $\lfloor(2k+2)/3\rfloor = k$, $k \in R$.

Prema prethodnomu zadatku rješenja ove jednadžbe su $k \in \{0,1,2\}$, pa iz x=2k+1 izlazi $x \in \{1,3,5\}$.

Zadatak 1.

Riješite jednadžbu $\left\lfloor \dfrac{x^2+3}{x+2} \right\rfloor = x-1, x \in R$

Rezultat.

$$x \in \{2, 3, 4, 5\}$$

Zadatak 2.

Riješite jednadžbu: $\left\lfloor \frac{5+6x}{8} \right\rfloor = \frac{15x-7}{5}, \mathrm{x} \in \mathrm{R}.$

Rezultat. $\mathrm{x} \in \left\{ \frac{7}{15}, \frac{4}{5} \right\}$

Rješenje Z2 (RADIONICA)

Neka je lijeva strana zadane jednadžbe jednaka **k, k**$\in$Z.

Tada i za desnu stranu te jednadžbe vrijedi

$$(15x-7)/5 = k,$$

odakle je $x=(5k+7)/15$. **(*)**

Prema svojstvu (d) navedenoga poučka vrijedi

$$(5+6x)/8-1 < k \leq (5+6x)/8,$$

odnosno primjenom (*)

$$-1/30 < k \leq 39/30.$$

Zbog $k\in Z$ je $k\in\{0,1\}$, pa je prema (*) rješenje zadane jednadžbe

$$x \in \left\{ \frac{7}{15}, \frac{4}{5} \right\}.$$

12. RASPRAVA RJEŠENJA LINEARNE JEDNADŽBE S JEDNOM NEPOZNANICOM

- Jednadžba $a \cdot x = b$, $a \neq 0$, ima jedinstveno realno rješenje $x = b/a$ **(određena/moguća jednadžba).**
- Jednadžba $0 \cdot x = 0$ ima beskonačno mnogo realnih rješenja $x \in R$ **(neodređena jednadžba).**
- Jednadžba $0 \cdot x = b \neq 0$ nema rješenja **(nemoguća jednadžba).**

Primjer 1.

U ovisnosti o parametru $a \in R$ raspravite rješenja jednadžbe $a(x-1)=3x+2$, $x \in R$.

Rezultat.

$$a(x-1)=3x+2 \Rightarrow ax-a=3x+2 \Rightarrow ax-3x=a+2 \Rightarrow$$

$$x(a-3)=a+2 \quad /:(a-3)\neq 0 \Rightarrow \quad x=(a+2)/(a-3)$$

- 1° $a \in R\backslash\{3\} \Rightarrow x=(a+2)/(a-3)$ (određena jednadžba)
- 2° $a = 3 \Rightarrow 0x=5 \Rightarrow 0=5 \Rightarrow \Phi$ (nemoguća jednadžba)

Primjer 2.

U ovisnosti o parametru $a \in R$ raspravite rješenja jedanadžbe $a^2(x-1)+a(x+2)=2x+1$, $x \in R$.

Rezultat.

Zadanu jednadžbu možemo transformirati u oblik $x(a^2+a-2)=a^2-2a+1$, odnosno $x(a+2)(a-1)=(a-1)^2$.

Dijeljenjem dobivene jednadžbe s

$(a+2)(a-1) \neq 0$ (za $a \neq -2$ i $a \neq 1$) slijedi

$$x=(a-1)/(a+2).$$

1º $a \in R\backslash\{-2,1\} \Rightarrow x=(a-1)/(a+2)$.
2º $a = 1 \Rightarrow 0x=0 \Rightarrow x \in R$.
3º $a = -2 \Rightarrow 0x=9 \Rightarrow 0=9 \Rightarrow \Phi$.

Dakle,

za **$a \in R\backslash\{-2,1\}$** zadana jednadžba ima **jedinstveno rješenje $x=(a-1)/(a+2)$** (određena jednadžba),

za **$a=1$ beskonačno mnogo rješenja** $x \in R$ (neodređena jednadžba),

za **$a=-2$ nema rješenja** (nemoguća jednadžba).

Zadatak 1.

U ovisnosti o parametru $a \in R$ raspravite rješenja jednadžbe $2ax+6a+x+3=0$, $x \in R$.

Rezultat.

Za $a \in R \setminus \{-1/2\}$ zadana jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = -3$ (određena jednadžba), dok za $a = -1/2$ ima beskonačno mnogo rješenja $x \in R$ (neodređena jednadžba).

Zadatak 2.

