Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** na dozvoli da knjižicu
"Princip matematičke indukcije"
skeniram i objavim na http://public.carnet.hr/mat-natj .

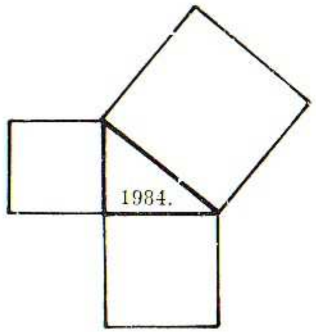
Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »PITAGORA«
BELI MANASTIR

PITAGORINI MATERIJALI ZA MLADE MATEMATIČARE
24

Luka Čeliković:

PRINCIP MATEMATIČKE INDUKCIJE



Beli Manastir, 1990.

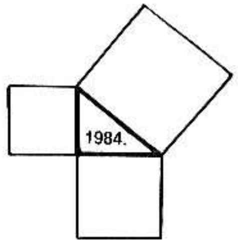
DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA "P I T A G O R A" BELI MANASTIR

PITAGORINI MATERIJALI ZA MLADE MATEMATIČARE

24

Luka Čeliković:

PRINCIP MATEMATIČKE INDUKCIJE



Beli Manastir, 1990.

Luka Čeliković - PRINCIP MATEMATIČKE INDUKCIJE

Izdavač:

Društvo mladih matematičara "PITAGORA" Beli Manastir
Školska 3, 54300 Beli Manastir

Urednici:

Luka Čeliković
Milan Šarić

Tehnički urednik:

Branko Vujaklija

Tisak:

Grafička radna organizacija "Slovo" Beli Manastir

SADRŽAJ

Beli Manastir, 1990.

MATEMATIČKA (POTPUNA) INDUKCIJA

1. UVODNI POJMOVI

Temelj metode matematičke (potpune) indukcije čini slijedeći aksiom:

Aksiom matematičke indukcije (4. Peanov aksiom):
Neka je N skup prirodnih brojeva i $M \subseteq N$. Ako za M vrijede svojstva: (1) $1 \in M$,

(2) $n \in M \Rightarrow n+1 \in M, \forall n \in N$,

tada je $M=N$.

Iz prethodnog aksioma izvodimo slijedeći princip:

Princip matematičke indukcije:
Neka za tvrdnju T_n (koja ovisi o prirodnom broju n) vrijedi:
(1) Tvrdnja T_1 je istinita.
(2) Iz istinitosti tvrdnje T_k proizlazi istinitost tvrdnje T_{k+1}.
Tada je tvrdnja T_n istinita za svaki prirodan broj n.

Samu tvrdnju matematičkom indukcijom dokazujemo ovako:

(a) BAZA INDUKCIJE
Provjerimo da tvrdnja vrijedi za $n=1$ (odnosno za neki početni $n_0 \in N_0$).

(b) PRETPOSTAVKA (HIPOTEZA) INDUKCIJE
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n=k$, $k \geq 1$ (odnosno $k \geq n_0$, $n_0 \in N_0$).

(c) KORAK INDUKCIJE
Na osnovu pretpostavke (b) dokazujemo da tvrdnja vrijedi i za $n=k+1$.

Tada tvrdnja vrijedi za svaki $n \in N$ (odnosno za svaki $n \geq n_0$, $n_0 \in N_0$).

Ponekad se u koraku indukcije ne može dokazati istinitost tvrdnje za $n=k+1$ samo na osnovu pretpostavke za $n=k$. Stoga se u pretpostavci indukcije pretpostavlja istinitost tvrdnje za $n=k$, $n=k-1$, ..., $n=k-(r-1)$, $r<k$. No, u tom slučaju je u bazi indukcije potrebno izvršiti provjeru za $n=1$, $n=2$, ..., $n=r$ (odnosno za $n=n_0$, $n=n_0+1$, ..., $n=n_0+r-1, n_0 \in N_0$).

Istinitost nekih tvrdnji T_n možemo dokazati i pomoću tzv. regresivne indukcije ovako:

(1) Dokazujemo istinitost tvrdnje T_n za beskonačno mnogo prirodnih brojeva n.

(2) Na osnovu istinitosti tvrdnje T_k dokazujemo istinitost tvrdnje T_{k-1}.

Tada je tvrdnja T_n istinita za svaki prirodan broj n.

Na kraju istaknimo da se metoda matematičke indukcije može proširiti i na skup cijelih brojeva Z. O tome govori slijedeći princip:

Princip matematičke indukcije za cijele brojeve:

Neka za tvrdnju T_m (koja ovisi o cijelom broju $m \in Z$) vrijedi:

(1) Tvrdnja T_{m_0} je istinita za neki fiksni broj $m_0 \in Z$.

(2) Iz istinitosti tvrdnje T_k slijedi istinitost tvrdnji T_{k-1} i T_{k+1}.

Tada je tvrdnja T_m istinita za svaki cijeli broj $m \in Z$.

2. ZADACI

A. JEDNAKOSTI

Dokazati slijedeće jednakosti:

1. $\sum_{n=1}^{n} n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dokaz:

(a) Za n=1 tvrdnja vrijédi jer je $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

(b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n=k, tj. da je $\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$.

(c) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za n=k+1, tj. da je $\sum_{n=1}^{k+1} n = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Imamo: $\sum_{n=1}^{k+1} n = \sum_{n=1}^{k} n + (k+1) \overset{(b)}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$

$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, što je i trebalo dokazati.

2. $\sum_{n=1}^{n} 2n = n(n+1)$.

3. $\sum_{n=1}^{n} (2n-1) = n^2$.

4. $\sum_{n=1}^{n} n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Dokaz:

(a) Za n=1 tvrdnja vrijedi jer je $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3$.

(b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n=k, tj da je $\sum_{n=1}^{k} n^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$.

(c) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za n=k+1, tj. da je $\sum_{n=1}^{k+1} n^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$.

Imamo: $\sum_{n=1}^{k+1} n^2 = \sum_{n=1}^{k} n^2 + (k+1)^2 \overset{(b)}{=} \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) +$

$+ (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$, Š.T.D.

5. $\sum_{n=1}^{n} (2n)^2 = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$.

6. $\sum_{n=1}^{n} (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$.

7. $\sum_{n=1}^{n} n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

8. $\sum_{n=1}^{n} (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$.

9. $\sum_{n=1}^{n} n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

10. $\sum_{n=1}^{n} n^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$.

11. $\sum_{n=1}^{n} n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

Dokaz:

(a) Za n=1 tvrdnja vrijedi jer je $1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$.

