Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** na dozvoli da skeniram knjižicu "Vektori (odabrani zadaci)" i objavim na svojim web stranicama.

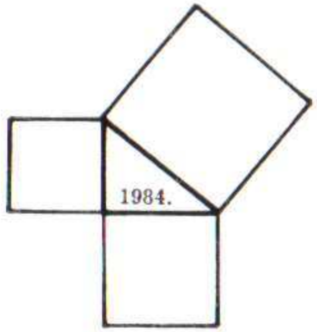
Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »PITAGORA«
BELI MANASTIR

PITAGORINI MATERIJALI ZA MLADE MATEMATIČARE
27

Luka Čeliković:

VEKTORI
(ODABRANI ZADACI)



Beli Manastir, 1990.

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA "P I T A G O R A" BELI MANASTIR

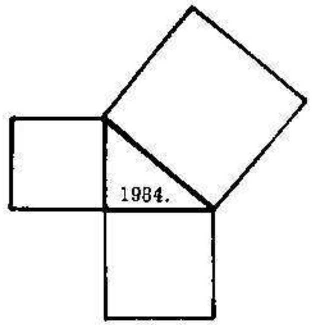
PITAGORINI MATERIJALI ZA MLADE MATEMATIČARE

27

Luka Čeliković:

V E K T O R I

(O D A B R A N I Z A D A C I)



Beli Manastir, 1990.

Luka Čeliković - VEKTORI (ODABRANI ZADACI)

Izdavač:

Društvo mladih matematičara "PITAGORA" Beli Manastir

Školska 3, 54300 Beli Manastir

Urednici:

Luka Čeliković

Milan Šarić

Tehnički urednik:

Branko Vujaklija

Korektura:

Anđa Mijatović

Denis Vidović

Tisak:

Grafičko poduzeće "SLOVO" Beli Manastir

VEKTORI

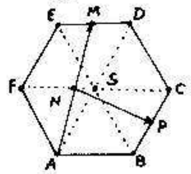
Za razumijevanje slijedećih zadataka učenici moraju poznavati definicije i osnovna svojstva slijedećih pojmova: vektor (duljina, pravac i orijentacija), suprotni vektor, nul-vektor, zbrajanje vektora (metode paralelograma, trokuta i mnogokuta), oduzimanje vektora (metode paralelograma i trokuta), radijus-vektor (posebno prikaz vektora $\overrightarrow{AB}$ pomoću radijus-vektora $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$: $\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$), množenje vektora skalarom (brojem), linearna zavisnost i nezavisnost vektora, skalarni produkt vektora ($\vec{a}.\vec{b}\overset{def.}{=}|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$, posebno $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=a^2$, $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$), prikaz vektora u koordinatnom sustavu ...

Neki zadaci zahtijevaju poznavanje trigonometrije.

Sve ovo je u programu redovne nastave matematike, pa se na tome nećemo zadržavati.

Zadatak 1 (Pokrajinsko natjecanje SAP Vojvodine, I r., 1980.): Neka je ABCDEF pravilan šesterokut, M središte stranice $\overline{DE}$, N središte dužine $\overline{AM}$ i P središte stranice $\overline{BC}$, izraziti vektor $\overrightarrow{NP}$ pomoću vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AF}$.

Rješenje:

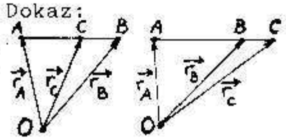


$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AS}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=$$
$$=2\overrightarrow{AF}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AS}=-\frac{1}{2}(2\overrightarrow{AF}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB})+$$
$$+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB})=$$
$$=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}.$$

Zadatak 2: Definicija: Neka su A,B,C tri kolinearne točke (leže na istome pravcu) i A≠B. Tada kažemo da točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru λ i pišemo $(ABC)=\lambda$ akko je $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{BC}$. Pri tome je C između točaka A i B za $\lambda<0$, izvan dužine $\overline{AB}$ za $\lambda>0$, odnosno C≡A za $\lambda=0$.

Zadatak: Neka su dane 3 kolinearne točke A,B,C za koje vrijedi $(ABC)=\lambda$ i neka je dano ishodište O. Ako su $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$ radijus-vektori točaka A i B, dokazati da je radijus-vektor $\vec{r}_C$ točke C dan izrazom: $\vec{r}_C=(\vec{r}_A-\lambda\vec{r}_B)/(1-\lambda)$.

Dokaz:



$$(ABC)=\lambda \Rightarrow \overrightarrow{AC}=\lambda.\overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{r}_C-\vec{r}_A=\lambda.(\vec{r}_C-\vec{r}_B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{r}_C(1-\lambda)=\vec{r}_A-\lambda\vec{r}_B \Rightarrow \vec{r}_C=(\vec{r}_A-\lambda\vec{r}_B)/(1-\lambda).$$

Zadatak 3: Ako je C središte dužine $\overline{AB}$, tada je $\vec{r}_C=(\vec{r}_A+\vec{r}_B)/2$.

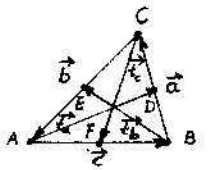
Dokaz:

Tvrdnja odmah proizlazi iz prethodnog zadatka za $\lambda=-1$.

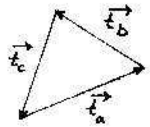
Zadatak 4: Dokazati da su težišnice trokuta paralelne i jednake stranicama nekog trokuta.

Dokaz:

Neka je ABC zadani trokut i D,E,F redom polovišta njegovih stranica $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$. Uvedemo li oznake $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{t}_a$,

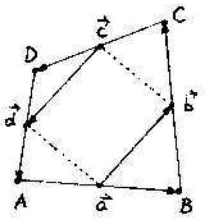


$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{t_b}$, $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{t_c}$, dobivamo: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$,
$\vec{t_a}=\vec{c}+\vec{a}/2$, $\vec{t_b}=\vec{a}+\vec{b}/2$, $\vec{t_c}=\vec{b}+\vec{c}/2$.
Zbrajanjem posljednje tri jednakosti izlazi $\vec{t_a}+\vec{t_b}+\vec{t_c}=\frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{3}{2}.\vec{0}=\vec{0}$, što znači da se od $\vec{t_a},\vec{t_b},\vec{t_c}$ može načiniti neki trokut.



Drugi način:
$\vec{t_a}=\overrightarrow{AD}=\vec{r_D}-\vec{r_A}=(\vec{r_B}+\vec{r_C})/2-\vec{r_A}=-\vec{r_A}+\vec{r_B}/2+\vec{r_C}/2$
i analogno tome $\vec{t_b}=\vec{r_A}/2-\vec{r_B}+\vec{r_C}/2$,
$\vec{t_c}=\vec{r_A}/2+\vec{r_B}/2-\vec{r_C}$, odakle je $\vec{t_a}+\vec{t_b}+\vec{t_c}=\vec{0}$.

Zadatak 5: Ako su A,B,C,D bilo koje točke u ravnini, a K,L,M,N redom polovišta dužina $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DA}$, tada je KLMN paralelogram. Dokazati !
Dokaz:



Uz oznake kao na slici imamo:
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$

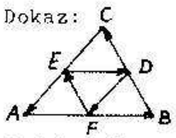
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{KL}=\vec{a}/2+\vec{b}/2\\ \overrightarrow{MN}=\vec{c}/2+\vec{d}/2\end{array}\right| + \Rightarrow \overrightarrow{KL}+\overrightarrow{MN}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})/2=\vec{0}\Rightarrow$$

$\overrightarrow{KL}=-\overrightarrow{MN}\Rightarrow$ KLMN je paralelogram.
Drugi način:
$\overrightarrow{KL}=\vec{r_L}-\vec{r_K}=(\vec{r_B}+\vec{r_C})/2-(\vec{r_A}+\vec{r_B})/2=(\vec{r_C}-\vec{r_A})/2=$
$=\overrightarrow{AC}/2$.
Isto se dobiva i za $\overrightarrow{NM}$, pa je KLMN paralelogram.

Zadatak 6: Dokazati teorem o srednjici trokuta: Ako su D,E,F polovišta stranica $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ trokuta ABC, tada vrijedi:

$$\overrightarrow{ED}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{FE}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{DF}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$$

Dokaz:

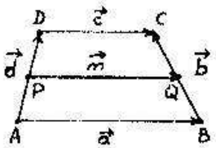


$\overrightarrow{ED}=\vec{r_D}-\vec{r_E}=(\vec{r_B}+\vec{r_C})/2-(\vec{r_C}+\vec{r_A})/2=(\vec{r_B}-\vec{r_A})/2=$
$=\overrightarrow{AB}/2$.
Analogno se pokazuje da vrijedi:
$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BC}/2$ i $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{CA}/2$.

Zadatak 7: Dokazati teorem o srednjici trapeza: Ako je ABCD dani trapez i P,Q središta krakova $\overline{AD},\overline{BC}$, tada vrijedi:

$$\overrightarrow{PQ}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}).$$

Dokaz:



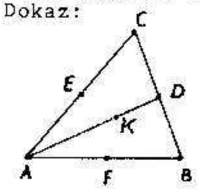
Uz oznake kao na slici imamo:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{m}=-\vec{d}/2+\vec{a}+\vec{b}/2\\ \vec{m}=\vec{d}/2+\vec{c}-\vec{b}/2\end{array}\right| + \Rightarrow 2\vec{m}=\vec{a}+\vec{c}\Rightarrow \vec{m}=(\vec{a}+\vec{c})/2.$$

Drugi način:
$\overrightarrow{PQ}=\vec{r_Q}-\vec{r_P}=(\vec{r_B}+\vec{r_C})/2-(\vec{r_A}+\vec{r_D})/2=$
$=((\vec{r_B}-\vec{r_A})+(\vec{r_C}-\vec{r_D}))/2=$
$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})/2$.

Zadatak 8: Dokazati da se sve tri težišnice trokuta ABC sijeku u jednoj točki (težištu trokuta), koja svaku od tih težiš-

nica dijeli u omjeru $\lambda=-2$ i dokazati da je $\vec{r_T}=\frac{1}{3}(\vec{r_A}+\vec{r_B}+\vec{r_C})$.
Dokaz:

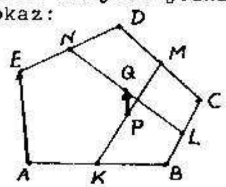


Neka je ABC zadani trokut i D,E,F redom središta stranica $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$. Neka je nadalje K točka dužine $\overline{AD}$, takva da je $(ADK)=-2$. Tada je $\vec{r_K}=(\vec{r_A}+2\vec{r_D})/(1+2)=$
$=(\vec{r_A}+\vec{r_B}+\vec{r_C})/3$.
Slično se dobije i za točke $L\in\overline{BE}$, $(BEL)=-2$, odnosno $M\in\overline{CF}$, $(CFM)=-2$, pa je $K\equiv L\equiv M$, što označavamo sa T.

Zadatak 9: Točka T je težište trokuta ABC akko vrijedi $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$.