U ovisnosti o parametrima $a,b \in R$ raspravite rješenja jednadžbe

$$\frac{x-a}{x+b}=\frac{x-2a-b}{x+a+2b}, x \in R$$

Rezultat.

Za **a ≠ -b** zadana jednadžba ima jedinstveno rješenje

x=(a-b)/2,

za **a = -b** ima beskonačno mnogo rješenja $x \in R \backslash \{a\}$.

Rješenje Z2 (RADIONICA)

Za $x \neq -b$ (*) i $x \neq -a-2b$ (**) $\Rightarrow$

$(x-a)(x+a+2b)=(x+b)(x-2a-b)$, tj. $2x(a+b)=(a-b)(a+b)$, pa za $a \neq -b$ (***) slijedi $x=(a-b)/2$ (****)

Iz (*) i (****) izlazi $(a-b)/2 \neq -b$, tj. $a \neq -b$, što je već naglašeno u (***).

Iz (**) i (****) izlazi $(a-b)/2 \neq -a-2b$, tj. $a \neq -b$, što je također već naglašeno u (***).

1º $a \neq -b \Rightarrow x=(a-b)/2$

2º $a = -b \Rightarrow (x-a)/(x-a)=(x-a)/(x-a)$

$\Rightarrow (x-a)/(x-a)-(x-a)/(x-a)=0 \Rightarrow 0/(x-a)=0 \Rightarrow x \in R \setminus \{a\}$.

13. GAUSSOVA METODA ELIMINACIJE

[Carl Friedrich Gauss, 1777.-1815.]

Pri rješavanju višelinearnih sustava jednadžaba primjenjivat ćemo elementarne transformacije pri kojima sustav linearnih jednadžaba ostaje ekvivalentan:

- Zamjena mjesta dviju ili više jednadžaba
- Pomnožiti (podijeliti) jednadžbu bilo kojim nenul brojem
- Dodati (oduzeti) jednadžbi bilo koju drugu jednadžbu

Najčešće primjenjujemo kombinaciju ovih transformacija.

Višelinearne sustave jednadžbi možemo kraće zapisati u matričnome obliku.

Primjer 1.

U ovisnosti o parametru k∈R raspraviti (diskutirati) rješenja sustava jednadžaba

$$\begin{cases} x+y+kz=2 \\ x+ky+z=-1 \\ kx+y+z=-1 \end{cases}$$

$$x, y, z \in R$$

Rješenje.

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & k & 2 \\ 1 & k & 1 & -1 \\ k & 1 & 1 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \text{II.- I.} \\ \text{III.-k·I.} \end{array} \sim \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & k-1 & 1-k & -3 \\ 0 & 1-k & (1-k)(1+k) & -1-2k \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \text{III.+II.} \end{array}$$

$$\sim \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & k-1 & 1-k & -3 \\ 0 & 0 & (1-k)(2+k) & -2(2+k) \end{array}\right|$$

1º $k \in R \setminus \{-2,1\}$

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & k-1 & 1-k & -3 \\ 0 & 0 & (1-k)(2+k) & -2(2+k) \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ /:(k-1) \\ /:(1-k)(2+k) \end{array} \sim$$

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3/(k-1) \\ 0 & 0 & 1 & -2(1-k) \end{array}\right| \begin{array}{l} I.-k\cdot III. \\ II.+III. \\ \end{array} \sim$$

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 2/(1-k) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(1-k) \\ 0 & 0 & 1 & -2(1-k) \end{array}\right| \begin{array}{l} I.-II. \\ \\ \end{array} \sim \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1/(1-k) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(1-k) \\ 0 & 0 & 1 & -2(1-k) \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{1-k}, y = \frac{1}{1-k}, z = \frac{-2}{1-k} \qquad (*)$$

2º k = -2

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| / : (-3) \sim \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \text{I.-II.} \sim$$

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} x - z = 1 \\ y - z = 1 \end{array}$$

Odnosno: $$\begin{array}{l} x = z + 1 \\ y = z + 1 \\ z \in R \end{array}$$

Stavljajući z=t dobivamo: $$\begin{array}{l} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = t \\ t \in R \end{array} \qquad (**)$$

3º *k=1*

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right|$$

$$x + y + z = 2$$

tj. $0x+0y+0z = -3$

$$0x+0y+0z = -6$$

Sustav linearnih jednadžaba nema rješenja.

Dakle, za $k \in R\setminus\{-2,1\}$ sustav linearnih jednadžbi je određen, a rješenja su mu dana sa (*).

Za $k=-2$ sustav je neodređen, a rješenja su mu dana sa (**).