(b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n=k, tj. da je $\sum_{n=1}^{k} n(n+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$.

(c) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za n=k+1, tj. da je $\sum_{n=1}^{k+1} n(n+1) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$.

Imamo: $\sum_{n=1}^{k+1} n(n+1) = \sum_{n=1}^{k} n(n+1) + (k+1)(k+2) \overset{(b)}{=}$

$\overset{(b)}{=} \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$, Š.T.D.

12. $\sum_{n=1}^{n} n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$.

13. $\sum_{n=1}^{n} n(n+3) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$

14. $\sum_{n=1}^{n} n(2n-1) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{n} n(3n+1) = n(n+1)^2$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{n} n(n+1)^2 = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{n} n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{n} n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{r+1}$, $r \in N$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Dokaz:

(a) Za $n=1$ tvrdnja vrijedi.

(b) Pretpostavimo da vrijedi $\sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{k}{k+1}$.

(c) Dokažimo da vrijedi $\sum\limits_{n=1}^{k+1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{k+1}{k+2}$.

Imamo: $\sum\limits_{n=1}^{k+1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \overset{(b)}{=} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$, Š.T.D.

20. $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{2^n}{1+a^{2^n}} = \frac{2}{a^2-1} + \frac{2^{n+1}}{1-a^{2^{n+1}}}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

B. NEJEDNAKOSTI

Dokazati slijedeće nejednakosti:

25. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$, $n \in N$.

Dokaz:

(a) $n=1 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$, pa za $n=1$ tvrdnja vrijedi.

(b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n=k$, tj. da vrijedi

$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{3k+1} > 1$.

(c) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n=k+1$, tj. da vrijedi

$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+4} > 1$.

Imamo: $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} =$

$= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+1}\right) + \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1}\right) \overset{(b)}{>}$

$\overset{(b)}{>} 1 + \frac{9k^2+18k+10}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} > 1$, Š.T.D.

26. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, $n \in N$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, $n \in N$.

Dokaz:

(a) Za $n=1$ tvrdnja vrijedi.

(b) Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja $\sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{k}$.

(c) Dokažimo da vrijedi tvrdnja $\sum\limits_{n=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{k+1}$.

Imamo: $\sum\limits_{n=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \overset{(b)}{\geq} \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}}$.

Ostaje još pokazati da je $\frac{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k+1}$ (*).

Pretpostavimo (suprotno tome) da je $\frac{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1}$.

Tada, množenjem posljednje nejednakosti sa $\sqrt{k+1} > 0$ i kvadriranjem, izlazi $k < 0$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $k \in N$. Dakle, vrijedi (*), Š.T.D.

28. $\sum\limits_{n=2}^{n} \frac{1}{n^2} < 1$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$.

30. $\prod\limits_{n=1}^{n} \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Dokaz:

(a) $n=1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $n=2 \Rightarrow \frac{3}{8} < \frac{1}{\sqrt{7}}$, pa za $n=1$ i $n=2$ tvrdnja vrijedi.

(b) Pretpostavimo da vrijedi $\prod\limits_{n=1}^{k} \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$.

(c) Dokažimo da vrijedi $\prod\limits_{n=1}^{k+1} \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$.

Imamo: $\prod_{n=1}^{k+1} \frac{2n-1}{2n} = \prod_{n=1}^{k} \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \overset{(b)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$,

pri čemu nejednakost (*) lako dokazujemo indirektnom metodom, Š.T.D.

$\boxed{31.}$ $(1+h)^n > 1+nh$, $n \geq 2$, $n \in N$, $h > 0$ (Bernoullijeva nejednakost).

Dokaz:

(a) $n=2 \Rightarrow (1+h)^2 = 1+2h+h^2 > 1+2h$ (zbog $h^2 > 0$), pa za $n=2$ tvrdnja vrijedi.

(b) Pretpostavimo da vrijedi $(1+h)^k > 1+kh$.

(c) Dokažimo da vrijedi $(1+h)^{k+1} > 1+(k+1)h$.

Imamo: $(1+h)^{k+1} = (1+h)^k \cdot (1+h) \overset{(b)}{>} (1+kh)(1+h) = 1+(k+1)h+kh^2 > 1+(k+1)h$ (zbog $kh^2 > 0$), Š.T.D.

$\boxed{32.}$ $2^n > n$, $n \in N_0$.

Dokaz:

(a) Za $n=0$ tvrdnja vrijedi jer je $1 > 0$.

(b) Pretpostavimo da vrijedi $2^k > k$.

(c) Dokažimo da vrijedi $2^{k+1} > k+1$.

Imamo: $2^{k+1} = (1+1)^{k+1} > 1+(k+1)\cdot 1$ (prema prethodnom zadatku) $= k+2 > k+1$, Š.T.D.

$\boxed{33.}$ $2^n > 2n+1$, $n \geq 3$.

$\boxed{34.}$ $n^2 > 2n+1$, $n \geq 5$.

$\boxed{35.}$ $2^n > n^2$, $n \geq 5$.

$\boxed{36.}$ $2 > (\frac{n+1}{n})^3$, $n \geq 10$.

$\boxed{37.}$ $2^n > n^3$, $n \geq 10$.

$\boxed{38.}$ $3^n > n^4$, $n \geq 8$.

$\boxed{39.}$ $\sqrt{p^n} + \sqrt{q^n} \leq \sqrt{(p+q)^n}$, $n \geq 2$, $p,q > 0$.

Dokaz:

(a) Za $n=2$ tvrdnja vrijedi.

(b) Pretpostavimo da vrijedi $\sqrt{p^k} + \sqrt{q^k} \leq \sqrt{(p+q)^k}$, $k \geq 2$.

(c) Dokažimo da vrijedi $\sqrt{p^{k+1}} + \sqrt{q^{k+1}} \leq \sqrt{(p+q)^{k+1}}$.

Imamo: $\sqrt{p^{k+1}} + \sqrt{q^{k+1}} = \sqrt{p^k} \cdot \sqrt{p} + \sqrt{q^k} \cdot \sqrt{q} \leq \sqrt{p^k} \cdot \sqrt{p+q} + \sqrt{q^k} \cdot \sqrt{p+q} =$
$= \sqrt{p+q}(\sqrt{p^k} + \sqrt{q^k}) \overset{(b)}{\leq} \sqrt{p+q} \cdot \sqrt{(p+q)^k} = \sqrt{(p+q)^{k+1}}$, Š.T.D.