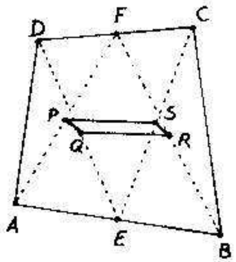
Dokaz:
Nužnost: T težište trokuta ABC $\Rightarrow$ $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=(\vec{r_A}-\vec{r_T})+(\vec{r_B}-\vec{r_T})+$
$+(\vec{r_C}-\vec{r_T})=(\vec{r_A}+\vec{r_B}+\vec{r_C})-3\vec{r_T}=3\vec{r_T}-3\vec{r_T}=\vec{0}$.
Dovoljnost: $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}\Rightarrow(\vec{r_A}-\vec{r_T})+(\vec{r_B}-\vec{r_T})+(\vec{r_C}-\vec{r_T})=\vec{0}\Rightarrow$
$\Rightarrow\vec{r_T}=(\vec{r_A}+\vec{r_B}+\vec{r_C})/3\Rightarrow$ T težište trokuta ABC.

Zadatak 10 (Općinsko natjecanje SR Hrvatske, II r., 1989.): U konveksnom peterokutu ABCDE točke K,L,M,N, su redom polovišta stranica $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DE}$. Dokazati da je dužina koju određuju polovišta dužina $\overline{KM}$ i $\overline{LN}$ paralelna sa stranicom $\overline{AE}$, te da je njena duljina jednaka četvrtini duljine stranice $\overline{AE}$.
Dokaz:



$\overrightarrow{PQ}=\vec{r_Q}-\vec{r_P}=(\vec{r_L}+\vec{r_N})/2-(\vec{r_K}+\vec{r_M})/2=$
$=((\vec{r_B}+\vec{r_C})/2+(\vec{r_D}+\vec{r_E})/2)/2-$
$-((\vec{r_A}+\vec{r_B})/2+(\vec{r_C}+\vec{r_D})/2)/2=$
$=(\vec{r_E}-\vec{r_A})/4=$
$=\overrightarrow{AE}/4$.

Zadatak 11 (Općinsko natjecanje SR Hrvatske, III r., 1986. ; Međuopćinsko natjecanje SR Srbije, I r., 1987.): Točke E i F su središta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ četverokuta ABCD. Dokazati da su središta dužina $\overline{AF},\overline{BF},\overline{CE},\overline{DE}$ vrhovi paralelograma.
Dokaz:



Neka su P,Q,R,S redom središta dužina $\overline{AF},\overline{CE},\overline{BF},\overline{DE}$. Tada imamo:

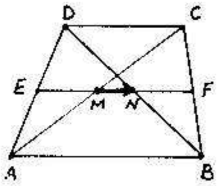
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EQ}\\ \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CQ}\end{array}\right| + \left| :2\right. \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FC})/2 .$$

Isto se dobiva i za $\overrightarrow{SR}$, pa iz $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ slijedi da je PQRS paralelogram.
Drugi način:
$\overrightarrow{PQ}=\vec{r_Q}-\vec{r_P}=(\vec{r_D}+\vec{r_E})/2-(\vec{r_A}+\vec{r_F})/2=$
$=(\vec{r_D}+(\vec{r_A}+\vec{r_B})/2)/2-(\vec{r_A}+(\vec{r_C}+\vec{r_D})/2)/2=$
$=(-\vec{r_A}+\vec{r_B}-\vec{r_C}+\vec{r_D})/4$.
Isto se dobiva i za $\overrightarrow{SR}$, pa je PQRS paralelogram.

Zadatak 12: Neka je ABCD trapez i M,N sjecišta dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sa srednjicom $\overline{EF}$ trapeza. Dokazati da je

$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})$.

Dokaz:



Tvrdnja zadatka odmah proizlazi zbrajanjem jednakosti $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$ i $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}$, te dijeljenjem dobivene jednakosti sa 2. Pri tome je korištena činjenica da srednjica $\overline{EF}$ trapeza svojim sjecištima M,N sa dijagonalama $\overline{AC},\overline{BD}$ trapeza raspolavlja te dijagonale.

Drugi način:

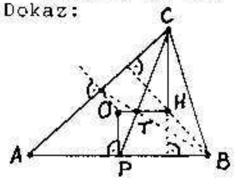
$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{r_N}-\overrightarrow{r_M}=(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_D})/2-(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_C})/2=$
$=(\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_A})/2-(\overrightarrow{r_C}-\overrightarrow{r_D})/2=\overrightarrow{AB}/2-\overrightarrow{DC}/2=$
$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})/2$.

Zadatak 13: Ako su O,T,H redom središte opisane kružnice, težište, ortocentar trokuta ABC, dokazati da je tada:

a) $\overrightarrow{TH}=2\overrightarrow{OT}$,

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ **(Hamiltonov teorem) (Općinsko natjecanje SR Hrvatske, IV r., 1988.).**

Dokaz:

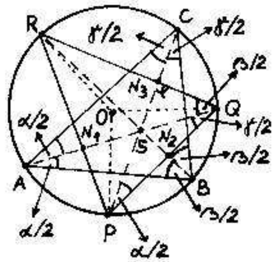


a) O,T,H su kolinearne točke (leže na tzv. Eulerovom pravcu).
Iz sličnosti trokuta PTO i CTH i činjenice da je $|CT|=2|TP|$ (svojstvo težišta trokuta) slijedi da je $\overrightarrow{TH}=2\overrightarrow{OT}$.

b) $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ (prema zadatku 8, uzimajući točku O za ishodište).

Zadatak 14 (SFRJ, II r., 1988.): Neka je O središte opisane kružnice trokuta ABC. Označimo sa P,Q,R redom središta lukova $\widehat{AB},\widehat{BC},\widehat{CA}$ koji ne sadrže redom točke C,A,B. Ako za točku X vrijedi $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$, dokazati da je X središte upisane kružnice trokuta ABC.

Dokaz



Prvo imamo da su C,S,P kolinearne točke ($\widehat{AP}=\widehat{PB}$, $\measuredangle ACS=\measuredangle SCB=\gamma/2$, S=središte upisane kružnice trokuta ABC) i analogno tome da su B,S,R, te A,S,Q kolinearne točke. Nadalje je $\measuredangle CPQ=\measuredangle CAQ=\alpha/2$ (kutevi nad istim kružnim lukom $\widehat{QC}$) i analogno tome $\measuredangle PQA=\gamma/2$ i $\measuredangle AQR=\beta/2$, pa iz odnosa kuteva u trokutu SQN_3 izlazi $\beta/2+(\alpha/2+\gamma/2)+\varphi=180^\circ$, tj. $\varphi=90^\circ$, odnosno $\overline{PN_3}\perp\overline{QR}$. Analogno izlazi da je $\overline{QN_1}\perp\overline{RP}$ i $\overline{RN_2}\perp\overline{PQ}$, pa je S ortocentar trokuta PQR.

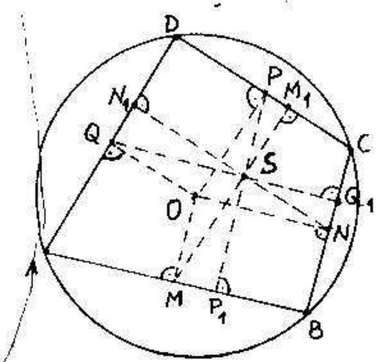
Prema prethodnom zadatku tada vrijedi $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OS}$ (*).

Iz $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$ i (*) slijedi da je $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OS}$, tj. $X\equiv S$, što se i tvrdilo.

Zadatak 15 (SFRJ, III i IV r., 1986.): Iz središta svake stranice tetivnog četverokuta konstruirana je normala na suprotnu stranicu. Dokazati da se ove 4 normale sijeku u jednoj točki.

Dokaz:

Neka je ABCD zadani tetivni četverokut upisan u kružnicu čije

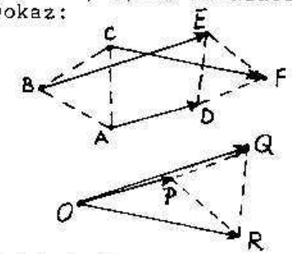


je središte točka O, a $\overline{MM_1},\overline{NN_1},\overline{PP_1},\overline{QQ_1}$ normale iz polovišta M, N,P,Q stranica $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DA}$ na suprotne stranice tog četverokuta. Neka je nadalje $\overline{MM_1}\cap\overline{PP_1}=S$.

Odmah se vidi da je MSPO paralelogram, pa vrijedi $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})/2$. Analogno izlazi da za paralelogram NS_1QO, gdje je $S_1=\overline{NN_1}\cap\overline{QQ_1}$, vrijedi $\overrightarrow{OS_1}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})/2$, pa je $S_1\equiv S$, tj. sve 4 normale se sijeku u istoj točki S.

Zadatak 16 (SSSR, 1984.): U ravnini su dana dva jednakostranična trokuta ABC i DEF, oba negativno orijentirana. Iz proizvoljne točke O polaze vektori $\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}$ jednaki redom vektorima $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}$. Dokazati da je trokut PQR jednakostraničan.

Dokaz:

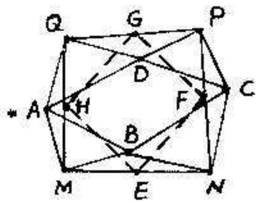


$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{AD}=$
$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{AB}$,
$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{AD}=$
$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{AC}$.

Kako vektori $\overrightarrow{DF}$ i $\overrightarrow{AC}$ nastaju rotacijom vektora $\overrightarrow{DE}$ i $\overrightarrow{AB}$ oko D i A za -60°, tada i vektor $\overrightarrow{PR}$ nastaje rotacijom vektora $\overrightarrow{PQ}$ oko P za -60°, pa je trokut PQR jednakostraničan.

Zadatak 17: Zadan je konveksan četverokut ABCD. Ako su BAM, CBN, DCP, ADQ pravokutni jednakokračni trokuti sa pravim kutevima u točkama M,N,P,Q, te ako su E,F,G,H polovišta dužina $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{QM}$, tada je EFGH kvadrat. Dokazati !

Dokaz:



Prema zadatku 5 je EFGH paralelogram. Iz $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CP}$ i $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{DP}$ izlazi $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{MP}/2=(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MP})/4=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{DP})/4$. Rotacijom $\varphi(E,90^\circ)$ dobivamo $\varphi(\overrightarrow{EF})=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{CP})/4$.
S druge strane iz $\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AQ}$ i $\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DQ}$ izlazi $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{NP}/2=(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DQ})/4=\varphi(\overrightarrow{EF})$.
Dakle, $\overrightarrow{EF}$ rotacijom oko E za 90° prelazi u $\overrightarrow{EH}$, tj. $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{EH}$ i $|\overrightarrow{EF}|=|\overrightarrow{EH}|$, pa je EFGH kvadrat.

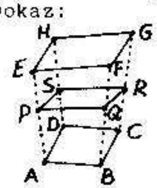
Zadatak 18: **Na** stranicama $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ trokuta ABC su redom točke D,E,F, takve da je $(BCD)=(CAE)=(ABF)=\lambda$. Dokazati da je težište T trokuta ABC ujedno i težište trokuta DEF.

Dokaz:

$(\overrightarrow{r_D}+\overrightarrow{r_E}+\overrightarrow{r_F})/3=((\overrightarrow{r_B}-\lambda\overrightarrow{r_C})/(1-\lambda)+(\overrightarrow{r_C}-\lambda\overrightarrow{r_A})/(1-\lambda)+(\overrightarrow{r_A}-\lambda\overrightarrow{r_B})/(1-\lambda))/3=$
$=((1-\lambda)(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C})/(1-\lambda))/3=(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C})/3=\overrightarrow{r_T}$, pa je prema zadatku 8 tvrdnja zadatka očigledna.