Za $k = -1$ sustav linearnih jednadžaba nemoguć (nema rješenja).

Zadatak 1.

U ovisnosti od parametara a,b$\in$R riješite sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{cases} ax + by + az = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$x, y, z \in R$$

Rezultat.

1º b≠a≠2

x=(1-b)/(a-b), y=(a-1)/(a-b), z=0

2º b≠a=2

x=(-2(b-1)/(b-2))t + (b-1)/(b-2), y=(2/(b-2))t – 1/(b-2), z=t, t$\in$R

3º b=a≠2

3º1. a=1

x=-t+1, y=t, z=0, t$\in$R

3º2. a≠1

nemoguć sustav linearnih jednadžaba

4º b=a=2

x=-t, y=t, z=1/2, t$\in$R

Rješenje Z1 (RADIONICA)

$$\begin{pmatrix} a & b & a & | & 1 \\ 1 & 1 & a & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ a & b & a & | & 1 \\ 1 & 1 & a & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II.-a·I.} \sim \\ \text{III.-I.} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & b-a & -a & | & 1-a \\ 0 & 0 & a-2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

1° $b \neq a \neq 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & b-a & -a & | & 1-a \\ 0 & 0 & a-2 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /:(b-a) \\ /:(a-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & a/(a-b) & | & (a-1)/(a-b) \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{I.-2·III.} \\ \text{II.+(a/(b-a))·III.} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & (a-1)/(a-b) \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{I.-II.} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & (1-b)/(a-b) \\ 0 & 1 & 0 & | & (a-1)/(a-b) \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{tj.} \quad \begin{matrix} x = (1-b)/(a-b) \\ y = (a-1)/(a-b) \\ z = 0 \end{matrix}$$

2^{o} $b \neq a = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & b-2 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} /:(-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2(b-2) & | & -1/(b-2) \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \text{ I.-II.} \quad \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2(b-1)/(b-2) & | & (b-1)/(b-2) \\ 0 & 1 & -2/(b-2) & | & -1/(b-2) \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}, \text{ tj.}$$

$x = (-2(b-1)/(b-2))z+(b-1)/(b-2)$

$y = (2(b-1)/(b-2))z+1/(b-2)$,

$z \in R$

odnosno

$x = (-2(b-1)/(b-2))t+(b-1)/(b-2)$

$y = (2(b-1)/(b-2))t+1/(b-2)$

$z = t$

$t \in R$

3^o $b=a\neq-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -a & 1-a \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ / :(a-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -a & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I.}-2\cdot\text{III.} \\ \text{II.}+a\cdot\text{III.} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

3^o1 $a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \text{ tj. } \begin{array}{l} x = -y+1 \\ z = 0 \\ y \in R \end{array}, \text{ odnosno } \begin{array}{l} x = -t+1 \\ y = 2 \\ z = 0 \\ t \in R \end{array}$$

$3^o2.$ $a \neq 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) (\neq 0) \Rightarrow \Phi$$ **(druga je jednadžba nemoguća)**

4^o $b=a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I.+II.} \\ /:(-2) \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ tj. } \begin{array}{l} x = -y \\ z = 1/2 \text{ , odnosno} \\ y \in R \end{array}$$

$x = -t$

$y = t$

$z = 1/2$

$t \in R$

14. DIOFANTOVE JEDNADŽBE

[Diofant, 3. st., Aleksandrija]

Jednadžbu kojoj tražimo cjelobrojna rješenja zovemo Diofantova jednadžba.

Razlikovat ćemo linearne i nelinearne Diofantove jednadžbe

I. LINEARNE DIOFANTOVE JEDNADŽBE

Primjer 1.

Naći cjelobrojna rješenja jednadžbe

$13x+8y=15,\ x,y\in Z.$

Eulerova metoda.

[Leonhard Euler, 1707.-1763.]

$13x+8y=15,\ x,y\in Z$

$\Rightarrow y=(15-13x)/8,\ x,y\in Z$

$\Rightarrow y=2-2x+(-1+3x)/8,\ x,y\in Z$

$\Rightarrow (-1+3x)/8=u\in Z$ i $y=2-2x+u,\ x,y\in Z$

$\Rightarrow x=(1+8u)/3=3u+(1-u)/3=3u+v\in Z$ i $v=(1-u)/3\in Z$

i $y=2-2x+u\in Z$

$\Rightarrow x=3u+v\ \varepsilon Z$ i $u=1-3v\in Z$ i $y=2-2x+u\in Z,\ v\in Z$

$\Rightarrow x=3\cdot(1-3v)+v\in Z$ i $y=2-2\cdot(3-8v)+(1-3v)\in Z,\ v\in Z$

$\Rightarrow x=3-8v$ i $y=-3+13v,\ v\in Z$

Zadatak 1.

