Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** na dozvoli da skeniram sažetak predavanja "Tablično rješavanje jednadžbi" i objavim na svojim web stranicama.

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

Luka Čeliković

Tablično rješavanje nejednadžbi

Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, zove se polinom prvog stupnja.

U ovom izlaganju promatrat ćemo nejednadžbe koje se prikazane u nula-obliku, mogu prikazati u obliku umnoška i količnika polinoma prvog stupnja. Upoznat ćemo jedan način njihova rješavanja pomoću tablica. U tu svrhu prisjetimo se prvo grafa, toka i predznaka tog polinoma. Stoga razmotrimo:

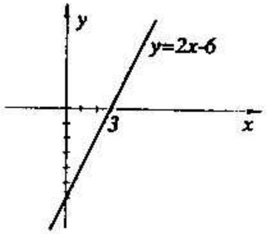
Primjer 1. Uz pomoć grafa i računski ispitati predznake ovih funkcija:
a) $f(x) = 2x - 6$, b) $f(x) = -x - 2$.

Rješenje.
a) $f(x) = 2x - 6$

x	1	2	3	4	5
y	-4	-2	0	2	4

Koeficijent smjera je pozitivan broj.

x	$-\infty < x < 3$	3	$3 < x < \infty$
$2x - 6$	$-$	0	$+$



Slika 1.

Do istog rezultata dolazimo i računski:

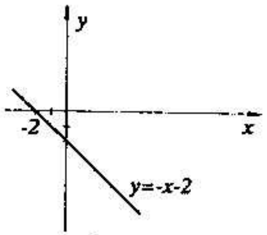
$$2x-6 \mathrel{\substack{\leq\\=\\>}} 0 \Leftrightarrow 2x \mathrel{\substack{\leq\\=\\>}} 6 \,|:2>0 \Leftrightarrow x \mathrel{\substack{\leq\\=\\>}} 3.$$

b) $f(x) = -x-2$

x	-4	-3	-2	-1	0
y	2	1	0	-1	-2

Koeficijent smjera je negativan broj.

x	$-\infty < x < -2$	-2	$-2 < x < \infty$
$-x-2$	$+$	0	$-$



Slika 2.

Do istog rezultata dolazimo i računski:

$$-x-2 \mathrel{\substack{\leq\\=\\>}} 0 \Leftrightarrow -x \mathrel{\substack{\leq\\=\\>}} 2 \Leftrightarrow x \mathrel{\substack{\geq\\=\\<}} -2.$$

Vratimo se sada na opći slučaj polinoma prvog stupnja $f(x) = ax+b$.

Za $a>0$ je $f(x) \mathrel{\substack{\leq\\=\\>}} 0 \Leftrightarrow ax+b \mathrel{\substack{\leq\\=\\>}} 0 \Leftrightarrow ax \mathrel{\substack{\leq\\=\\>}} -b \Leftrightarrow x \mathrel{\substack{\leq\\=\\>}} -\frac{b}{a}$, što se može prikazati tablicom

x	$-\infty < x < -b/a$	$-b/a$	$-b/a < x < \infty$
$ax+b$ $(a>0)$	$-$	0	$+$

Za $a<0$ je $f(x) \mathrel{\substack{\leq\\=\\>}} 0 \Leftrightarrow ax+b \mathrel{\substack{\leq\\=\\>}} 0 \Leftrightarrow ax \mathrel{\substack{\leq\\=\\>}} -b \Leftrightarrow x \mathrel{\substack{\geq\\=\\<}} -\frac{b}{a}$, što se može prikazati tablicom

x	$-\infty < x < -b/a$	$-b/a$	$-b/a < x < \infty$
$ax+b$ $(a<0)$	$+$	0	$-$

Ukratko, za $a>0$ imamo ovaj poredak: $-, 0, +$, dok za $a<0$ imamo: $+, 0, -$.

Riješimo sada u skupu realnih brojeva $\mathbf{R}$ nekoliko nejednadžbi.

Primjer 2. $(x-2)(3-2x) > 0$.

Rješenje. Nultočke polinoma $(x-2)(3-2x)$ poredane po veličini su $3/2$ i 2, pa tablica izgleda ovako:

x	$-\infty < x < 3/2$	$3/2$	$3/2 < x < 2$	2	$2 < x < \infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$3-2x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$(x-2)(3-2x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Rješenja nejednadžbe su svi realni brojevi iz intervala $\langle 3/2, 2\rangle$.

Napomenimo da smo ovaj primjer mogli riješiti i metodom razlikovanja slučajeva primjenom svojstva

$$AB>0 \Leftrightarrow ((A>0 \wedge B>0) \vee (A<0 \wedge B<0)).$$

Primjer 3. $\dfrac{2x+1}{x-3} \leq 0$.