Zadatak 19 (Republičko natjecanje SR Bosne i Hercegovine, III r., 1974.): Dani su paralelogrami ABCD, EFGH i točke P, Q, R, S na dužinama $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}, \overline{DH}$, takve da je $(AEP)=(BFQ)=(CGR)=(DHS)=\lambda$. Dokazati da je PQRS paralelogram.

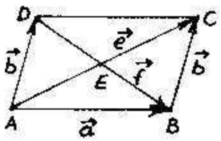
Dokaz:



$$\overrightarrow{PQ}=\vec{r}_Q-\vec{r}_P=(\vec{r}_B-\lambda\vec{r}_F)/(1-\lambda)-(\vec{r}_A-\lambda\vec{r}_E)/(1-\lambda)=$$
$$=((\vec{r}_B-\vec{r}_A)-\lambda(\vec{r}_F-\vec{r}_E))/(1-\lambda)=(\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{EF})/(1-\lambda)=$$
$$=(\overrightarrow{DC}-\lambda\overrightarrow{HG})/(1-\lambda)=((\vec{r}_C-\vec{r}_D)-\lambda(\vec{r}_G-\vec{r}_H))/(1-\lambda)=$$
$$=((\vec{r}_C-\lambda\vec{r}_G)-(\vec{r}_D-\lambda\vec{r}_H))/(1-\lambda)=\vec{r}_R-\vec{r}_S=$$
$=\overrightarrow{SR}$, pa je PQRS paralelogram.

Zadatak 20: Dokazati da se dijagonale paralelograma raspolavljaju.

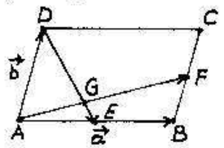
Dokaz:



Uz oznake kao na slici imamo: $\vec{e}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{f}=\vec{a}-\vec{b}$. Neka je $\overrightarrow{AE}=\lambda\vec{e}$, $\overrightarrow{EB}=\mu\vec{f}$. Tada iz $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}$ dobivamo $\vec{a}=\lambda(\vec{a}+\vec{b})+\mu(\vec{a}-\vec{b})$, tj. $(\lambda+\mu-1)\vec{a}+(\lambda-\mu)\vec{b}=\vec{0}$. Kako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno nezavisni, tada je $\lambda+\mu-1=0$ i $\lambda-\mu=0$, tj. $\lambda=\mu=1/2$, pa je $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}/2$, $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{DB}/2$, tj. E je zajedničko središte dijagonala paralelograma.

Zadatak 21 (Općinsko natjecanje SR Hrvatske, III r., 1990.): E i F su polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ paralelograma ABCD, a G sjecište dužina $\overline{AF}$ i $\overline{DE}$. U kojim omjerima točka G dijeli dužine $\overline{AF}$ i $\overline{DE}$?

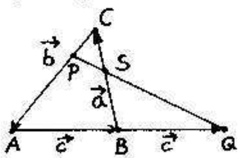
Rješenje:



$\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AF}=\lambda(\vec{a}+\vec{b}/2)$, $\overrightarrow{GE}=\mu\overrightarrow{DE}=\mu(\vec{a}/2-\vec{b})$, $\overrightarrow{AE}=\vec{a}/2$,
$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AE} \Rightarrow \lambda(\vec{a}+\vec{b}/2)+\mu(\vec{a}/2-\vec{b})=\vec{a}/2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\lambda+\mu/2-1/2)\vec{a}+(\lambda/2-\mu)\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda+\mu/2-1/2=0$ i $\lambda/2-\mu=0 \Rightarrow \lambda=2/5$ i $\mu=1/5 \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AF}$ i $\overrightarrow{GE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DE} \Rightarrow$
$\Rightarrow (AFG)=-2/3$ i $(DEG)=-1/4$.

Zadatak 22: Neka je P točka koja stranicu $\overline{AC}$ trokuta ABC dijeli u omjeru -3, a Q točka pravca AB za koju je $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BQ}$. Izračunati omjere u kojima presjek S dužina BC i PQ dijeli te dužine.

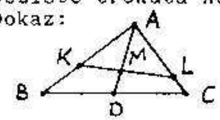
Rješenje:



$\overrightarrow{BC}=\vec{a}=-(\vec{b}+\vec{c})$, $(ACP)=-3 \Rightarrow \overrightarrow{CP}=\frac{1}{4}\vec{b}$ i $\overrightarrow{PA}=\frac{3}{4}\vec{b}$,
$\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{4}\vec{b}+2\vec{c}$, $\overrightarrow{SC}=\lambda\overrightarrow{BC}=-\lambda(\vec{b}+\vec{c})$, $\overrightarrow{PS}=\mu\overrightarrow{PQ}=$
$=\mu(\frac{3}{4}\vec{b}+2\vec{c})$, $\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CP}=\vec{0} \Rightarrow (\lambda-\frac{3}{4}\mu-\frac{1}{4})\vec{b}+$
$+(\lambda-2\mu)\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow \lambda=\frac{2}{5}$ i $\mu=\frac{1}{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow (BCS)=-3/2$ i $(PQS)=-1/4$.

Zadatak 23 (Republičko natjecanje SR Srbije, III$_A$ i IV r., 1989.): Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC dane su redom točke K i L, takve da je $|KB|/|AK|+|LC|/|AL|=1$ (*). Dokazati da težište trokuta ABC pripada dužini $\overline{KL}$.

Dokaz:

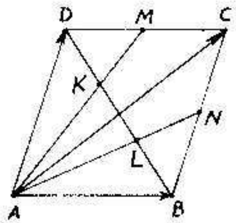


Neka je $|KB|/|AK|=m$ (**). Tada iz (*) slijedi da je $|LC|/|AL|=1-m$ (***). Neka je nadalje D središte stranice $\overline{BC}$ i $M=$

$=\overline{AD}\cap\overline{KL}$. Uvedemo li oznake $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\lambda(\vec{b}+\vec{c})$, tada je $\vec{c}=\overrightarrow{AB}=(m+1)\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{KB}=\frac{1}{m+1}\vec{c}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}=(2-m)\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2-m}\vec{b}$, pa iz $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AL}$ slijedi $\lambda(\vec{b}+\vec{c})=\vec{c}/(m+1)+\vec{b}/(2-m)$, tj. $(\lambda-\frac{1}{2-m})\vec{b}+(\lambda-\frac{1}{m+1})\vec{c}=\vec{0}$.
Zbog linearne nezavisnosti vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je $\lambda-1/(2-m)=0$ i $\lambda-1/(m+1)=0$, tj. $\lambda=2/3$, što znači da je M težište trokuta ABC.

Zadatak 24: Točke M, N su središta stranica $\overline{CD}, \overline{BC}$ konveksnog četverokuta ABCD. Ako pravci AM, AN dijele dijagonalu $\overline{BD}$ na 3 jednaka dijela, tada je ABCD paralelogram. Dokazati !

Dokaz:

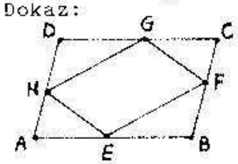


$\overrightarrow{AC}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK}=r\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}=s\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}=$
$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,
$\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AD} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=r\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}$
$=r(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})/2-\overrightarrow{AD}$
$=r((p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AD})/2-\overrightarrow{AD} \Rightarrow$
$\Rightarrow (pr/2-1/3)\overrightarrow{AB}+((q+1)r/2-2/3)\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.
Zbog linearne nezavisnosti vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ izlazi: $pr/2-1/3=0$ i $(q+1)r/2-2/3=0$, odakle je $q=2p-1$.

Analogno iz $\overrightarrow{DL}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{LB}$, tj. iz $((p+1)s/2-2/3)\overrightarrow{AB}+(qs/2-1/3)\overrightarrow{AD}=\vec{0}$ izlazi $p=2q-1$. Iz $p=2q-1$ i $q=2p-1$ izlazi $p=q=1$ (pa je $r=s=2/3$), a odatle $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, što znači da je ABCD paralelogram.

Zadatak 25: Ako vrhovi E, F, G, H paralelograma EFGH pripadaju redom stranicama $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ paralelograma ABCD, tada dijagonale oba paralelograma imaju zajedničko središte. Dokazati !

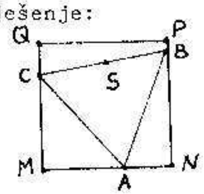
Dokaz:



Neka je $\overrightarrow{AE}=p\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}=q\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CG}=r\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DH}=s\overrightarrow{DA}$. Tada je $\overrightarrow{EB}=(1-p)\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GD}=(1-r)\overrightarrow{CD}$. Kako je EFGH paralelogram, tada je $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}=\vec{0}$, tj.
$(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF})+(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DH})=\vec{0}$
$(1-p)\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{BC}+(1-r)\overrightarrow{CD}+s\overrightarrow{DA}=\vec{0}$
$(1-p)\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{BC}-(1-r)\overrightarrow{AB}-s\overrightarrow{BC}=\vec{0}$
$(r-p)\overrightarrow{AB}+(q-s)\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.
Zbog linearne nezavisnosti vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ izlazi $r-p=0$ i $q-s=0$, tj. $r=p$ i $q=s$, pa je $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CG}=p\overrightarrow{AB}+r\overrightarrow{CD}=p\overrightarrow{AB}+p\overrightarrow{CD}=p(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=p.\vec{0}=\vec{0}$, što znači da je AECG paralelogram, tj. $\overline{AC}$ i $\overline{EG}$ se raspolavljaju. Analogno iz $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DH}=\vec{0}$ izlazi da je BFDH paralelogram, tj. da se $\overline{BD}$ i $\overline{FH}$ raspolavljaju.
Kako se $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, te $\overline{EG}$ i $\overline{HF}$ raspolavljaju, tvrdnja zadatka je očigledna.

Zadatak 26: Zadan je kvadrat MNPQ jedinične površine i točke: A na stranici MN, B na polupravcu NP i C na polupravcu MQ, takve da je ABC jednakostraničan trokut. Naći geometrijsko mjesto: a) središta S stranica $\overline{BC}$, b) težišta T trokuta ABC.

Rješenje:



a) Neka je $\overrightarrow{MN}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MQ}=\vec{b}$, $\overrightarrow{MA}=\lambda\vec{a}$, $0\le\lambda\le 1$, $\overrightarrow{NB}=\mu\vec{b}$, $\mu\in R^+$, $\overrightarrow{MC}=\nu\vec{b}$, $\nu\in R^+$. Tada je $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB}=(1-\lambda)\vec{a}+\mu\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QC}=(1-\mu)\vec{b}-\vec{a}-(1-\nu)\vec{b}=-\vec{a}+(\nu-\mu)\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}=-\nu\vec{b}+\lambda\vec{a}=\lambda\vec{a}-\nu\vec{b}$.
Iz $|AB|=|BC|=|CA|$ slijedi redom
$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{CA}^2$, $((1-\lambda)\vec{a}+\mu\vec{b})^2=(-\vec{a}+(\nu-\mu)\vec{b})^2=$

$=(\lambda\vec{a}-\nu\vec{b})^2$, $(1-\lambda)^2+\mu^2=1+(\nu-\mu)^2=\lambda^2+\nu^2$ (jer je $\vec{a}^2=\vec{b}^2=1$ i $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$), $\mu=(\lambda+1)\sqrt{3}/3$ i $\nu=(2-\lambda)\sqrt{3}/3$, $\overrightarrow{MB}=\vec{a}+\vec{b}(\lambda+1)\sqrt{3}/3$ i $\overrightarrow{MC}=\vec{b}(2-\lambda)\sqrt{3}/3$, $\overrightarrow{MS}=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})/2=\vec{a}/2+\vec{b}\sqrt{3}/2$, pa je S čvrsta točka, nezavisna od položaja točaka B i C.

b) $\overrightarrow{MT}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})/3=(\lambda\vec{a}+\vec{a}+\sqrt{3}(\lambda+1)\vec{b}/3+\sqrt{3}(2-\lambda)\vec{b}/3)/3=$ $=((\lambda+1)\vec{a}+\sqrt{3}\vec{b})/3=(\lambda+1)\vec{a}/3+\sqrt{3}\vec{b}/3$, $0\le\lambda\le 1$.