Naći sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$2x-3y=7,\ x,y\in \mathbf{Z}$$

Rezultat.

$$x = 2+3t,\ y = -1+2t,\ \ t \in Z.$$

Zadatak 2.

(Regionalno natjecanje 1999., 6. razred OŠ)

Odredi sve cijele brojeve y za koje je razlomak (5y-6)/y pozitivan cijeli broj.

Rezultat.

$y \in \{-1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$.

Zadatak 3.

Riješite jednadžbu $\mathbf{12x-3y=5,\ x,y\in Z}$.

Rezultat.

Zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Rješenje Z3 (RADIONICA)

Iz zadane jednadžbe dobivamo
$y=(12x-5)/3$, tj. $y=4x-2+1/3$.
Budući da desna strana posljednje jednadžbe nije nikada cijeli broj (za $x \in Z$), tada zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Napomena.
Može se pokazati da jednadžba $ax+by=c$, $a,b,c \in Z$

Ima cjelobrojnih rješenja akko (ako i samo ako) vrijedi $M(a,b)|c$, gdje je $M(a,b)$ najveći zajednički djelitelj brojeva a i b.
U Z3 je $M(a,b)=M(\ a\ ,\ b\ )=M(12,3)=3$, ali 3 ne dijeli $5=c$, pa zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

II. NELINEARNE DIOFANTOVE JEDNADŽBE

Primjenjivat ćemo ove metode:

- Metoda rastavljanja polinoma na čimbenike
- Metoda osnovnog poučka o dijeljenju polinoma
- Metoda zbroja potencija s parnim eksponentima
- Metoda posljednje znamenke
- Metoda kongruencije/ostatka dijeljenja
- Metoda nejednakosti

METODA RASTAVLJANJA POLINOMA NA ČIMBENIKE (FAKTORE)

Primjer 1.

(Školsko/općinsko natjecanje 2010., 2. razred SŠ A)

Odredi sve cijele brojeve x za koje je

$x^2+3x+24$ kvadrat nekog cijelog broja.

Iz $x^2+3x+24=y^2$ slijedi $(2x+3)^2+87=4y^2$, a odavde

$87=(2y+2x+3)(2y-2x-3)$.

Zbog $87=87\cdot1=1\cdot87=3\cdot29=29\cdot3=$

$= -1\cdot(-87)= -87\cdot(-1)= -3\cdot(-29)= -29\cdot(-3)$ slijedi

2y+2x+3=A	**2y-2x-3=B**	**x =(A-B-6)/4**	**y =(A+B)/4**
1	87	-23	22
87	1	20	23
3	29	-8	8
29	3	5	8
-1	-87	20	-22
-87	-1	-23	-22
-3	-29	5	-8
-29	-3	-8	-8

Rješenja su jednadžbe $x\in\{-23, -8, 5, 20\}$.

Zadatak 1.

(Županijsko natjecanje 2007., 1. razred SŠ A)

Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^3+11^3=y^3$.

Rezultat.

$(x,y)\in\{(0,11), (-11,0)\}$

Zadatak 2.

Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^2-2011=y^2$.

Rezultat.

$(x,y)\in\{(106,105), (106,-105), (-106,105), (-106,-105)\}$

Rješenje Z2 (RADIONICA)

Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku
$(x-y)(x+y)=2011$.
Budući da je
$2011=1\cdot 2011=2011\cdot 1=-2011\cdot(-1)=-1\cdot(-2011)$, imamo:

x-y=A	**x+y=B**	**x=(A+B)/2**	**y=(B-A)/2**
1	2011	106	105
2011	1	106	-105
-2011	-1	-106	105
-1	-2011	-106	-105

Rješenja su zadane jednadžbe
$(x,y)\in\{(106,105), (106,-105), (-106,105), (-106,-105)\}$

METODA OSNOVNOG POUČKA O DIJELJENJU POLINOMA

Primjer 1.

Riješite jednadžbu $xy+2y=x$, $x,y\in Z$.

Rješenje.

Iz zadane jednadžbe slijedi $y=x/(x+2)=1-2/(x+2)$, $x\neq-2$

(jer $x=-2$ nije rješenje zadane jednadžbe).

$y\in Z \Rightarrow 2/(x+2) \in Z \Rightarrow x+2 \in \{1, -1, 2, -2\} \Rightarrow$

$x \in \{1, -3, 0, -4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y)\in\{(-1,-1), (-3,3), (0,0), (-4,2)\}$

Zadatak 1.