$\boxed{40.}$ $(\frac{x+y}{2})^n \leq \frac{x^n+y^n}{2}$, $n \in N$, $x,y \in R^+$.

$\boxed{41.}$ $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$, $n \geq 2$; $a_1, a_2, \dots, a_n$ je niz pozitivnih realnih brojeva.

Dokaz:

Dokaz ćemo provesti regresivnom indukcijom.

(1) Prvo ćemo dokazati da je tvrdnja istinita za beskonačno mnogo prirodnih brojeva n. Dovoljno je pokazati da nejednakost vrijedi za sve prirodne brojeve oblika 2^n, $n \in N$:

$\frac{1}{2^n}(a_1+a_2+\dots+a_{2^n}) \geq \sqrt[2^n]{a_1 a_2 \dots a_{2^n}}$ (*).

Za $n=2$ tvrdnja $\frac{1}{2}(a_1+a_2) \geq \sqrt{a_1 a_2}$ (**) vrijedi, jer je $\frac{1}{2}(a_1+a_2) \geq \sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow (a_1+a_2)^2 \geq 4a_1 a_2 \Leftrightarrow (a_1-a_2)^2 \geq 0$, što uvijek vrijedi.

Iz pretpostavke istinitosti tvrdnje za $n=k$:

$\frac{1}{k}(a_1+a_2+\dots+a_k) \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k}$ (***),

dokazujemo istinitost tvrdnje za $n=2k$:

$\frac{1}{2k}(a_1+a_2+\dots+a_{2k}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{k}(a_1+a_2+\dots+a_k) + \frac{1}{k}(a_{k+1}+a_{k+2}+\dots+$
$+ a_{2k})) \overset{(**)}{\geq} \sqrt{\frac{1}{k}(a_1+a_2+\dots+a_k) \cdot \frac{1}{k}(a_{k+1}+a_{k+2}+\dots+a_{2k})} \overset{(***)}{\geq}$
$\overset{(***)}{\geq} \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1 a_2 \dots a_{2k}}$, čime je (na osnovu principa mat. ind.) tvrdnja (*) dokazana.

(2) Ostaje još pokazati, da iz pretpostavke istinitosti tvrdnje zadatka za $n=k$, slijedi istinitost tvrdnje za $n=k-1$. Neka tvrdnja zadatka vrijedi za $n=k$ bilo kojih pozitivnih realnih brojeva. Za proizvoljan odabir $a_1, a_2, \dots, a_{k-1} \in R^+$, neka je $a_k = \frac{1}{k-1}(a_1+a_2+\dots+a_{k-1})$. Tada iz pretpostavke $\frac{1}{k}(a_1+a_2+\dots+a_k) \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k}$ slijedi:

$\frac{1}{k}(a_1+a_2+\dots+a_{k-1} + \frac{1}{k-1}(a_1+a_2+\dots+a_{k-1})) \geq$
$\geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_{k-1} \cdot \frac{1}{k-1}(a_1+a_2+\dots+a_{k-1})} \quad \Big|^k$

$(\frac{1}{k-1}(a_1+a_2+\dots+a_{k-1}))^{k-1} \geq a_1 a_2 \dots a_{k-1} \quad \Big|^{\frac{1}{k-1}}$

$\frac{1}{k-1}(a_1+a_2+\dots+a_{k-1}) \geq \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \dots a_{k-1}}$,

čime je dokazano (na osnovu pretpostavke da tvrdnja zadatka vrijedi za proizvoljnih k pozitivnih realnih brojeva) da tvrdnja zadatka vrijedi i za k-1 proizvoljno odabrana pozitivna realna broja.

Iz (1) i (2) slijedi tvrdnja zadatka.

[42] $p_n \le 2^{2^{n-1}}$, $n \in N$, gdje su $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5, \dots, p_n, \dots$ prosti brojevi.

Dokaz:

(a) $n=1 \Rightarrow p_1=2=2^{2^0}$, $n=2 \Rightarrow p_2=3<4=2^{2^1}$, pa za n=1 i n=2 tvrdnja vrijedi.

(b) Pretpostavimo da vrijedi $p_k \le 2^{2^{k-1}}$.

(c) Dokažimo da vrijedi $p_{k+1} \le 2^{2^k}$.

Imamo: $p_{k+1} \le \prod_{k=1}^{k} p_k + 1 \overset{(b)}{\le} \prod_{k=1}^{k} 2^{2^{k-1}} + 1 =$

$= 2^{\sum_{k=1}^{k} 2^{k-1}} + 1 = 2^{1\cdot\frac{2^k-1}{2-1}} + 1 = 2^{2^k-1} + 1 = \frac{1}{2}\cdot 2^{2^k} + 1 \le 2^{2^k}$,

Š.T.D.

[43] $p_n > 2n$, $n \ge 5$, $n \in N$, gdje su $p_1=2$, $p_2=3, \dots, p_n, \dots$ prosti brojevi.

C. DJELJIVOST PRIRODNIH BROJEVA

Ako su $a,b \in N$, tada su slijedeće tvrdnje ekvivalentne:

$a|b$ (čit. a dijeli b),

$b \vdots a$ (čit. b je djeljivo sa a),

$\exists m \in N$, $b=ma$ (b je višekratnik od a, tj. a je mjera od b),

$b \equiv 0 \pmod a$ (čit. b je kongruentno sa 0 modulo a; dijeljenjem b sa a dobiva se ostatak nula).

Dokazati slijedeće tvrdnje:

[44] $(a^n-b^n) \vdots (a-b)$, $n \in N$.

[45] $(a^{2n}-b^{2n}) \vdots (a+b)$, $n \in N$.

[46] $(a^{2n+1}+b^{2n+1}) \vdots (a+b)$, $n \in N$.

[47] $2|n^2+3n+2$, $n \in N$.

Dokaz:

(a) Za n=1 tvrdnja je istinita jer $2|6$.

(b) Pretpostavimo da $2|k^2+3k+2$.

(c) Dokažimo da $2|k^2+5k+6$.

Imamo: $k^2+5k+6 = \underbrace{(k^2+3k+2)}_{\vdots 2 \text{ (prema (b))}} + \underbrace{2(k^2+2)}_{\vdots 2} \Rightarrow 2|k^2+5k+6$, Š.T.D.

[48] $3|5^n+2^{n+1}$, $n \in N$.

Dokaz:

Neka je $f(n)=5^n+2^{n+1}$, $n \in N$.

(a) $n=1 \Rightarrow 3|f(1)=9$.

(b) Pretpostavimo da $3|f(k)=5^k+2^{k+1}$.