Skup svih težišta T jednakostraničnog trokuta ABC je dužina T_1T_2, pri čemu je $\overrightarrow{MT_1}=\vec{a}/3+\sqrt{3}\vec{b}/3$, $\overrightarrow{MT_2}=2\vec{a}/3+\sqrt{3}\vec{b}/3$.

Zadatak 27: Dokazati da točke A,B,C pripadaju jednom pravcu (kolinearne su) akko postoje realni brojevi α,β,γ takvi da je $\alpha\vec{r}_A+\beta\vec{r}_B+\gamma\vec{r}_C=\vec{0}$ i $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Dokaz:

Nužnost: Neka su A,B,C različite kolinearne točke i neka je $(ABC)=\lambda$, tj. $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{BC}$. Tada je $\vec{r}_C-\vec{r}_A=\lambda(\vec{r}_C-\vec{r}_B)$, tj. $-1\vec{r}_A+\lambda\vec{r}_B+(1-\lambda)\vec{r}_C=\vec{0}$. Stavimo li $\alpha=-1$, $\beta=\lambda$, $\gamma=1-\lambda$, dobivamo $\alpha+\beta+\gamma=0$ i $\alpha\vec{r}_A+\beta\vec{r}_B+\gamma\vec{r}_C=\vec{0}$.

Dovoljnost: Neka za različite točke A,B,C vrijedi $\alpha\vec{r}_A+\beta\vec{r}_B+\gamma\vec{r}_C=\vec{0}$, $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha,\beta,\gamma\in R$. Tada je $\gamma=-\alpha-\beta$, pa imamo redom $\alpha\vec{r}_A+\beta\vec{r}_B+(-\alpha-\beta)\vec{r}_C=\vec{0}$, $\alpha(\vec{r}_A-\vec{r}_C)+\beta(\vec{r}_B-\vec{r}_C)=\vec{0}$, $\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{CB}=-\frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{CA}$, što znači da su A,B,C kolinearne točke.

Zadatak 28: Neka su A,B različite točke pravca p, a O ishodište. Tada je $M\in p$ akko $\exists\alpha,\beta\in R$, $\alpha+\beta=1$, $\vec{r}_M=\alpha\vec{r}_A+\beta\vec{r}_B$.

Dokaz:

Nužnost: Neka je $A\neq B$ i $M\in p=AB$. Tada su A,B,M kolinearne točke, pa po prethodnom zadatku imamo redom $\exists\lambda,\mu,\nu\in R$, $\lambda+\mu+\nu=0$ i $\lambda\vec{r}_A+\mu\vec{r}_B+\nu\vec{r}_M=\vec{0}$ (pri čemu je $\nu\neq 0$ jer bi u protivnom bilo $\lambda=-\mu$, $\vec{r}_A=\vec{r}_B$, $A\equiv B$, što je kontradikcija sa $A\neq B$), $\lambda+\mu+\nu=0$ i $-\frac{\lambda}{\nu}\vec{r}_A-\frac{\mu}{\nu}\vec{r}_B-\vec{r}_M=\vec{0}$, odnosno (stavljajući $\alpha=-\frac{\lambda}{\nu}$, $\beta=-\frac{\mu}{\nu}$) $-\nu\alpha-\nu\beta+\nu=0$ i $\alpha\vec{r}_A+\beta\vec{r}_B=\vec{r}_M$, tj. $\alpha+\beta=1$ i $\alpha\vec{r}_A+\beta\vec{r}_B=\vec{r}_M$.

Dovoljnost: Neka $\exists\alpha,\beta\in R$, $\alpha+\beta=1$ i $\vec{r}_M=\alpha\vec{r}_A+\beta\vec{r}_B$. Stavljajući $\gamma=-1$, dobivamo $\alpha+\beta+\gamma=0$ i $\alpha\vec{r}_A+\beta\vec{r}_B+\gamma\vec{r}_M=\vec{0}$, pa su po prethodnom zadatku točke A,B,M kolinearne, tj. $M\in p=AB$.

Zadatak 29: Točka M je na pravcu AB akko $\exists s_1,s_2\in R$, $\vec{r}_M=\dfrac{s_1\vec{r}_A+s_2\vec{r}_B}{s_1+s_2}$.

Dokaz:

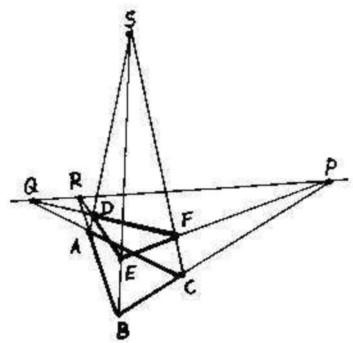
Stavljajući $\alpha=s_1/(s_1+s_2)$ i $\beta=s_2/(s_1+s_2)$, prema prethodnom zadatku odmah dobivamo tvrdnju ovog zadatka.

Zadatak 30: Definicija: Dva trokuta ABC i DEF su centralno perspektivna s obzirom na centar S ako se pravci AD,BE i CF sijeku u točki S.

Zadatak **(Dezargov teorem)**: Ako su dva trokuta ABC i DEF centralno perspektivna s obzirom na centar S, tada su presječne točke P,Q,R pravaca BC i EF, CA i FD, AB i DE kolinearne.

Dokaz:

Neka je $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{SD}=\lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{SE}=\mu\vec{b}$, $\overrightarrow{SF}=\nu\vec{c}$. Tada je (prema zadatku 28) $\overrightarrow{SP}=\alpha\overrightarrow{SB}+\beta\overrightarrow{SC}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$, $\alpha+\beta=1$ i $\overrightarrow{SP}=\delta\overrightarrow{SE}+\varepsilon\overrightarrow{SF}=\delta\mu\vec{b}+\varepsilon\nu\vec{c}$, $\delta+\varepsilon=$

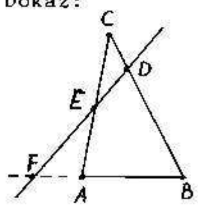


$=1$, pa je $\alpha=\delta\mu$, $\beta=\varepsilon\nu$. Kako je $\beta=1-\alpha$, $\varepsilon=1-\delta$, tada je $\delta=(1-\nu)/(\mu-\nu)$, $\varepsilon=(\mu-1)/(\mu-\nu)$, pa je $\overrightarrow{SP}=\dfrac{(1-\nu)\overrightarrow{SE}+(\mu-1)\overrightarrow{SF}}{\mu-\nu}$. Analogno izlazi $\overrightarrow{SQ}=\dfrac{(1-\lambda)\overrightarrow{SF}+(\nu-1)\overrightarrow{SD}}{\nu-\lambda}$ i $\overrightarrow{SR}=\dfrac{(1-\mu)\overrightarrow{SD}+(\lambda-1)\overrightarrow{SE}}{\lambda-\mu}$.

Iz posljednje 3 jednakosti dobivamo da je $(1-\lambda)(\mu-\nu)\overrightarrow{SP}+(1-\mu)(\nu-\lambda)\overrightarrow{SQ}+(1-\nu)(\lambda-\mu)\overrightarrow{SR}=\vec{0}$, gdje je $(1-\lambda)(\mu-\nu)+(1-\mu)(\nu-\lambda)+(1-\nu)(\lambda-\mu)=0$, pa su po zadatku 27 točke P,Q,R kolinearne.

Zadatak 31 (Menelajev teorem): Na stranicama $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ tokuta ABC zadane su točke D,E,F, takve da je $(BCD)=k_1$, $(CAE)=k_2$, $(ABF)=k_3$. Točke D,E,F su kolinearne akko je $k_1k_2k_3=1$. Dokazati!

Dokaz:



Uzmimo točku A za ishodište. Tada je $\vec{r}_A=\vec{0}$, pa prema uvjetima zadatka imamo:

$$\vec{r}_D=\frac{\vec{r}_B-k_1\vec{r}_C}{1-k_1}\quad\Big|\cdot k_3(1-k_1)$$

$$\vec{r}_E=\frac{\vec{r}_C}{1-k_2}\quad\Big|\cdot k_1k_3(1-k_2)\qquad + \;\Rightarrow$$

$$\vec{r}_F=\frac{-k_3\vec{r}_B}{1-k_3}$$

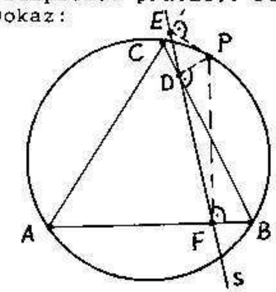
$\Rightarrow\; k_3(1-k_1)\vec{r}_D + k_1k_3\vec{r}_E+\vec{r}_F=k_3\vec{r}_B-k_1k_3\vec{r}_C+k_1k_3\vec{r}_C-k_3\vec{r}_B \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; k_3(1-k_1)\vec{r}_D+k_1k_3(1-k_2)\vec{r}_E+\vec{r}_F=0.$

Prema zadatku 27 točke D,E,F će biti kolinearne akko je $k_3(1-k_1)+k_1k_3(1-k_2)+1=0$, tj. akko je $k_1k_2k_3=1$.

Zadatak 32: Zadan je trokut ABC. Neka je P bilo koja točka opisane mu kružnice i D,E,F ortogonalne projekcije točke P na pravce BC,CA,AB. Tada točke D,E,F leže na istome pravcu **(Simpsonov pravac)**. Dokazati !

Dokaz:



Iz sličnosti trokuta PFB i PEC, PFA i PDC, te PDB i PEA redom dobivamo:

$|CE|/|BF|=|PC|/|PB|$ (*),

$|AF|/|CD|=|PA|/|PC|$ (**),

$|BD|/|AE|=|PB|/|PA|$ (***).

Stavimo li $k_1=-|BD|/|CD|$, $k_2=|CE|/|AE|$, $k_3=-|AF|/|BF|$, tada prema (*), (**) i (***) izlazi $k_1k_2k_3=1$, pa su prema prethodnom zadatku točke D,E,F kolineearne.