Riješite jednadžbu

$$x^2-xy+2x-3y-6=0,\ x,y\in Z.$$

Rezultat.

$$(x,y)\in\{(-6,-6),\ (-4,-2),\ (-2,-6),\ (0,-2)\}$$

Zadatak 2.

Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$$

Rezultat.

$(x,y)\in\{(2,-6), (-6,2), (4,12), (12,4), (6,6)\}$

Rješenje Z2 (RADIONICA)

Očito su $x,y \neq 0$.

Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku
$x(y-3)=3y$.

Očito je $y \neq 3$ (jer za $y=3$ lijeva je strana posljednje jednadžbe 0, a desna 9), pa imamo

$x=3y/(y-3)=(3(y-3)+9)/(y-3)=3+9/(y-3)$. Odavde je

y-3	1	-1	3	9	-9
y=(y-3)+3	4	2	6	12	-6
9/(y-3)	9	-9	3	1	-1
x=3+9/(y-3)	12	-6	6	4	2

$$(x,y) \in \{(2,-6), (-6,2), (4,12), (12,4), (6,6)\}$$

METODA ZBROJA POTENCIJA S PARNIM EKSPONENTIMA

Primjer 1. ***(Županijsko natjecanje 2010., 1. razred SŠ B)***

Odredi sve cijele brojeve x,y za koje vrijedi $(y^2)^2+x^{2010}=2y^2-1$.

Rješenja.

Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku

$(y^2-1)^2+x^{2010}=0$. Kako su oba pribrojnika nenegativna (zbog parnosti potencija 2 i 2010) i kako je desna strana jednadžbe nula, slijedi da je $y^2-1=0$ i $x^{2010}=0$, tj. $y=\ 1$ i $x=0$.

Rješenja su jednadžbe $(x,y)\in\{(0,-1),(0,1)\}$.

Zadatak 1.

Riješite jednadžbu $x^2+y^2=5$, $x,y\in Z$.

Rezultat.

$(x,y)\in\{(-2,-1), (-2,1), (-1,-2), (-1,2),$
$(1,-2), (1,2), (2,-1), (2,1)\}.$

Zadatak 2.

Riješite jednadžbu $x^2+y^2+z^2=2(x+1)$, $x,y,z \in Z$.

Rezultat.

$(x,y,z) \in \{(0,1,1), (0,1,-1), (0,-1,1), (0,-1,-1), (2,1,1), (2,1,-1), (2,-1,1), (2,-1,-1)\}$

Rješenje Z2 (RADIONICA)

Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku

$(x-1)^2+y^2+z^2=3$, pa je $x-1=\ 1$, $y=\ 1$, $z=\ 1$, tj.

$x\in\{0,2\}$, $y\in\{1,-1\}$, $z\in\{1,-1\}$.

Rješenja su zadane jednadžbe

$(x,y,z)\in\{(0,1,1), (0,1,-1), (0,-1,1), (0,-1,-1),$

$(2,1,1), (2,1,-1), (2,-1,1), (2,-1,-1)\}$.

METODA POSLJEDNJE ZNAMENKE (specijalno: METODA PARNOSTI I NEPARNOSTI)

***Primjer 1*.**

(Županijsko natjecanje 2009., 1. razred SŠ A)

Odrediti cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^2+y^2-8z=14$.

Desna je strana zadane jednadžbe parna, pa to treba biti i lijeva strana. Stoga su x i y iste parnosti.

Ako su x i y oba parna broja, tada je lijeva strana zadane jednadžbe djeljiva sa 4, a desna nije, pa zadana jednadžba nema rješenja.

Neka su x i y oba neparna broja, tj. $x=2m+1$, $y=2n+1$, $m,n \in Z$. Uvrštavanjem toga u zadanu jednadžbu i sređivanjem dobivamo $m(m+1)+n(n+1)-2z=3$.

Budući da su $m(m+1)$ i $n(n+1)$ parni brojevi (umnožak dva uzastopna cijela broja) slijedi da je lijeva strana posljednje jednadžbe parna, a desna to nije, pa ova jednadžba, a s tim ni zadana, nema rješenja.

Dakle, zadana jednadžba nema rješenja.

Primjer 2.

Naći cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^2+5y=201020092008$.

Rješenje.

Budući da x^2 ima posljednju znamenku 0,1,4,5,6 ili 9, a $5y$ 0 ili 5, tada lijeva strana zadane jednadžbe ima posljednju znamenku 0,1,4,5,6 ili 9, a nikada 8, pa zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Zadatak 1.