Rješenje. $2x+1=0 \Rightarrow x=-1/2$, $x-3=0 \Rightarrow x=3$. Brojevi koji se unose u tablicu su $-1/2$ i 3.

x	$-\infty < x < -1/2$	$-1/2$	$-1/2 < x < 3$	3	$3 < x < \infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2x+1}{x-3}$	$+$	0	$-$		$+$

Rješenja nejednadžbe su $x \in [-1/2, 3\rangle$.

Napomenimo da smo primjer mogli riješiti i metodom razlikovanja slučajeva primjenom svojstva

$$A/B \leq 0 \Leftrightarrow ((A \geq 0 \wedge B<0) \vee (A \leq 0 \wedge B>0)).$$

Primjer 4. $\frac{x^2 - x - 6}{1 - x} \geq 0.$

Rješenje. Zadanu nejednadžbu možemo pisati u obliku

$$\frac{(x+2)(x-3)}{1-x} \geqslant 0.$$

Granice intervala koji se promatraju su -2, 1 i 3, pa tablica izgleda ovako:

x	$-\infty < x < -2$	-2	$-2 < x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$3 < x < \infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{(x+2)(x-3)}{1-x}$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$

Skup rješenja je $(-\infty, -2] \cup (1, 3]$.

Napomenimo da smo primjer mogli riješiti i metodom razlikovanja slučajeva primjenom svojstva

$$AB/C \geq 0 \Leftrightarrow ((A \geq 0 \land B \geq 0 \land C > 0) \lor (A \geq 0 \land B \leq 0 \land C < 0)$$
$$\lor (A \leq 0 \land B \geq 0 \land C < 0) \lor (A \leq 0 \land B \leq 0 \land C > 0)).$$

Primjer 5. $\frac{x+2}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} < 1.$

Rješenje. Danu nejednadžbu transformirajmo na sljedeći način

$$\frac{x+2}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x+1} - 1 < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{4-x^2}{(x-1)(x+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{(2-x)(2+x)}{(x-1)(x+1)} < 0.$$

Granice intervala su -2, -1, 1 i 2.

x		-2		-1		1		2	
$2-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(2-x)(2+x)}{(x-1)(x+1)}$	$-$	0	$+$		$-$		$+$	0	$-$

Skup rješenja je $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$.

Kako bismo riješili primjer metodom razlikovanja slučajeva?

Primjer 6. $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{(1-x)(x^2-25)} > 0.$

Rješenje. Zadanu nejednadžbu možemo pisati u obliku

$$\frac{x(x-3)^2}{(1-x)(x-5)(x+5)} > 0.$$

(Pokažite to !)

U tablicu unosimo intervale s granicama -5, 0, 1, 3, 5.

x		-5		0		1		3		5	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x(x-3)^2}{(1-x)(x-5)(x+5)}$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$+$		$-$

Skup rješenja je $(-5, 0) \cup (1, 3) \cup (3, 5)$.

Primijetimo da je $(x-3)^2 \geq 0$, tj. $(x-3)^2 > 0$ za $x \neq 3$ i $(x-3)^2 = 0$ za $x = 3$. Stoga smo, izbacujući $x = 3$, u tablici mogli izostaviti $(x-3)^2$.

Kako bismo riješili primjer metodom razlikovanja slučajeva?

Primjer 7. $\frac{-3x^2 + x - 2}{x^3 - 3x^2 + x - 3} \leq 1.$

Rješenje. Zadanu nejednadžbu transformiramo u oblik

$$\frac{1 - x^3}{x^3 - 3x^2 + x - 3} \leq 0,$$

odnosno

$$\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(x-3)(x^2+1)} \leq 0,$$
$$\frac{(1-x)((x+1/2)^2 + 3/4)}{(x-3)(x^2+1)} \leq 0.$$

Sada primjenom tablice imamo:

x		1		3	
$1-x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$1+x+x^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2+1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(x-3)(x^2+1)}$	$-$	0	$+$		$-$

Rješenja su svi realni brojevi koji su elementi unije intervala $(-\infty, 1]\cup(3,\infty)$.

Primijetimo da smo isti rezultat mogli dobiti i rješavanjem nejednadžbe $\frac{1-x}{x-3} \leq 0$. Zašto?

Zadaci za vježbu

Riješiti u skupu **R** nejednadžbe:

1. $x^2 - 5x + 6 \geq 0$. (Rješenje: $x \in (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$.)
2. $\frac{x+4}{5-x} < 0$. (Rješenje: $x \in (-\infty, -4) \cup (5, \infty)$.)
3. $4x - 9x^3 > 0$. (Rješenje: $x \in (-\infty, -2/3) \cup (0, 2/3)$.)
4. $\frac{x^2-1}{x^2+2x-3} \leq 0$. (Rješenje: $x \in (-3, -1]$.)
5. $\frac{2}{x} - \frac{10}{x-3} < 1$. (Rješenje: $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 0) \cup (3, \infty)$.)