Zadatak 33 (Čevin teorem): Neka je ABC trokut i D,E,F točke na stranicama $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ trokuta, takve da je $k_1=(BCD)<0$, $k_2=(CAE)<0$, $k_3=(ABF)<0$. Dokazati da se pravci AD,BE,CF sijeku u jednoj točki M akko je $k_1k_2k_3=-1$. Dokazati pri tome da je

$$\vec{r}_M=\frac{\vec{r}_A-k_3(\vec{r}_B-k_1\vec{r}_C)}{1-k_3(1-k_1)}=\frac{\vec{r}_B-k_1(\vec{r}_C-k_2\vec{r}_A)}{1-k_1(1-k_2)}=\frac{\vec{r}_C-k_2(\vec{r}_A-k_3\vec{r}_B)}{1-k_2(1-k_3)}.$$

Dokaz:
Neka je $k_1=(BCD)$, $k_2=(CAE)$, $k_3=(ABF)$. Tada je $\vec{r}_D=(\vec{r}_B-k_1\vec{r}_C)/(1-k_1)$, $\vec{r}_E=(\vec{r}_C-k_2\vec{r}_A)/(1-k_2)$, $\vec{r}_F=(\vec{r}_A-k_3\vec{r}_B)/(1-k_3)$.
Neka je nadalje M sjecište pravaca AD i BE i neka je $(ADM)=\lambda$. Tada je $\vec{r}_M=(\vec{r}_A-\lambda\vec{r}_D)/(1-\lambda)$, tj. uz oznake $\alpha_1=1/(1-\lambda)$ i $\beta_1=-\lambda/(1-\lambda)$, $\vec{r}_M=\alpha_1\vec{r}_A+\beta_1\vec{r}_D$, $\alpha_1+\beta_1=1$, odnosno (zbog $\beta_1=1-\alpha_1$ i $\vec{r}_D=(\vec{r}_B-k_1\vec{r}_C)/(1-k_1)$) $\vec{r}_M=\alpha_1\vec{r}_A+(1-\alpha_1).((\vec{r}_B-k_1\vec{r}_C)/(1-k_1))$.
Analogno izlazi $\vec{r}_M=\alpha_2\vec{r}_B+(1-\alpha_2).((\vec{r}_C-k_2\vec{r}_A)/(1-k_2))$, pa imamo (izjednačavanjem oba izraza za $\vec{r}_M$ i množenjem dobivene jednadžbe sa $(1-k_1)(1-k_2)\neq0$)

$\alpha_1(1-k_1)(1-k_2)\vec{r}_A+(1-\alpha_1)(1-k_2)(\vec{r}_B-k_1\vec{r}_C)=\alpha_2(1-k_1)(1-k_2)\vec{r}_B+$
$+(1-\alpha_2)(1-k_1)(\vec{r}_C-k_2\vec{r}_A)$, odnosno
$\vec{r}_A(1-k_1)(\alpha_1(1-k_2)+k_2(1-\alpha_2))+\vec{r}_B(1-k_2)((1-\alpha_1)-\alpha_2(1-k_1))+$
$+\vec{r}_C(-k_1(1-\alpha_1)(1-k_2)-(1-\alpha_2)(1-k_1))=\vec{0}$.

Zbog linearne nezavisnosti vektora $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$, izrazi uz te vektore moraju biti jednaki nuli, pa imamo (zbog $k_1\neq1$ i $k_2\neq1$)
$\alpha_1(1-k_2)+k_2(1-\alpha_2)=0$, $(1-\alpha_1)-\alpha_2(1-k_1)=0$, $-k_1(1-\alpha_1)(1-k_2)-(1-\alpha_2)(1-k_1)=0$. Iz prve dvije jednadžbe izlazi
$\alpha_1=k_1k_2/(1-k_1+k_1k_2)$, $1-\alpha_1=(1-k_1)/(1-k_1+k_1k_2)$,

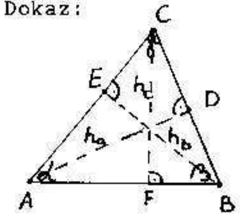
$\alpha_2=1/(1-k_1+k_1k_2)$, $1-\alpha_2=-k_1(1-k_2)/(1-k_1+k_1k_2)$, što uvrštenjem u izraz za $\vec{r}_M$ daje $\vec{r}_M=(\vec{r}_B-k_1(\vec{r}_C-k_2\vec{r}_A))/(1-k_1(1-k_2))$.
Analogno bi dobili za sjecište N pravaca BE i CF i za sjecište L pravaca CF i AD: $\vec{r}_N=(\vec{r}_C-k_2(\vec{r}_A-k_3\vec{r}_B))/(1-k_2(1-k_3))$ i $\vec{r}_L=(\vec{r}_A-k_3(\vec{r}_B-k_1\vec{r}_C))/(1-k_3(1-k_1))$.
Lako se pokazuje da iz $M\equiv N\equiv L$ proizlazi $k_1k_2k_3=-1$, tj. $k_3=-1/k_1k_2$ i obratno.

Zadatak 34: Primjenom Čevinog teorema dokazati da se sve tri težišnice trokuta ABC sijeku u jednoj točki T (težištu) za koju vrijedi: $\vec{r}_T=\frac{1}{3}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C)$.
Dokaz:
$k_1=(BCA_1)=-|BA_1|/|CA_1|=-1$ i analogno tome $k_2=(CAB_1)=-1$ i $k_3=(ABC_1)=-1$, pa je $k_1k_2k_3=-1$. Prema Čevinom teoremu se tada sve tri težišnice trokuta sijeku u istoj točki T za koju vrijedi $\vec{r}_T=(\vec{r}_A-k_3\vec{r}_B+k_1k_3\vec{r}_C)/(1-k_3+k_1k_3)=(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C)/3$.

Zadatak 35: Primjenom Čevinog teorema dokazati da se sve tri visine trokuta ABC sijeku u jednoj točki H (ortocentru) za koju vrijedi:

$$\vec{r}_H=\frac{\sin\alpha.\cos\beta.\cos\gamma.\vec{r}_A+\cos\alpha.\sin\beta.\cos\gamma.\vec{r}_B+\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma.\vec{r}_C}{\sin\alpha.\cos\beta.\cos\gamma+\cos\alpha.\sin\beta.\cos\gamma+\cos\alpha.\cos\beta.\sin\gamma},$$

gdje su α,β,γ kutevi trokuta.
Dokaz:

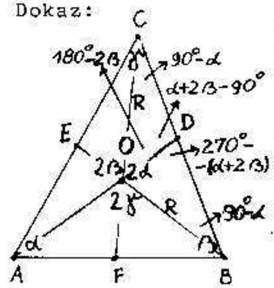


$k_1=(BCD)=-\frac{|BD|}{|CD|}=-\frac{|BD|/|AB|}{|CD|/|AC|}\cdot\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=$ $-\cos\beta\sin\gamma/\cos\gamma\sin\beta$. Analogno izlazi $k_2=-\cos\alpha\sin\beta/\cos\beta\sin\alpha$ i $k_3=-\cos\gamma\sin\alpha/\cos\alpha\sin\gamma$. Kako je $k_1k_2k_3=-1$, tada po Čevinom teoremu slijedi da se sve tri visine trokuta sijeku u jednoj točki H . Primjenom relacije $r_H=(\vec{r}_A-k_3\vec{r}_B+k_1k_3\vec{r}_C)/(1-k_3+k_1k_3)$ lako dolazimo do preostale tvrdnje zadatka.

Zadatak 36: Sve tri simetrale stranica trokuta ABC sijeku se u središtu O tom trokutu opisane kružnice. Primjenom Čevinog teorema dokazati da je

$$\vec{r}_O=\frac{\sin2\alpha.\vec{r}_A+\sin2\beta.\vec{r}_B+\sin2\gamma.\vec{r}_C}{\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma}.$$

Dokaz:

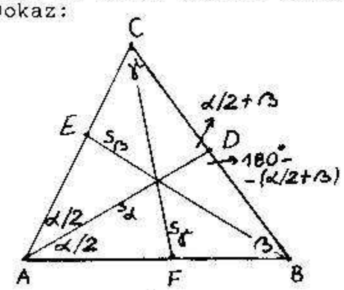


Neka je $AO\cap\overline{BC}=D$, $BO\cap\overline{CA}=E$, $CO\cap\overline{AB}=F$. Primjenom sinusovog teorema na trokute OBD i OCD izlazi: $|BD|=-R.\sin2\gamma/\cos(\alpha+2\beta)$, $|CD|=-R.\sin2\beta/\cos(\alpha+2\beta)$, odakle je $k_1=(BCD)=-|BD|/|CD|=-\sin2\gamma/\sin2\beta$. Analogno izlazi $k_2=(CAE)=-\sin2\alpha/\sin2\gamma$ i $k_3=(ABF)=-\sin2\beta/\sin2\alpha$.
Sada primjenom relacije $\vec{r}_O=(r_A-k_3\vec{r}_B+k_1k_3\vec{r}_C)/(1-k_3+k_1k_3)$ lako dolazimo do tvrdnje zadatka.

Zadatak 37: Primjenom Čevinog teorema dokazati da se sve tri simetrale kuteva trokuta ABC sijeku u jednoj točki S (središtu trokutu upisane kružnice) za koju vrijedi

$$\vec{r}_S=\frac{a.\vec{r}_A+b.\vec{r}_B+c.\vec{r}_C}{a+b+c},$$

gdje su a,b,c duljine stranica toga trokuta.
Dokaz:



Primjenom sinusovog teorema na trokute ABD i ACD izlazi:
$|BD|=c.\sin(\alpha/2)/\sin(180^\circ-(\alpha/2+\beta))=$
$=c.\sin(\alpha/2)/\sin(\alpha/2+\beta)$ i
$|CD|=b.\sin(\alpha/2)/\sin(\alpha/2+\beta)$,
odakle je $k_1=(BCD)=-|BD|/|CD|=$
$=-c/b$.
Analogno izlazi
$k_2=(CAE)=-a/c$ i $k_3=(ABF)=-b/a$.

Kako je $k_1k_2k_3=-1$, tada po Čevinom teoremu izlazi da se sve tri simetrale kuteva trokuta sijeku u točki S za koju vrijedi
$\vec{r}_S=(\vec{r}_A-k_3\vec{r}_B+k_1k_3\vec{r}_C)/(1-k_3+k_1k_3)=(a\vec{r}_A+b\vec{r}_B+c\vec{r}_C)/(a+b+c)$.

Zadatak 38: Neka su D,E,F točke na stranicama $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ trokuta ABC za koje je $k_1=(BCD)=-b/c$, $k_2=(CAE)=-c/a$, $k_3=(ABF)=-a/b$. Primjenom Čevinog teorema dokazati da se pravci AD,BE,CF (tzv. antisimetrale) sijeku u jednoj točki M za koju vrijedi

$$\vec{r}_M=\frac{bc.\vec{r}_A+ca.\vec{r}_B+ab.\vec{r}_C}{bc+ca+ab}.$$

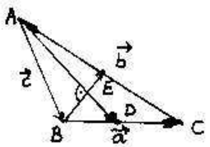
Dokaz:
Kako je $k_1k_2k_3=-1$, tada se po Čevinom teoremu sva tri pravca AD,BE,CF sijeku u jednoj točki M za koju vrijedi
$\vec{r}_M=(\vec{r}_A-k_3\vec{r}_B+k_1k_3\vec{r}_C)/(1-k_3+k_1k_3)=(bc\vec{r}_A+ca\vec{r}_B+ab\vec{r}_C)/(bc+ca+ab)$.

Zadatak 39 (Republičko natjecanje SR Slovenije, III r., 1974.): Ako su $t_a=\overline{AD}$, $t_b=\overline{BE}$, $t_c=\overline{CF}$ težišnice trokuta ABC, izračunati
$\vec{t}_a\cdot\vec{t}_b+\vec{t}_b\cdot\vec{t}_c+\vec{t}_c\cdot\vec{t}_a$.