(c) Dokažimo da $3|f(k+1)=5^{k+1}+2^{k+2}$.

Imamo: $f(k+1)=5^{k+1}+2^{k+2}=5\cdot5^k+2\cdot2^{k+1}=\underbrace{2\cdot(5^k+2^{k+1})}_{\vdots 3 \text{ prema (b)}}+\underbrace{3\cdot5^k}_{\vdots 3}$,

pa $3|f(k+1)$, Š.T.D.

[49] $3|4^n+15^n-1$, $n \in N$.

[50] $3|11\cdot10^{2n}+1$, $n \in N$.

[51] $6|2n^3-3n+n$, $n \in N$.

[52] $6\ n(n+1)(2n+1)$, $n \in N$.

[53] $7|n^7-n$, $n \in N$.

[54] $7|13^{2n}+6$, $n \in N$.

[55] $7|3^{2n+1}+2^{n+2}$, n N.

[56] $8|3^{2n}-1$, $n \in N$.

[57] $8|3^{2n+3}+40n-27$, n N.

[58] $9|4^n+15n-1$, $n \in N$.

[59] $3\cdot4^{n+1}+10^{n-1}-4 \equiv 0 \pmod 9$, $n \in N$.

Dokaz:

Neka je $f(n)=3\cdot4^{n+1}+10^{n-1}-4$, $n \in N$. Treba dokazati da $9|f(n)$.

(a) $n=1 \Rightarrow 9|f(1)=45$.

(b) Pretpostavimo da $9|f(k)=3\cdot4^{k+1}+10^{k-1}-4$.

(c) Dokažimo da $9|f(k+1)=3\cdot4^{k+2}+10^k-4$.

Iz $f(k+1)=(3\cdot4^{k+1}+10^{k-1}-4)+9\cdot(4^{k+1}+10^{k-1})$ prema (b) slijedi da $9|f(k+1)$.

[60] $9^{n+1}+2^{6n+1} \equiv 0 \pmod{11}$, $n \in N$.

[61] $11\cdot3^n+3\cdot7^n-6 \equiv 0 \pmod{12}$, $n \in N$.

[62] $2^{12n+3}-3^{6n+2} \equiv 0 \pmod{13}$, $n \in N$.

[63] $3\cdot5^{2n+1}+2^{3n+1} \equiv 0 \pmod{17}$, $n \in N$.

[64] $3^{3n+2}+5\cdot2^{3n+1} \equiv 0 \pmod{19}$, $n \in N$.

[65] $5^{2n+1}\cdot2^{n+2}+3^{n+2}\cdot2^{2n+1} \equiv 0 \pmod{19}$, $n \in N$.

[66] $n^3-n \equiv 0 \pmod{24}$, $n \in N$.

[67] $n^5-n \equiv 0 \pmod{30}$, $n \in N$.

[68] $n^7-12 \equiv 0 \pmod{42}$, $n \in N$.

[69] $n^3+20n \equiv 0 \pmod{48}$, $n \in N$.

[70] $2^{3n}-7n-1 \equiv 0 \pmod{49}$, $n \in N$.

[71] $2^{2n+1}-9n^2+3n \equiv 2 \pmod{54}$, $n \in N$.

(Napomena: $2^{2n+1}-9n^2+3n-2 \equiv 0 \pmod{54}$).

72. $9\cdot 3^{2n}-8n\equiv 9 \pmod{64}$, $n\in N$.

73. $4^{2n}-3^{2n}\equiv 7 \pmod{84}$, $n\in N$.

74. $3^{2n+2}-28n-3\equiv 1 \pmod{196}$, $n\in N$.

75. $4^{2n+2}-15n-10\equiv 6 \pmod{225}$, $n\in N$.

76. $3^{2^n}-1\equiv 0 \pmod{2^{n+2}}$, $n\in N$.

Dokaz:

Neka je $f(n)=3^{2^n}$, $g(n)=2^{n+2}$, $n\in N$. Treba dokazati da $g(n)\,|\,f(n)$.

(a) $n=1 \Rightarrow f(1)=g(1)=8 \Rightarrow g(1)\,|\,f(1)$.

(b) Pretpostavimo da $g(k)\,|\,f(k)$.

(c) Dokažimo da $g(k+1)\,|\,f(k+1)$.

$f(k+1)=3^{2^{k+1}}-1=(3^{2^k})^2-1=(3^{2^k}-1)(3^{2^k}+1)=(3^{2^k}-1)\cdot f(k)$,

$g(k+1)=2^{k+3}=2\cdot 2^{k+2}=2\cdot g(k)$.

Kako je $3^{2^k}-1$ paran broj, to prema (b) očito $g(k+1)\,|\,f(k+1)$, Š.T.D.

77. $2^{3^n}\equiv 0 \pmod{3^{n+1}}$, $n\in N$.

78. Produkt dva uzastopna prirodna broja je djeljiv sa 2.

79. Produkt tri uzastopna prirodna broja je djeljiv sa 6.

80. Produkt 4 uzastopna prirodna broja je djeljiv sa 24 .

81. Produkt 5 uzastopnih prirodnih brojeva je djeljiv sa 120.

D. RAZNI ZADACI

Dokazati slijedeće tvrdnje:

82. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})$, $n\in N$.

83. $a^{2n}-b^{2n}=(a+b)(a^{2n-1}-a^{2n-2}b+\dots+ab^{2n-2}-b^{2n-1})$, $n\in N$.

84. $a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\dots-ab^{2n-1}+b^{2n})$, $n\in N$.

85. Broj 2^{2^n}, $n\geq 2$, završava šesticom.

Dokaz:

(a) $n=2 \Rightarrow 16$ završava šesticom.

(b) Pretpostavimo da broj 2^{2^k} završava šesticom.

(c) Dokažimo da i broj $2^{2^{k+1}}$ završava šesticom.

Iz $2^{2^{k+1}}=(2^{2^k})^2$ prema (b) slijedi posljednja tvrdnja, Š.T.D.

86. Produkt dva broja oblika $6n+1$, $n\in N$, takodjer je broj istog oblika.

87. Ako je $a_{n+1}=a_n+d$, tada je $a_n=a_1+(n-1)d$, $n\in N$, $d\in R$. (Opći član aritmetičkog niza).

Dokaz:

(a) $n=1 \Rightarrow a_1=a_1$.

(b) Pretpostavimo da je $a_k=a_1+(k-1)d$.

(c) Dokažimo da je $a_{k+1}=a_1+kd$.