Naći cjelobrojna rješenja jednadžbe $(x^2)^2+(y^2)^2=1223334444\ldots999999999$.

Rezultat.

Zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Rješenje Z1 (RADIONICA)

Očito su $x, y \neq 0$.

x^2 i y^2 mogu imati posljednju znamenku 1, 4, 5, 6 ili 9, pa $(x^2)^2$ i $(y^2)^2$ mogu imati posljednji znamenku 1, 5 ili 6. Stoga $(x^2)^2+(y^2)^2$ može imati posljednju znamenku 0, 1, 2, 6 ili 7, a nikada 9.

Dakle, zadana jednadžba nema rješenja.

Zadatak 2.

Naći cjelobrojna rješenja jednadžbe
$5^x + 6^y = 123456789.$

Rezultat.

Zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

METODA KONGRUENCIJE (METODA OSTATKA DIJELJENJA)

Primjer 1.

Naći cjelobrojna rješenja jednadžbe

$x^2-3y=17$.

Kako je $3y$ djeljivo s 3, a 17 nije, tada ni x^2, pa s tim ni x nije djeljivi s 3. Stoga možemo pisati $x=3k \quad 1$, $k\in Z$. Uvrštavanjem toga u zadanu jednadžbu i sređivanjem dobivamo

$3(3k^2 \quad 2k-y)=16$. Budući da je lijeva strana posljednje jednadžbe djeljiva s 3, a desna to nije, tada posljednja jednadžba, a s tim ni zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Zadatak 1.

Naći cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^2=9y+5$.

Rezultat.

Zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Rješenje Z1 (RADIONICA)

Budući da desna strana zadane jednadžbe nije djeljiva s 3, tada to nije ni lijeva strana, tj. ni x nije djeljiv s 3. Neka je $x=3k\ \ 1$, $k\in Z$. Tada zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku $(3k\ \ 1)^2=9y+5$,

tj. $9k^2\ \ \ 6k+1=9y+5$, odnosno $3\cdot(3k^2\ \ 2k-3y)=4$.

Lijeva je strana posljednje jednadžbe djeljiva s 3, a desna nije, pa ta jednadžba, a s tim ni zadana, nema rješenja u skupu Z.

Zadatak 2.

Naći cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^2-4y=2011$.

Rezultat.

Zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

METODA NEJEDNAKOSTI

Primjer 1.

Odrediti cjelobrojna rješenja jednadžbe

$3^x + 4^x = 5^x$.

Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$$

Za $x<2$ lijeva je strana posljednje jednadžbe veća od 1, a za $x>2$ manja od 1. Jedino je rješenje ove, pa s tim i zadane jednadžbe $x=2$.

Zadatak 1.

Naći prirodna rješenja jednadžbe

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

Rezultat.

$(x,y,z)\in\{(2,3,6), (2,6,3), (3,2,6), (3,3,3), (3,6,2), (6,2,3), (6,3,2)\}$.

Rješenje Z1 (RADIONICA)

Očito je $(x,y,z)=(3,3,3)$ jedno rješenje zadane jednadžbe i $x,y,z\neq 1$.
Neka je $x<y<z$. Tada je $1/x>1/y>1/z$, pa iz $3/z<1/x+1/y+1/z=1<3/x$ slijedi $x<3$ i $z>3$.
Zbog $x\neq 1$ i $x<3$ slijedi $x=2$, pa zadana jednadžba postaje $1/y+1/z=1$.
Iz $2/z<1/y+1/z=1/2<1/y$ slijedi $y<4$ i $z>4$.
Zbog $y>x=2$ i $y<4$ slijedi $y=3$, pa iz $1/3+1/z=1/2$ slijedi $z=6$.
Dakle $(2,3,6)$ je još jedno rješenje dane jednadžbe.
Zbog “ravnopravnosti” x,y,z u danoj jednadžbi dolazimo još do 5 rješenja dane jednadžbe.
Rješenja zadane jednadžbe su
$(x,y,z)\in\{(2,3,6), (2,6,3), (3,2,6), (3,3,3), (3,6,2), (6,2,3), (6,3,2)\}$.

15. TABLIČNO RJEŠAVANJE NEJEDNADŽBI

Primjer 1.

Riješiti nejednadžbu $\dfrac{2x+1}{3-x} \le 0, x \in R.$

2x+1=0 $\Rightarrow$ x=-1/2, 3-x=0 $\Rightarrow$ x=3

x		-1/2		3	
2x+1	**-**	**0**	**+**	**+**	**+**
3-x	**+**	**+**	**+**	**0**	**-**
(2x+1)/(3-x)	**-**	**0**	**+**		**-**

Rješenja dane nejednadžbe su:

$$x \in R \setminus \left(-\frac{1}{2}, 3 \right]$$

Primjer 2.