Rješenje:
Prema zadatku 4 je $\vec{t}_a+\vec{t}_b+\vec{t}_c=\vec{0}$, odakle kvadriranjem slijedi
$t_a^2+t_b^2+t_c^2+2\vec{t}_a\vec{t}_b+2\vec{t}_b\vec{t}_c+2\vec{t}_c\vec{t}_a=0$, tj.
$\vec{t}_a\vec{t}_b+\vec{t}_b\vec{t}_c+\vec{t}_c\vec{t}_a=-(t_a^2+t_b^2+t_c^2)/2$.

Zadatak 40 (Republičko natjecanje SR Slovenije, II r., 1960.; Općinsko natjecanje SR Hrvatske, III r. 1985.): Naći treću stranicu trokuta ako su zadane duljine dviju stranica trokuta i ako su njima odgovarajuće težišnice medusobno okomite.

Rješenje:



$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}\ |^2 \Rightarrow c^2=a^2+b^2+2\vec{a}\vec{b} \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{a}\vec{b}=(c^2-a^2-b^2)/2 \quad (*)$,
$\vec{t}_a\perp\vec{t}_b \Rightarrow \vec{t}_a.\vec{t}_b=0 \Rightarrow (\vec{a}/2+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}/2)=0 \ |.4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5\vec{a}\vec{b}+2a^2+2b^2=0 \overset{(*)}{\Rightarrow} c^2=(a^2+b^2)/5 \Rightarrow$
$\Rightarrow c=\sqrt{(a^2+b^2)/5}$.

Zadatak 41 (Općinsko natjecanje SR Hrvatske, III r., 1981.): Ako su a,b,c stranice, T težište, O središte i r polumjer opisane kružnice trokuta ABC, tada je:

$$|OT|^2=r^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

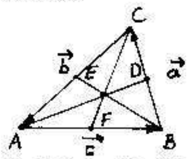
Dokaz:
Neka je $\vec{AB}=\vec{c}$, $\vec{BC}=\vec{a}$, $\vec{CA}=\vec{b}$, $\vec{OA}=\vec{m}$, $\vec{OB}=\vec{n}$, $\vec{OC}=\vec{s}$. Prema zadatku 13 je $\vec{TH}=2\vec{OT}$ i $\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$, pa je tada $\vec{OT}=(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})/3$, odnosno $\vec{OT}=(\vec{m}+\vec{n}+\vec{s})/3$. Odavde kvadriranjem izlazi
$|OT|^2=(m^2+n^2+s^2+2(\vec{m}\vec{n}+\vec{n}\vec{s}+\vec{s}\vec{m}))/9=(3r^2+2(\vec{m}\vec{n}+\vec{n}\vec{s}+\vec{s}\vec{m}))/9$ (zbog $m^2=n^2=s^2=r^2$). Iz $\vec{a}=\vec{s}-\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-\vec{s}$, $\vec{c}=\vec{n}-\vec{m}$ kvadriranjem izlazi $\vec{n}\vec{s}=(2r^2-a^2)/2$, $\vec{s}\vec{m}=(2r^2-b^2)/2$ i $\vec{m}\vec{n}=(2r^2-c^2)$, na osnovu čega slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak 42 (Austrija, 1971.): Težišnice trokuta ABC sijeku se

u točki T. Dokazati da je

$$|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2=3(|TA|^2+|TB|^2+|TC|^2).$$

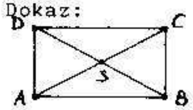
Dokaz:



Neka je $\vec{AB}=\vec{c}$, $\vec{BC}=\vec{a}$, $\vec{CA}=\vec{b}$. Tada je
$\vec{AT}=(\vec{c}-\vec{b})/3$, $\vec{BT}=(\vec{a}-\vec{c})/3$, $\vec{CT}=(\vec{b}-\vec{a})/3$, pa je
$|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2-3(|AT|^2+|BT|^2+|CT|^2)=$
$=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2-((\vec{a}-\vec{b})^2+(\vec{b}-\vec{c})^2+(\vec{c}-\vec{a})^2)/3=$
$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2/3=\vec{0}^2/3=0$, što se i tvrdilo.

Zadatak 43 (Meduopćinsko natjecanje SR Srbije, III$_B$ r., 1987.): Neka je ABCD pravokutnik i M proizvoljna točka u prostoru. Dokazati da je: a) $\vec{MA}.\vec{MC}=\vec{MB}.\vec{MD}$,
b) $|MA|^2+|MC|^2=|MB|^2+|MD|^2$.

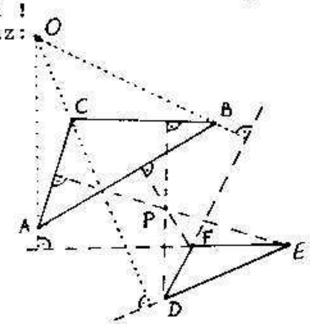
Dokaz:



$|AC|=|BD| \Rightarrow |\vec{AC}|=|\vec{BD}| \Rightarrow |\vec{MC}-\vec{MA}|^2=$
$=|\vec{MD}-\vec{MB}|^2 \Rightarrow (\vec{MC}-\vec{MA})^2=(\vec{MD}-\vec{MB})^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow |MC|^2-2\vec{MC}.\vec{MA}+|MA|^2=|MD|^2-2\vec{MD}\cdot\vec{MB}+|MB|^2 \quad (*)$
$2\vec{MS}=\vec{MA}+\vec{MC}=\vec{MB}+\vec{MD} \Rightarrow (\vec{MA}+\vec{MC})^2=(\vec{MB}+\vec{MD})^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow |MA|^2+|MC|^2+2.\vec{MA}.\vec{MC}=|MB|^2+|MD|^2+2.\vec{MB}.\vec{MD} \quad (**)$.
Tvrdnja (a) proizlazi oduzimanjem, a tvrdnja (b) zbrajanjem (*) i (**).

Zadatak 44 (Republičko natjecanje SR Hrvatske, III r., 1983.): Dani su trokuti ABC i DEF. Ako se okomice iz vrhova A,B,C prvog trokuta na stranice $\overline{EF},\overline{FD},\overline{DE}$ drugog trokuta sijeku u jednoj točki O, tada se i okomice iz vrhova D, E ,F drugog trokuta na stranice $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ prvog trokuta sijeku u jednoj točki P. Dokazati !

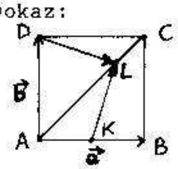
Dokaz:



Neka je O presjek okomica iz A, B,C na $\overline{EF},\overline{FD},\overline{DE}$, a P presjek okomica iz D,E na $\overline{BC},\overline{CA}$. Neka je nadalje $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$, $\vec{PD}=\vec{d}$, $\vec{PE}=\vec{e}$, $\vec{PF}=\vec{f}$. Tada je $\vec{EF}=\vec{f}-\vec{e}$, $\vec{FD}=\vec{d}-\vec{f}$, $\vec{DE}=\vec{e}-\vec{d}$, $\vec{BC}=\vec{c}-\vec{b}$, $\vec{CA}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, pa zbog $\vec{a}\perp\vec{EF}$, $\vec{b}\perp\vec{FD}$, $\vec{c}\perp\vec{DE}$, $\vec{d}\perp\vec{BC}$, $\vec{e}\perp\vec{CA}$ izlazi $\vec{a}(\vec{f}-\vec{e})=0$, $\vec{b}(\vec{d}-\vec{f})=0$, $\vec{c}(\vec{e}-\vec{d})=0$, $\vec{d}(\vec{b}-\vec{c})=0$, $\vec{e}(\vec{c}-\vec{a})=0$, odnosno $\vec{a}\vec{e}=\vec{a}\vec{f}$, $\vec{b}\vec{f}=\vec{b}\vec{d}$, $\vec{c}\vec{d}=\vec{c}\vec{e}$, $\vec{d}\vec{b}=\vec{d}\vec{c}$, $\vec{e}\vec{c}=\vec{e}\vec{a}$. Odavde je $\vec{f}\vec{a}=\vec{a}\vec{e}=\vec{e}\vec{c}=\vec{c}\vec{d}=\vec{d}\vec{b}=\vec{b}\vec{f}$, tj. $\vec{f}\vec{a}=\vec{f}\vec{b}$, odnosno $\vec{f}(\vec{a}-\vec{b})=0$, tj. $\vec{PF}.\vec{BA}=0$, što znači da je $PF\perp BA$.

Zadatak 45 (Republičko natjecanje SR Bosne i Hercegovine, I r., 1980.): Točka K je središte stranice $\overline{AB}$ kvadrata ABCD, a točka L dijeli dijagonalu $\overline{AC}$ u omjeru 3:1. Dokazati da je kut ∢KLD pravi kut.

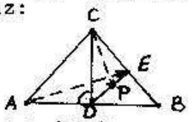
Dokaz:



Neka je $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$. Tada je $\vec{KL}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}(\vec{a}+\vec{b})=$
$=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$, $\vec{DL}=-\vec{b}+\frac{3}{4}(\vec{a}+\vec{b})=-\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}$, $\vec{KL}.\vec{DL}=$
$=\frac{1}{16}(\vec{a}+3\vec{b})(3\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{16}(3|\vec{a}|^2+8\vec{a}\vec{b}-3|\vec{b}|^2)=0$
(zbog $\vec{a}\vec{b}=0$ i $|\vec{a}|=|\vec{b}|$), tj. $∢KLD=90^\circ$.

Zadatak 46 (Općinsko natjecanje SR Hrvatske. III r., 1984.): Neka je $\overline{CD}$ visina jednakokračnog trokuta ABC, $\overline{DE}$ visina trokuta BCD, a P polovište te visine. Dokazati da su pravci AE i CP međusobno okomiti.

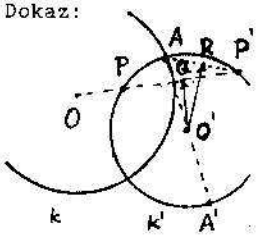
Dokaz:



$\vec{AE}\cdot\vec{CP}=(\vec{AB}+\vec{BE})\cdot(\vec{CD}+\vec{DP})=0+\vec{AB}\cdot\vec{DP}+\vec{BE}\cdot\vec{CD}+0=\vec{AB}\cdot\vec{DP}+(\vec{DE}-\vec{DB})\cdot\vec{CD}=\vec{AB}\cdot\vec{DP}+(2\vec{DP}-\vec{AB}/2)\cdot\vec{CD}=\vec{AB}\cdot\vec{DP}+2\vec{DP}\cdot\vec{CD}+0=(\vec{AB}+2\vec{CD})\cdot\vec{DP}=2(\vec{CD}+\vec{DB})\cdot\vec{DP}=2\vec{CB}\cdot\vec{DP}=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{AE}\perp\vec{CP}$.

Zadatak 47 (Republičko natjecanje SR Hrvatske, III r., 1990.): Na kružnici k dana je točka A i iz središta O povučena je zraka koja siječe kružnicu k' u točkama P i P'. Neka točke A i A' leže na rubovima promjera kružnice k'. Dokažite da je $\vec{OP}\cdot\vec{OP'}=\vec{OA}\cdot\vec{OA'}$.