Imamo: $a_{k+1}=a_k+d=(a_1+(k-1)d)+d$ (prema (b)) $=a_1+kd$, Š.T.D.

88. Ako je $a_{n+1}=a_nq$, tada je $a_n=a_1q^{n-1}$, $n\in N$, $q\in R\setminus\{0\}$. (Opći član geometrijskog niza).

89. Ako je $a_n=a_1+(n-1)d$, odnosno $a_{n+1}=a_n+d$, tada je $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+2})$, $n\in N$. (Otuda naziv aritmetički niz).

90. Ako je $a_n=a_1q^{n-1}$, odnosno $a_{n+1}=a_nq$, tada je $a_{n+1}=\sqrt{a_na_{n+2}}$, $n\in N$. (Otuda naziv geometrijski niz).

91. Ako je $a_{n+1}=a_n+d$, tada je $S_n=a_1+a_2+\dots+a_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$, $n\in N$. (Suma prvih n članova aritmetičkog niza).

92. Ako je $a_{n+1}=a_nq$, tada je $S_n=a_1+a_2+\dots+a_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$, $n\in N$. (Suma prvih n članova geometrijskog niza).

93. Ako su $a,b\in R^+$ i ako je $a_1=\frac{1}{2}(a+\frac{b}{a})$, $a_2=\frac{1}{2}(a_1+\frac{b}{a_1})$, ..., $a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+\frac{b}{a_{n-1}})$, tada je $\frac{a_n-\sqrt{b}}{a_n+\sqrt{b}}=(\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}})^{2^n}$, $n\in N$, $a_n\neq-\sqrt{b}$.

94. Ako je $a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ niz brojeva za koji vrijedi $a_1=2$, $a_2=3$, $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$, $n\geq 3$, tada je $a_n=1+2^{n-1}$, $n\in N$.

Dokaz:

(a) $n=1 \Rightarrow a_1=2$, $n=2 \Rightarrow a_2=3$, pa za $n=1$ i $n=2$ tvrdnja vrijedi.

(b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n=k-1$ i $n=k$, tj. da je $a_{k-1}=1+2^{k-2}$ i $a_k=1+2^{k-1}$.

(c) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n=k+1$, tj. da je $a_{k+1}=1+2^k$.

Imamo: $a_{k+1}=3a_k-2a_{k-1}\overset{(b)}{=}3\cdot(1+2^{k-1})-2\cdot(1+2^{k-2})=3+3\cdot2^{k-1}-2-2\cdot2^{k-2}=1+3\cdot2^{k-1}-2^{k-1}=1+2\cdot2^{k-1}=1+2^k$, Š.T.D.

$\boxed{95}$ Ako je $a_1,a_2,\ldots,a_n\ldots$ niz brojeva za koji vrijedi $a_1=0$, $a_2=1$, $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$, $n\geq3$, tada je $a_n=2^{n-1}-1$, $n\in N$.

$\boxed{96}$ Ako je $a_1=p+q$, $a_2=\frac{p^3-q^3}{p-q}$, $a_n=(p+q)\cdot a_{n-1}-pq\cdot a_{n-2}$, $n\geq3$, tada je $a_n=\frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}$, $n\in N$.

$\boxed{97}$ Zadan je niz 1,1,2,3,5,8,13,21,... (Fibonaccijev niz) u kome su prva dva člana jednaka 1, a svaki slijedeći član je jednak sumi dva prethodna člana. Tada je opći član tog niza $a_n=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right)$, $n\in N$.

$\boxed{98}$ Broj $a_n=\frac{5-\sqrt5}{10}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n+\frac{5+\sqrt5}{10}\left(\frac{1+5}{2}\right)^n$, $n\in N$, je prirodan.

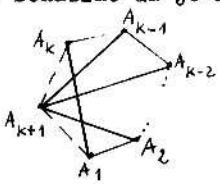
$\boxed{99}$ Broj dijagonala n-terokuta je $D_n=\frac12 n(n-3)$, $n\geq4$.

Dokaz:

(a) $n=4 \Rightarrow D_4=2$.

(b) Pretpostavimo da je $D_k=\frac12 k(k-3)$.

(c) Dokažimo da je $D_{k+1}=\frac12(k+1)(k-2)$.



Imamo:

$$D_{k+1}=D_k+\underbrace{(k-2)}_{\text{broj dijagonala iz vrha } A_{k+1}}+\underbrace{1}_{\text{dijagonala } A_1A_k}\overset{(b)}{=}\frac12 k(k-3)+k-1=$$

$$=\frac{(k+1)(k-2)}{2}\text{, Š.T.D.}$$

$\boxed{100}$ Zbroj unutarnjih kuteva n-terokuta iznosi $S_n=(n-2)\cdot180^\circ$, $n\geq3$.

$\boxed{101}$ U ravnini n pravaca u općem položaju (nikoja 2 nisu paralelna i nikoja 3 ne pripadaju istom pramenu) dijele tu ravninu na $1+\frac12 n(n+1)$, $n\in N$, dijelova.

$\boxed{102}$ U prostoru n ravnina u općem položaju dijele prostor na $n(n-1)+2$ dijela.

$\boxed{103}$ U ravnini je zadano proizvoljan broj pravaca u općem položaju. Ako je a = broj točaka presjeka pravaca, b = = broj odsječaka na koje su ti pravci podijeljeni točkama presjeka, c = broj dijelova ravnine na koje ti pravci dijele ravninu, tada je $a-b+c=1$.

Dokaz:

Neka je n, $n\in N$, broj pravaca.

(a) Za $n=1$ tvrdnja vrijedi jer je $a=0$, $b=1$, $c=2$.

(b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n=k$, tj. da je $a_k-b_k+c_k=1$.

(c) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n=k+1$, tj. da je $a_{k+1}-b_{k+1}+c_{k+1}=1$.

Neka je dano k+1 pravaca $p_1,p_2,\ldots,p_k,p_{k+1}$. Uočimo k pravaca $p_1,p_2,\ldots,p_k$. Prema (b) za njih vrijedi $a_k-b_k+c_k=1$. Neka su $P_1,P_2,\ldots,P_k$ točke u kojima (k+1) - vi pravac p_{k+1} presijeca prethodnih k pravaca $p_1,p_2,\ldots,p_k$. Na taj način dobivamo novih k točaka, pa je $a_{k+1}=a_k+k$. Nadalje se broj odsječaka pravaca povećao za 2k+1 (na svakom pravcu $p_1,p_2,\ldots,p_k$ jedan odsječak više, te na pravcu p_{k+1} k+1 odsječaka), pa je $b_{k+1}=b_k+2k+1$. Konačno se i broj dijelova ravnine povećao za k+1, pa je $c_{k+1}=c_k+k+1$. Stoga je $a_{k+1}-b_{k+1}+c_{k+1}=(a_k+k)-(b_k+2k+1)+(c_k+k+1)=a_k-b_k+c_k=1$ (prema (b)), Š.T.D.