Riješiti nejednadžbu

$$\frac{x^2 - x - 6}{1 - x} \geq 0, x \in R$$

Zadanu nejednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\frac{(x+2)(x-3)}{1-x} \geq 0.$$

Granice promatranih intervala su -2, 1 i 3.

x		-2		1		3	
x+2	-	0	+	+	+	+	+
x-3	-	-	-	-	-	0	+
1-x	+	+	+	0	-	-	-
$\frac{(x+2)(x-3)}{1-x}$	+	0	-		+	0	-

Rješenja zadane nejednadžbe su:

$$x \in \langle -\infty, -2] \cup \langle 1, 3\rangle$$

Zadatak 1.

Riješite nejednadžbu $(x-2)(3-2x)>0$, $x \in R$.

Rezultat.

$x \in (3/2, 2)$.

Zadatak 2.

Riješiti nejednadžbu

$(x+2)/(x^2-1) - 1/(x+1) < 1$, $x \in R$.

Rezultat.

$\mathbf{x \in R \setminus ([-2,1] \cup [1,2])}$.

Rješenje Z2 (RADIONICA)

Zadanu nejednadžbu možemo transformirati na oblik (2-x)(2+x)(/(x-1)(x+1)>0.

x		-2		-1		1		2	.
2-x	+	+	+	+	+	+	+	+	+
x+2	-	0	+	+	+	+	+	+	+
x-1	-	-	-	-	-	0	-	-	-
x+1	-	-	-	0	+	+	+	+	+ .
(2-x)(x+2)/(x-1)(x+1)	-	0	+		-		+	0	

$$x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$$

16. LOGARITAMSKE NEJEDNADŽBE U KOJIMA SU I LOGARITMAND I BAZA PROMJENJIVE VELIČINE

Lema.

Neka $a,b \in R$ zadovoljavaju svojstva:

$b>0$, $a>0$ i $a \neq 1$. (*)

Tada vrijedi

$$\log_a b \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} 0 \text{ akko } (a-1)(b-1) \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} 0. \quad (**)$$

Neka su ispunjeni uvjeti (*). Tada vrijedi

$\log_a b \leq 0$ akko

akko $((0<a<1$ i $b\geq 1)$ ili $(a>1$ i $0<b\leq 1))$

akko $((a-1<0$ i $b-1\geq 0)$ ili $(a-1>0$ i $b-1\leq 0))$

akko $(a-1)(b-1)\leq 0$.

Analogno se pokazuje da vrijedi

$\log_a b \geq 0$ akko $(a-1)(b-1)\geq 0$,

čime je (**) dokazano.

Primjer 1.

(Općinsko/školsko natjecanje 2008., 3. razred SŠ B)

Riješiti nejednadžbu $\log_{(x-3)}(x^2-4x+3)<0$.

Iz uvjeta $x^2-4x+3>0$, $x-3>0$ i $x-3\neq 1$ slijedi
$x\in(-3,4)\cup(4,\infty)$. (*)
Sada primjenom leme slijedi $(x-4)(x^2-4x+2)<0$,
a odatle redom izlazi $(x-4)((x-2)^2-2)<0$,
$(x-4)(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})<0$, $X\in(-\infty,2-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{2},4)$. (**)
Iz (*) i (**) slijede rješenja zadane nejednadžbe
$x\in(2+\sqrt{2},4)$.

Zadatak 1.

Riješiti nejednadžbu

$\log_{(2-x)}(x+2)\cdot\log_{(x+3)}(3-x)\leq 0,\ x\in R.$

Rezultat.

$x\in(-2,-1]\cup(1,2).$

Uputa. *Riješiti nejednadžbu*

$(1-x)(x+1)\cdot(x+2)(2-x)\leq 0$ i primijeniti uvjete definiranosti logaritamskih funkcija.