Dokaz:

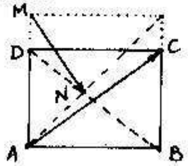


Neka su Q i R središta dužina $\overline{PP'}$ i $\overline{AP'}$. Tada je $\vec{OP'}\perp\vec{O'Q}$ (O' je središte kružnice k') i $\vec{O'R}\perp\vec{AP'}$, tj. $\vec{OP'}\cdot\vec{O'Q}=0$ i $\vec{O'R}\cdot\vec{AP'}=0$, pa imamo

$\vec{OP}\cdot\vec{OP'}=(\vec{OA}+\vec{AP})\cdot(\vec{OA}+\vec{AP'})=\vec{OA}\cdot(\vec{OA}+\vec{AP'}+\vec{AP})+\vec{AP}\cdot\vec{AP'}=\vec{OA}\cdot(\vec{OA}+\vec{AO'}+\vec{O'P'}+\vec{AO'}+\vec{O'P})+\vec{AP}\cdot\vec{AP'}=$
$=$(zbog $\vec{AO'}=\vec{O'A'}$ i $\vec{OA}+\vec{AO'}+\vec{O'A'}=\vec{OA'}$)
$\vec{OA}\cdot\vec{OA'}+\vec{OA}\cdot(\vec{O'P'}+\vec{O'P})+\vec{AP}\cdot\vec{AP'}=$
$=$(zbog $\vec{OA}=\vec{OP'}+\vec{P'A}$ i $\vec{O'P'}+\vec{O'P}=2\cdot\vec{O'Q}$)
$\vec{OA}\cdot\vec{OA'}+2\vec{OP'}\cdot\vec{O'Q}+\vec{P'A}\cdot(\vec{O'P'}+\vec{O'P})+\vec{AP}\cdot\vec{AP'}=$
$=$(zbog $\vec{OP'}\cdot\vec{O'Q}=0$)
$\vec{OA}\cdot\vec{OA'}+\vec{P'A}\cdot(\vec{O'P'}+\vec{O'P}+\vec{PA})=$
$=$(zbog $\vec{O'P}+\vec{PA}=\vec{O'A}$, $\vec{O'P'}+\vec{O'A}=\vec{O'R}$ i $\vec{P'A}\cdot\vec{O'R}=0$)
$\vec{OA}\cdot\vec{OA'}$.

Zadatak 48 (Pokrajinsko natjecanje SAP Vojvodine, III r., 1984.): Dan je pravokutnik ABCD. Simetrala kuta ∢ABC siječe pravac AD u točki M, a simetrala kuta ∢BAD dijagonalu $\overline{BD}$ u točki N. Dokazati da je $\overline{MN}\perp\overline{AC}$.

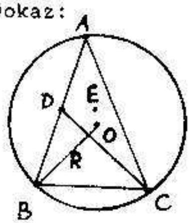
Dokaz:



Postavimo koordinatni sustav tako da A,B,C, D imaju redom koordinate (0,0),(a,0),(a,b), (0,b). Tada izlazi: M=(0,a), N=(ab/(a+b),ab/(a+b)),
$\vec{MN}=(ab/(a+b)-0,ab/(a+b)-a)=(ab/(a+b),-a^2/(a+b))$, $\vec{AC}=(a,b)$, $\vec{MN}\cdot\vec{AC}=0$, tj. $\vec{MN}\perp\vec{AC}$.

Zadatak 49 (Engleska, 1983.): Neka je O središte opisane kružnice trokuta ABC, D središte stranice $\overline{AB}$, a E težište trokuta ACD. Dokazati da iz |AB|=|AC| slijedi OE⊥CD.

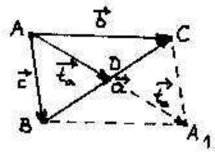
Dokaz:



Neka je R polumjer trokutu ABC opisane kružnice. Tada je:
$\vec{OD}=(\vec{OA}+\vec{OB})/2$, $\vec{OE}=(\vec{OA}+\vec{OC}+\vec{OD})/3=$
$=(3\vec{OA}/2+\vec{OB}/2+\vec{OC})/3=(3\vec{OA}+\vec{OB}+2\vec{OC})/6$,
$\vec{CD}=\vec{OD}-\vec{OC}=(\vec{OA}+\vec{OB}-2\vec{OC})/2$, $\vec{OE}\cdot\vec{CD}=$
$=(3\vec{OA}+\vec{OB}+2\vec{OC})\cdot(\vec{OA}+\vec{OB}-2\vec{OC})/12=$
$=(4\vec{OA}\cdot\vec{OB}-4\vec{OA}\cdot\vec{OC})/12$ (zbog $\vec{OA}^2=\vec{OB}^2=\vec{OC}^2=R^2$)$=$
$=\vec{OA}\cdot\vec{CB}/3=0$, tj. $\vec{OE}\perp\vec{CD}$.

Zadatak 50 (Republičko natjecanje SR Slovenije, II r., 1973.): Izračunati duljine težišnica trokuta ABC.

Rješenje:



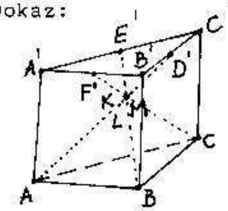
Uz oznake kao na slici imamo $2\vec{t_a}=\vec{c}+\vec{b}$ i $\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$, odakle kvadriranjem i zbrajanjem izlazi $4t_a^2=2b^2+2c^2-a^2$, odnosno
$t_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. Analogno dobivamo
$t_b=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}$ i $t_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$.

Zadatak 51: Dan je paralelepiped ABCDEFGH. Naći jednakost koja izražava linearnu zavisnost vektora $\vec{AG}$, $\vec{EC}$, $\vec{DF}$ i $\vec{DB}$.

Rješenje:
Neka je $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$, $\vec{AE}=\vec{c}$. Tada je $\vec{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{EC}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{DF}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{DB}=\vec{a}-\vec{b}$. Iz $\vec{DB}=\alpha\vec{AG}+\beta\vec{EC}+\gamma\vec{DF} \Rightarrow \vec{a}-\vec{b}=\alpha(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\beta(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})+\gamma(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma-1)\vec{a}+(\alpha+\beta-\gamma+1)\vec{b}+(\alpha-\beta+\gamma)\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma-1=0$ i $\alpha+\beta-\gamma+1=0$ i $\alpha-\beta+\gamma=0$ (zbog linearne nezavisnosti vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha=-1/2$ i $\beta=1/2$ i $\gamma=1 \Rightarrow \vec{DB}=-\vec{AG}/2+\vec{EC}/2+\vec{DF} \Rightarrow \vec{AG}-\vec{EC}-2\vec{DF}+2\vec{DB}=\vec{0}$.

Zadatak 52: Ako se spoje vrhovi jedne baze trostrane prizme s polovištima suprotnih bridova druge baze, tada te tri dužine imaju zajedničku točku, koja dijeli te dužine u istom omjeru $\lambda=-2$. Dokazati !

Dokaz:



Neka je ABCA'B'C' trostrana prizma, E' polovište brida $\overline{C'A'}$, F' polovište brida $\overline{A'B'}$, K∈AD' tako da je (AD'K)=-2, L∈BE' tako da je (BE'L)=-2, M∈CF' tako da je (CF'M)=-2, $\vec{AA'}=\vec{BB'}=\vec{CC'}=\vec{v}$. Tada je $\vec{r_K}=(\vec{r_A}+2\vec{r_{D'}})/(1+2)=$
$=(\vec{r_A}+\vec{r_{B'}}+\vec{r_{C'}})/3=(\vec{r_A}+\vec{r_B}+\vec{r_C}+2\vec{v})/3$.
Isto se dobiva i za $\vec{r_L}$ i $\vec{r_M}$, pa je K≡L≡M.

Zadatak 53: Definicija: Spojnicu vrha sa težištem nasuprotne plohe tetraedra zovemo težišnica tetraedra.

Zadatak: Dokazati da se sve četiri težišnice tetraedra sijeku u jednoj točki T (u tzv. težištu tetraedra) koja dijeli težišnice u omjeru $\lambda=-3$, a za koju vrijedi

$$\vec{r_T}=\frac{1}{4}(\vec{r_A}+\vec{r_B}+\vec{r_C}+\vec{r_D}).$$

Dokaz:
Neka su A_1,B_1,C_1,D_1 težišta ploha BCD,CDA,DAB,ABC zadanog tetraedra ABCD i neka je $K\in\overline{AA_1}$, $(AA_1K)=-3$. Tada je $\vec{r_{A_1}}=(\vec{r_B}+\vec{r_C}+\vec{r_D})/3$, pa je $\vec{r_K}=(\vec{r_A}+3\vec{r_{A_1}})/(1+3)=(\vec{r_A}+\vec{r_B}+\vec{r_C}+\vec{r_D})/4$.
Isto se dobiva i za točke $L\in\overline{BB_1}$, $M\in\overline{CC_1}$ i $N\in\overline{DD_1}$ za koje vrijedi $(BB_1L)=-3$, $(CC_1M)=-3$ i $(DD_1N)=-3$, pa je $\vec{r_K}=\vec{r_L}=\vec{r_M}=\vec{r_N}$, tj. K≡L≡M≡N. Označimo li tu točku sa T, dobivamo tvrdnju zadatka.

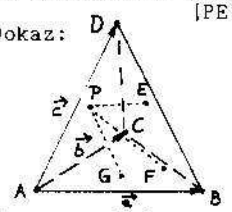
Zadatak 54: Neka su A,B,C tri nekolinearne točke ravnine π i P bilo koja točka. Dokazati da je $P\in\pi$ akko $\exists\alpha,\beta,\gamma\in R$, $\alpha+\beta+\gamma=1$, $\vec{r_P}=\alpha\vec{r_A}+\beta\vec{r_B}+\gamma\vec{r_C}$.

Dokaz:
Nužnost: Neka je $P\in\pi$. Tada $\exists\beta,\gamma\in R$ tako da je $\vec{AP}=\beta\vec{AB}+\gamma\vec{AC}$, odnosno $\vec{r_P}-\vec{r_A}=\beta(\vec{r_B}-\vec{r_A})+\gamma(\vec{r_C}-\vec{r_A})$, odakle je $\vec{r_P}=(1-\beta-\gamma)\vec{r_A}+\beta\vec{r_B}+\gamma\vec{r_C}$. Uz-

memo li oznaku $1-\beta-\gamma=\alpha$, tada slijedi: $\overrightarrow{r_P}=\alpha\overrightarrow{r_A}+\beta\overrightarrow{r_B}+\gamma\overrightarrow{r_C}$, $\alpha+\beta+\gamma=1$.
Dovoljnost: Neka je $\overrightarrow{r_P}=\alpha\overrightarrow{r_A}+\beta\overrightarrow{r_B}+\gamma\overrightarrow{r_C}$, $\alpha+\beta+\gamma=1$. Tada je $\alpha=1-\beta-\gamma$, pa je $\overrightarrow{r_P}=(1-\beta-\gamma)\overrightarrow{r_A}+\beta\overrightarrow{r_B}+\gamma\overrightarrow{r_C}$, odakle je $\overrightarrow{r_P}-\overrightarrow{r_A}=\beta(\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_A})+\gamma(\overrightarrow{r_C}-\overrightarrow{r_A})$, tj. $\overrightarrow{AP}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}$, što znači da je $P\in\pi$.