$\boxed{104}$ Ako je a = broj vrhova, b = broj bridova, c = broj ploha konveksnog poliedra, tada je $a-b+c=2$.

$\boxed{105}$ Za složeno dekurzivno ukamaćivanje vrijedi formula $C_n=C_o\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, gdje je C_o početna svota, p kamatnjak, n broj ukamaćivanja, a C_n konačna svota (početna svota + kamate).

$\boxed{106}$ Za kardinalni broj Kartezijevog produkta skupova vrijedi formula $k(A_1xA_2x\ldots xA_n)=kA_1\cdot kA_2\cdot\ldots\cdot kA_n$, $n\geq2$.

$\boxed{107}$ Za skupove A_i $(i\in N)$ vrijedi de Morganov teorem $\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^{n}A_i^{\,c}$, $n\geq2$.

108. Za skupove A_i ($i \in N$) vrijedi de Morganov teorem

$$\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^{\,c}, \quad n \geq 2.$$

109. Za skupove A_n ($n \in N$) vrijedi asocijativnost unije.

110. Za skupove A_n ($n \in N$) vrijedi asocijativnost presjeka.

111. Za funkcije $f_n: S \to S$ ($n \in N$) vrijedi asocijativnost kompozicije.

112. Za bijekcije $f_n: S \to S$ ($n \in N$) vrijedi

$$(f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \ldots \circ f_{n-1}^{-1} \circ f_n^{-1}.$$

113. $$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\log_x^2 2}, \quad n \geq 2.$$

114. $$\sum_{n=1}^{n} \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}, \quad n \in N.$$

Dokaz:

(a) Za n=1 tvrdnja vrijedi jer je $\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x}$.

(b) Pretpostavimo da je $\sum_{n=1}^{k} \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2kx}{2\sin x}$.

(c) Dokazati da je $\sum_{n=1}^{k+1} \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2(k+1)x}{2\sin x}$.

Dokaz:

$$\sum_{n=1}^{k+1} \cos(2n-1)x = \sum_{n=1}^{k} \cos(2n-1)x + \cos(2k+1)x \overset{(b)}{=} \frac{\sin 2kx}{2\sin x} + \cos(2k+1)x = \frac{\sin 2kx + \sin 2(k+1)x - \sin 2kx}{2\sin x} = \frac{\sin 2(k+1)x}{2\sin x},$$

Š.T.D.

115. $$\sum_{n=1}^{n} \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}, \quad n \in N.$$

116. $$\sum_{n=1}^{n} \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, \quad n \in N.$$

117. $$\sum_{n=1}^{n} \cos nx = \frac{\cos\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, \quad n \in N.$$

118. $$\prod_{n=1}^{n} \cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}, \quad n \in N.$$

119. Polinom $P_n(x) = \cos nx$ se može izraziti kao polinom stupnja n po cosx.

Dokaz:

(a) Za n=1 i n=2 tvrdnja vrijedi jer je $P_1(x) = \cos x$ i $P_2(x) = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

(b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n=k-1 i n=k, tj. da se polinomi P_{k-1} i P_k mogu izraziti kao polinomi stupnja k-1 i k po cosx.

(c) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za n=k+1, tj. da se polinom P_{k+1} može izraziti kao polinom stupnja k+1 po cosx. Kako je $P_{k+1}(x) = \cos(k+1)x = 2\cos kx \cdot \cos x - \cos(k-1)x$, to prema (b) slijedi tvrdnja, Š.T.D.

120. Ako su $z_n = a_n + b_n i$ ($n \in N$) kompleksni brojevi i $\overline{z_n} = a_n - b_n i$ ($n \in N$) njima pripadni konjugirani kompleksni brojevi, tada je

$$\overline{\sum_{n=1}^{n} z_n} = \sum_{n=1}^{n} \overline{z_n}.$$

121. Ako su $z_n = a_n + b_n i$ ($n \in N$) kompleksni brojevi i $\overline{z_n} = a_n - b_n i$ ($n \in N$) njima konjugirano kompleksni brojevi, tada je

$$\overline{\prod_{n=1}^{n} z_n} = \prod_{n=1}^{n} \overline{z_n}.$$

122. Ako su $z_n = a_n + b_n i$ ($n \in N$) kompleksni brojevi, a $|z_n| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ($n \in N$) njihovi moduli, tada je

$$\left|\prod_{n=1}^{n} z_n\right| = \prod_{n=1}^{n} |z_n|.$$

123. $(\cos x + i\cdot\sin x)^n = \cos nx + i\cdot\sin nx$, $n \in N$, $i = \sqrt{-1}$.
(I Moivreova formula).

Dokaz:

(a) Za n=1 tvrdnja vrijedi.

(b) Pretpostavimo da je $(\cos x + i\cdot\sin x)^k = \cos kx + i\cdot\sin kx$.

(c) Dokazati da je $(\cos x + i\cdot\sin x)^{k+1} = \cos(k+1)x + i\cdot\sin(k+1)x$.

Imamo: $(\cos x + i\cdot\sin x)^{k+1} = (\cos x + i\cdot\sin x)^k \cdot (\cos x + i\cdot\sin x) \overset{(b)}{=} (\cos kx + i\cdot\sin kx)\cdot(\cos x + i\cdot\sin x) = (\cos kx\cdot\sin x - \sin kx\cdot\sin x) + i\cdot(\sin kx\cdot\cos x + \cos kx\cdot\sin x) = \cos(k+1)x + i\cdot\sin(k+1)x$, Š.T.D.

124. $(\cos x - i\cdot\sin x)^n = \cos nx - i\cdot\sin nx$, $n \in N$, $i = \sqrt{-1}$.
(II Moivreova formula).

125. Ako je $z = r(\cos x + i\cdot\sin x)$ trigonometrijski oblik kompleksnog broja, dokazati da je
$z^n = r^n(\cos nx + i\cdot\sin nx)$, $n \in N$.

126. Ako je $z = r(\cos x + i\cdot\sin x)$ trigonometrijski oblik kompleksnog broja, dokazati da je
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{x+2m\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{x+2m\pi}{n}\right)$, $m=0,1,2,\ldots,n-1$,
$n \geqslant 2$.