Rješenje Z1 (RADIONICA)

Iz uvjeta definiranosti logaritamskih funkcija: 2-x>0, x+2>0, x+3>0, 3-x>0, 2-x≠1 i x+3≠1 slijedi x∈(-2,1)∪(1,2). (*)

Zadana nejednadžba ekvivalentna je nejednadžbi (1-x)(x+1)·(x+2)(2-x)>0, uz uvjet (*).

x		**-2**		**-1**		**1**		**2**	
1-x	**+**	**+**	**+**	**+**	**+**	**0**	**-**	**-**	**-**
x+1	**-**	**-**	**-**	**0**	**+**	**+**	**+**	**+**	**+**
x+2	**-**	**0**	**+**	**+**	**+**	**+**	**+**	**+**	**+**
2-x	**+**	**+**	**+**	**+**	**+**	**+**	**+**	**0**	**-**
(1-x)(x+1)(x+2)(2-x)	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**

x∈[-2,-1]∪ [1,2]. (**)

Iz (*) i (**) slijedi x∈(-2,-1] ∪ (1,2).

17. DOKAZI ALGEBARSKIH NEJEDNAKOSTI PRIMJENOM ODNOSA IZMEĐU SREDINA

Za a,b,c…$\in$R, a,b,c…>0 definiramo:

A=(a+b)/2, A=(a+b+c)/3	aritmetičku sredinu
$G = \sqrt{ab}$ $G = \sqrt[3]{abc}$	geometrijsku sredinu
1/H=(1/a+1/b)/2, 1/H=(1/a+1/b+1/c)/3	harmonijsku sredinu
$K = \sqrt{(a^2 + b^2)/2}$ $K = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)/3}$	kvadratnu sredinu

Odnosi između sredina: $H \le G \le A \le K$

Pri tome vrijedi jednakost akko je a=b=…

Primjer 1.
(Županijsko natjecanje 2005., 1. razred SŠ)

Ako su a,b,c pozitivni realni brojevi takvi da je $1/a+1/b+1/c=1$, dokažite nejednakost $(a-1)(b-1)(c-1)\geq 8$.

Rješenje.

Iz $1/a+1/b+1/c=1$ slijedi $ab+bc+ca=abc$.

Primjenom H-A nejednakosti $3/(1/a+1/b+1/c) \leq (a+b+c)/3$ slijedi $a+b+c\geq 9$, a odavde $(a-1)(b-1)(c-1)= abc-(ab+bc+ca)+a+b+c-1 = abc-abc+a+b+c-1= a+b+c-1\geq 9-1=8$, što se i tvrdilo.

Primjer 2.

(Županijsko natjecanje 2009.,1. razred SŠ A)

Dokaži da za sve x, x>0 vrijedi nejednakost

$$\left(x^2\right)^2 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy$$

Rješenje.

Iz $(x^2-1)^2 \geq 0$ slijedi $(x^2)^2+1 \geq 2x^2$.

Analogno je $y^2+1 \geq 2y$, pa je $y^3+y \geq 2y^2$.

Stoga je $(x^2)^2+y^3+x^2+y+1 > 3x^2+2y^2$. (*)

Primjenom A-G nejednakosti je $3x^2 + 2y^2 \geq 2xy\sqrt{6}$.

Budući je $2\sqrt{6} = \sqrt{24} > \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$

slijedi da je $3x^2+2y^2 \geq 9xy/2$. (**)

Sada iz (*) i (**) slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak 1.

(Državno natjecanje 2008., 2. razred SŠ A)

Neka su a,b,c pozitivni realni brojevi takvi da je $a^2+b^2+c^2=3$. Dokažite nejednakost

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}$$

Uputa.

Koristite A-H nejednakost.

Zadatak 2.

(Državno natjecanje 2010., 1. razred SŠ A)

Neka su a,b,c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}$$

Dokaži nejednakost

$$\frac{1-a^2+c^2}{c(a+2b)}+\frac{1-b^2+a^2}{a(b+2c)}+\frac{1-c^2+b^2}{b(c+2a)}\geq 6$$

Uputa.

Koristite A-K i A-G nejednakost.

Zadatak 3.

Dokazati nejednakost

$$\log_4 5 + \log_5 4 + \log_6 7 + \log_7 8 > 4.4$$

Uputa.

Koristiti A-G nejednakost.

Rješenje Z3 (RADIONICA)

This image cannot currently be displayed.

$$\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8=$$

$$=\frac{\log 5}{\log 4}+\frac{\log 6}{\log 5}+\frac{\log 7}{\log 6}+\frac{\log 8}{\log 7}$$

$$(A-G)\geq 4\cdot\sqrt[4]{\frac{\log 5}{\log 4}\cdot\frac{\log 6}{\log 5}\cdot\frac{\log 7}{\log 6}\cdot\frac{\log 8}{\log 7}}$$

$$=4\cdot\sqrt[4]{\frac{\log 8}{\log 4}}=4\cdot\sqrt[4]{\frac{3\log 2}{2\log 2}}=4\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{2}}>4.4$$