127. Za potenciju matrice vrijedi:

$$\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{bmatrix},\ n \in N.$$

128. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ n \in N.$$

129. Ako je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, tada je $A^n = 3^{n-1}A$, $n \in N$.

130. Ako su A, B, C, D kvadratne matrice reda m, I jedinična matrica istog reda m i ako vrijedi: $A = CBD$ i $DC = I$, tada vrijedi $A^n = CB^nD$, $n \in N$.

131. $$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^n = a^{n-1}\cdot\begin{bmatrix} a & n \\ 0 & a \end{bmatrix},\ n \in N.$$

132. $$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{2n} = \begin{bmatrix} 3^{2n} & 0 \\ 0 & 3^{2n} \end{bmatrix},\ n \in N.$$

133. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix},\ n \in N,$$ gdje su $F_{-1}=0$, $F_1=1$,
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ za $n \in N$, tzv. Fibonaccijevi brojevi.

134. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & n & 1 & 0 \\ -\frac{n^2(n-1)}{2} & -n & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$n \in N$.

135. Vrijednost determinante D_n n-tog reda jednaka je:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(3^{n+1} + (-1)^n),\ n \in N.$$

Dokaz:

(a) Za $n=1$ i $n=2$ tvrdnja vrijedi.

(b) Pretpostavimo da je $D_{k-1} = \frac{1}{4}(3^k + (-1)^{k-1})$, $D_k = \frac{1}{4}(3^{k+1} + (-1)^k)$.

(c) Dokažimo da je $D_{k+1} = \frac{1}{4}(3^{k+2} + (-1)^{k+1})$.

Razvijanjem determinante D_{k+1} po elementima prvog stupca dobivamo:

$$D_{k+1} = 2D_k - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$ (razvijanjem determinante po el. 1. retka) $= 2D_k + 1\cdot 3D_{k-1} \overset{(b)}{=} \frac{2}{4}(3^{k+1} + (-1)^k) + \frac{3}{4}(3^k + (-1)^{k-1}) = \frac{1}{4}(3\cdot 3^{k+1} - 2\cdot(-1)^{k+1} + 3\cdot(-1)^{k+1}) =$
$= \frac{1}{4}(3^{k+2} + (-1)^{k+1})$, Š.T.D.

136. $$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\cdot(n-1),\ n \in N.$$

137. $$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \ldots & y \\ y & x & y & \ldots & y \\ y & y & x & \ldots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \ldots & x \end{vmatrix} = (x-y)^{n-1}\cdot x + (n-1)y,$$
$n \in N$.

138. $$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2} = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2n},\ n \in N.$$

139. $$D_{n+1} = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n} \\ -a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b \end{vmatrix} = (a+b)^n,\ n \in N.$$

140. $$D_{n+1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{1}{0!} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & \frac{1}{0!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \dots & \frac{1}{0!} \end{vmatrix} = \frac{1}{n!},\ n \in N.$$

141. $$D_n = \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos x \end{vmatrix} = \cos nx,\ n \in N.$$

142. Sustav jednadžbi
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3+\dots+x_n &= 1 \\ x_1+2x_2+x_3+\dots+x_n &= 2 \\ x_1+x_2+2x_3+\dots+x_n &= 3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1+x_2+x_3+\dots+2x_n &= n \end{aligned}$$

ima rješenje: $x_m = m - \frac{n}{2}$, $m=1,2,\dots,n$, $n \in N$.

143. Skup $S_n = \{1,2,\dots,n\}$ od n elemenata ima $n! = 1\cdot 2\cdot \dots \cdot n$ (čit. n faktorijela) permutacija bez ponavljanja.

Dokaz:

(a) Za $n=1$ tvrdnja vrijedi, jer je $P_1 = 1$.

(b) Pretpostavimo da vrijedi $P_k = k!$.

(c) Dokažimo da vrijedi $P_{k+1} = (k+1)!$.

Odaberemo li prvi broj 1, tada se preostalih k brojeva prema (b) može poredati na $k!$ načina. Isto to možemo učiniti za brojeve: $2,3,\dots,k,k+1$, pa imamo: $P_{k+1} = (k+1)\cdot k! = (k+1)!$, Š.T.D.

144. Ako u skupu od n elemenata medju njima ima po $m_1, m_2, \dots, m_r$ $(m_1+m_2+\dots+m_r \leq n)$ jednakih, tada je broj permutacija s ponavljanjem jednak $\overline{P}_{n;m_1,m_2,\dots,m_r} = \frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\cdot\dots\cdot m_r!}$, $n \in N$.

145. Neka je $T \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ skup uredjenih n-torki $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ definiran ovako:
Prvu komponentu a_1 možemo izabrati na p_1 različitih načina; za svaku već izabranu prvu komponentu, drugu komponentu a_2 možemo izabrati na p_2 različitih načina; ... , za svaki izbor komponenti $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, n-tu komponentu a_n možemo izabrati na p_n različitih načina. Tada skup T ima $p_1 p_2 \dots p_n$ elemenata, $n \in N$. (Teorem o uzastopnom prebrojavanju).

146. U n-članom skupu broj varijacija bez ponavljanja r-te klase $(r \leq n)$ je $V_n^r = n(n-1)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$, $n \in N$.

147. U n-članom skupu broj varijacija sa ponavljanjem r-te klase je $\overline{V}_n^r = n^r$, $n \in N$.

148. U n-članom skupu broj kombinacija bez ponavljanja r-te klase $(r \leq n)$ je $C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, $n \in N$.

149. U n-članom skupu broj kombinacija sa ponavljanjem r-te klase je $\overline{C}_n^r = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$, $n \in N$.

150. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{n!(n-r)!}$, $n \in N$.

151. $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$, $n \in N$.

152. $\binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \dots + \binom{r}{r} = \binom{n+1}{r+1}$, $n \in N$.

153. $(a+b)^n = \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$, $n \in N$. (Binomni teorem).

154. $\binom{n+1}{n-1}^2 - \binom{n}{n-2} = n^3,\ n \geq 2.$

155. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n,\ n \in N.$

156. $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1},\ n \in N.$

157. $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n},\ n \in N.$

158. $1!\cdot 1 + 2!\cdot 2 + \ldots + n!\cdot n = (n+1)! - 1,\ n \in N.$

159. $(2n+1)(2n+3)(2n+5)\ldots(4n-3)(4n-1) = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{(4n)!\,n!}{(2n)!\,(2n)!},\ n \in N.$

160. $\sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n}{i-1}} = \sum_{i=1}^{n} i,\ n \in N.$

161. $\frac{3\cdot 4^2\cdot 5^3\ldots n^{n-2}}{(n!)^{n-1}} = \frac{1}{1!\,2!\ldots n!},\ n \in N.$

162. $(-1)^n + (-1)^{n-1}\binom{3n}{1}\cdot 10 + (-1)^{n-2}\binom{3n}{2}\cdot 10^2 + \ldots + 10^{3n} =$
$= 729^n,\ n \in N.$

163. Ako je $S_m = 1^m + 2^m + \ldots + n^m$, tada je $(n+1)^{m+1} =$
$= \binom{m+1}{1}S_m + \binom{m+1}{2}S_{m-1} + \ldots + \binom{m+1}{m}S_1 + n + 1,\ n, m \in N.$

164. $(n+1) \mid \binom{2n}{n},\ n \in N.$

165. $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \in N,\ n \in N.$

166. $\binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} - \ldots + (-1)^m\binom{n+1}{m} = (-1)^m\binom{n}{m},\ n, m \in N.$

167. $\sum_{i=0}^{n} (i+1)\binom{n}{i}^2 = (n+2)\binom{2n-1}{n},\ n \in N.$

168. $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n,\ n \geq 2.$

169. $n! > 2^{n-1},\ n \geq 3.$

170. $n! < \sqrt{2^{n(n+1)}},\ n \geq 3.$

171. $(n!)^2 > n^{2n},\ n \geq 2.$

172. $\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2},\ n \geq 2.$

173. $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n,\ n \geq 6.$

174. $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3,\ n \in N.$

175. Za derivaciju potencije vrijedi $(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in N.$

Dokaz:

(a) Za $n=1$ tvrdnja vrijedi.

(b) Pretpostavimo da vrijedi $(x^k)' = kx^{k-1}$.

(c) Dokazati da vrijedi $(x^{k+1})' = (k+1)x^k$.

Imamo: $(x^{k+1})' = (x^k\cdot x)' = (x^k)'\cdot x + x^k\cdot x'$ (po pravilu derivacije produkta) $\overset{(b)}{=} kx^{k-1}\cdot x + x^k\cdot 1 = (k+1)x^k$, Š.T.D.

176. Za totalni diferencijal n-tog reda funkcije $z = z(x,y)$ vrijedi:
$$d^n z = \sum_{n=0}^{n} \frac{{}^n z}{x^{n-m}\,y^m}\, dx^{n-m}dy^m,\ n \in N.$$

177. Za integral $I_n = \int \cos^n x\, dx$ vrijedi:
$I_n = \frac{1}{n}\sin x\cdot\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}I_{n-2},\ n \geq 2.$

178. $I_n = \int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}\cos x\cdot\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n}I_{n-2},\ n \geq 2.$

179. $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2},\ n \geq 2.$

180. $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2},\ n \geq 2.$

E . ZADACI SA NATJECANJA

181. $\sum_{n=1}^{2n} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \sum_{n=n+1}^{2n} \frac{1}{n}.\ n \in N.$ (Općinsko natjecanje SR Srbije-1982.g.-II r.).

182. $\sum_{n=2}^{n} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right).\ n > 1.$ (Republičko natjecanje SR Srbije-1974.g.-I r.).

183. $\sum_{n=1}^{n} 2^n(2^{2^{n-1}}+1) = 2 - \frac{2^{n+1}}{2^{2^n}-1}.\ n \in N.$ (Medjuopćinsko natjecanje SR Srbije-1980.g.-IV r.).

184. $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\cdot\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},\ n \in N.$ (Općinsko natjecanje SR Srbije-1979.g.-II r.).

185. $\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] = [nx],\ x \in R,\ n \in N,$ $[a]$=najveći cijeli dio od a koji nije veći od a.

(Republičko natjecanje SR Slovenije-1985.g.-III r.).

186. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}2\alpha \ldots \operatorname{tg}n\alpha = \frac{\operatorname{tg}n\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - n$, $n \in N$.
(Pokrajinsko natjecanje SAP Vojvodine-1988.g.-III r.).

187. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{3n+1} > 1$, $n \in N$. (Republičko natjecanje SR Makedonije-1988.g.-IV r.).

188. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$, $n \geq 2$. (Medjuopćinsko natjecanje SR Srbije-1977.g.-IV r.).

189. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} > 1$, $n \geq 2$. (Republičko natjecanje SR Bosne i Hercegovine-1987.g.-II r.).

190. $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3\cdot 5} \cdot \frac{3}{3\cdot 5\cdot 7} \ldots \frac{n}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n-1)} < \frac{1}{2}$, $n \in N$.
(Medjuopćinsko natjecanje SR Srbije-1977.g.-III_A r.).

191. $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \frac{2n-1}{n}$, $n > 3$. (Republičko natjecanje SR Srbije-1983.g.-III r.).

192. $2^n > n^2$, $n \geq 5$. (Općinsko natjecanje SR Bosne i Hercegovine-1987.g.-IV r.).

193. $(\frac{1}{3}n)^n < n!$, $n \in N$. (Republičko natjecanje SR Slovenije -1986.g.-IV r.).

194. $(3n)! > n^{3n}$, $n \in N$. (Republičko natjecanje SR Slovenije -1986.g.-IV r.).

195. $n! \geq \sqrt{n^n}$, $n \in N$. (Republičko natjecanje SR Hrvatske -1986.g.-III r.).

196. $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{6}{7} \ldots \frac{2n}{2n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n \geq 3$. (Republičko natjecanje SR Makedonije-1987.g.-II r.).

197. $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + n > n\sqrt[n]{n+1}$, $n > 1$. (Općinsko natjecanje SR Srbije-1981.g.-III_B r.).

198. $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_n} \geq \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + n - 1}$, $n \in N$, $x_i \in R (i=1,2,\ldots,n)$.
(Republičko natjecanje SR Slovenije-1988.g.-IV r.).

199. $\underbrace{\cos(\cos\ldots(\cos x)\ldots)}_{2n} > \underbrace{\sin(\sin\ldots(\sin x)\ldots)}_{2n}$, $n \in N$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
(Pokrajinsko natjecanje SAP Vojvodine-1988.g.-IV r.).

200. Ako su x_1 i x_2 nule polinoma $P(x) = x^2 - 1988x + 1$, tada je $x_1{}^n + x_2{}^n \in N$, $n \in N$.
(Pokrajinsko natjecanje SAP Vojvodine-1988.g.-IV r.).