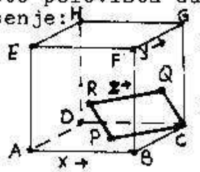
Zadatak 55 (Republičko natjecanje SR Hrvatske, II r., 1990.):
Pravci a i b su mimoilazni. Na pravcu a redom su dane točke $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n\geq 3$, a na pravcu b redom točke $B_1, B_2, \dots, B_n$, tako da vrijedi $|A_1A_2|/|B_1B_2|=|A_2A_3|/|B_2B_3|=\dots=|A_{n-1}A_n|/|B_{n-1}B_n|$. Neka su $C_1, C_2, \dots, C_n$ redom središta dužina $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \dots, \overline{A_nB_n}$. Dokazati da su točke $C_1, C_2, \dots, C_n$ kolinearne.
Dokaz:
Iz uvjeta zadatka je $|A_1A_2|/|B_1B_2|=|A_2A_3|/|B_2B_3| \Rightarrow$
$\Rightarrow |A_1A_2|/|A_2A_3|=|B_1B_2|/|B_2B_3|=k \Rightarrow$
$\Rightarrow\ |A_1A_2|=k.|A_2A_3|$ i $|B_1B_2|=k.|B_2B_3| \Rightarrow$
$\Rightarrow\ \overrightarrow{A_1A_2}=k.\overrightarrow{A_2A_3}$ i $\overrightarrow{B_1B_2}=k.\overrightarrow{B_2B_3}$ (*) (zbog kolinearnosti A_1, A_2A_3, odnosno $B_1B_2B_3$).
Nadalje je $\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{r_{C_2}}-\overrightarrow{r_{C_1}}=(\overrightarrow{r_{A_2}}+\overrightarrow{r_{B_2}})/2-(\overrightarrow{r_{A_1}}+\overrightarrow{r_{B_1}})/2=(\overrightarrow{r_{A_2}}-\overrightarrow{r_{A_1}})/2+$
$+(\overrightarrow{r_{B_2}}-\overrightarrow{r_{B_1}})/2=\overrightarrow{A_1A_2}/2+\overrightarrow{B_1B_2}/2 \overset{(*)}{=} (k.\overrightarrow{A_2A_3}+k.\overrightarrow{B_2B_3})/2=$
$=k.((\overrightarrow{r_{A_3}}-\overrightarrow{r_{A_2}})/2+(\overrightarrow{r_{B_3}}-\overrightarrow{r_{B_2}})/2)=k.((\overrightarrow{r_{A_3}}+\overrightarrow{r_{B_3}})/2-(\overrightarrow{r_{A_2}}+\overrightarrow{r_{B_2}})/2)=$
$=k.(\overrightarrow{r_{C_3}}-\overrightarrow{r_{C_2}})=k.\overrightarrow{C_2C_3} \Rightarrow C_1, C_2, C_3$ su kolinearne točke.
Analogno se pokazuje da su i C_2, C_3 i $C_4, \dots, C_{n-2}, C_{n-1}$ i C_n trojke kolinearnih točaka, pa su točke $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ kolinearne.

Zadatak 56: Neka je P bilo koja točka na strani ACD tetraedra ABCD. Paralele sa pravcima AB,CB,DB kroz točku P sijeku ravnine BCD,ABD,ABC redom u točkama E,F,G. Dokazati da je
$$|PE|/|BA|+|PF|/|BC|+|PG|/|BD|=1.$$
Dokaz:



Neka je $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AP}=\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$, $\lambda,\mu\in R$. Tada je $\overrightarrow{PE}=(|PE|/|AB|)\vec{a}$, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PE}=\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}+$ $+(|PE|/|AB|)\vec{a}$. Zbog komplanarnosti točaka A,B,E,P, prema zadatku 54 će biti $\lambda+\mu+$ $+(|PE|/|AB|)=1$, odakle je $|PE|/|AB|=1-\lambda-\mu$. Analogno dobivamo $|PF|/|BC|=\lambda$ i $|PG|/|BD|=\mu$, pa je tvrdnja zadatka očigledna.

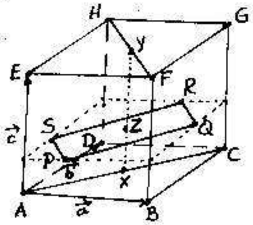
Zadatak 57 (Medunarodna matematička olimpijada u Čehoslovačkoj, 1962.): Zadana je kocka ABCDEFGH. Iz točke A giba se po bridovima kvadrata ABCD točka X, a istovremeno i s istom brzinom iz točke F po bridovima kvadrata FGCB točka Y. Naći geometrijsko mjesto polovišta dužina $\overline{XY}$.
Rješenje:



Neka je ABCDEFGH zadana kocka i neka su P,Q, R središta kvadrata ABCD,BCGF,ABFE. Tada je PCQR romb. Neka je nadalje $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$. Dok se točka X giba po bridu $\overline{AB}$, dotle se točka Y giba po bridu $\overline{FG}$ zadane kocke. Neka

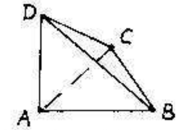
je $\overrightarrow{AX}=\lambda\vec{a}$, $\lambda\in[0,1]$. Tada je (zbog jednakih brzina gibanja točaka X i Y) $\overrightarrow{FY}=\lambda\vec{b}$, pa je $\overrightarrow{AY}=\vec{a}+\vec{c}+\lambda\vec{b}$, $\lambda\in[0,1]$. Odatle je $\overrightarrow{AZ}=(\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{AY})/2=(\vec{a}+\vec{c})/2+\lambda(\vec{a}+\vec{b})/2=\overrightarrow{AR}+\lambda\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AR}+\lambda\overrightarrow{RQ}$, $\lambda\in[0,1]$, što znači da se točka Z giba po stranici $\overline{RQ}$ romba PCQR. Analogno se pokazuje da se točka Z giba po stranicama $\overline{QC}, \overline{CP}, \overline{PR}$ romba PCQR dok se točka X giba po stranicama $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ kvadrata ABCD, a točka Y po stranicama $\overline{GC}, \overline{CB}, \overline{BF}$ kvadrata FGCB. Dakle, geometrijsko mjesto točaka Z je rub romba PCQR.

Zadatak 58 (Medunarodna matematička olimpijada u Rumuniji, 1960.): Zadana je kocka ABCDEFGH. Naći geometrijsko mjesto točaka Z za koje je $k=(XYZ)=-1/2$, gdje je X proizvoljna točka dijagonale $\overline{AC}$ donje baze, a Y proizvoljna točka dijagonale $\overline{HF}$ gornje baze zadane kocke.
Rješenje:



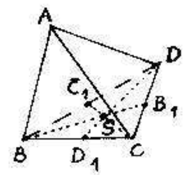
Neka je $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$. Tada je $\overrightarrow{AX}=\lambda\overrightarrow{AC}=$ $=\lambda(\vec{a}+\vec{b})$, $\lambda\in[0,1]$, $\overrightarrow{FY}=\overrightarrow{FH}=\mu(\vec{b}-\vec{a})$, $\mu\in[0,1]$, $\overrightarrow{AY}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FY}=\vec{a}+\vec{c}+\mu(\vec{b}-\vec{a})$, $\mu\in[0,1]$, $\overrightarrow{AZ}=$ $=(\overrightarrow{AX}-k\overrightarrow{AY})/(1-k)=(\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{AY}/2)/(1+1/2)=$ $=(2\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{AY})/3=(\vec{a}+\vec{c})/3+2\lambda(\vec{a}+\vec{b})/3+\mu(\vec{b}-\vec{a})/3$.
Za $\lambda=\mu=0 \Rightarrow \overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{AP}=\vec{a}/3+\vec{c}/3$; za $\lambda=0$ i $\mu=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{AS}=\vec{b}/3+\vec{c}/3$; za $\lambda=1$ i $\mu=0 \Rightarrow \overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{AQ}=$ $=\vec{a}+2\vec{b}/3+\vec{c}/3$; za $\lambda=\mu=1 \Rightarrow \overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{AR}=2\vec{a}/3+\vec{b}+\vec{c}/3$.
Lako se pokazuje da je traženo geometrijsko mjesto točaka Z četverokut PQRS.
Kako je $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=2\vec{a}/3+2\vec{b}/3$ i $\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AS}=$ $=2\vec{a}/3+2\vec{b}/3$, tj. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$, tada je PQRS paralelogram. Iz $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PS}=(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}).(\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AP})=(2\vec{a}/3+2\vec{b}/3).(-\vec{a}/3+\vec{b}/3)=0$ izlazi da je $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{PS}$, pa je PQRS pravokutnik.
Dakle, rješenje zadatka je pravokutnik PQRS.

Zadatak 59: Dan je tetraedar ABCD. Pravci AD i BC su okomiti akko je $|AB|^2+|CD|^2=|AC|^2+|BD|^2$.
Dokaz:



$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})^2-\overrightarrow{AC}^2=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2-$
$-\overrightarrow{AB}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}^2-\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{DB}^2-\overrightarrow{AB}^2 \Leftrightarrow |AB|^2+|CD|^2=$
$=|AC|^2+|BD|^2$.

Zadatak 60 Općinsko natjecanje SR Hrvatske, IV r., 1982.): Neka je u tetraedru ABCD točka S težište trokuta BCD. Dokazati da je tada $3.|AS|<|AB|+|AC|+|AD|$.
Dokaz:



$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DS}$, tj. $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+$ $+2\overrightarrow{BB_1}/3$, $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CC_1}/3$, $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DD_1}/3$. Zbrajanjem tih jednakosti izlazi $3\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+$ $+(2/3).(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.
Zbog nekolinearnosti vektora $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ bit će tada $3.|\overrightarrow{AS}|=|3\overrightarrow{AS}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}|<|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|+$ $+|\overrightarrow{AD}|$, odakle je $|AS|<(|AB|+|AC|+|AD|)/3$.

Z a d a c i   z a   v j e ž b u :

1. Ako su M,N polovišta dužina $\overline{AB}, \overline{CD}$, a E,F točke takve da je $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{BC}$, dokazati da je N polovište dužine $\overline{EF}$.

2. Zadan je paralelogram ABCD, točka $E \in \overline{AB}$ za koju je $(ABE) = -1/2$ i točka $F = \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{DE}$. Izračunati (ACF). (R: $(ACF) = -1/3$).
3. Neka u trokutu ABC upisana mu kružnica dodiruje njegove stranice $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ u točkama D, E, F i neka su r_a, r_b, r_c polumjeri vanjskih pripisanih mu kružnica. Tada se pravci AD, BE, CF sijeku u jednoj točki G (Žergonova točka), za koju vrijedi $\vec{r}_G = (r_a \vec{r}_A + r_b \vec{r}_B + r_c \vec{r}_C)/(r_a + r_b + r_c)$. Dokazati !
4. Neka vanjske pripisane kružnice trokuta ABC, čiji su polumjeri r_a, r_b, r_c, dodiruju stranice BC, CA, AB tog trokuta u točkama D, E, F. Tada se pravci AD, BE, CF sijeku u jednoj točki N (Nagelova točka) za koju vrijedi $\vec{r}_N = (r_b r_c \vec{r}_A + r_c r_a \vec{r}_B + r_a r_b \vec{r}_C)/(r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b)$.
5. Ako je ABC zadani trokut, T njegovo težište, a O proizvoljna točka, tada vrijedi: $|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 - (|TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2) = 3 \cdot |OT|^2$.
6. Dokazati vektorski kosinusov teorem.
7. Dokazati vektorski Pitagorin teorem.
8. Dokazati vektorski Heronovu formulu za površinu trokuta.
9. Dokazati vektorski da je obodni kut nad promjerom kružnice pravi kut (Talesov teorem).
10. Dokazati vektorski da su dijagonale pravokutnika međusobno jednake.
11. Dokazati vektorski da se sve tri simetrale stranica trokuta sijeku u jednoj točki (središtu trokutu opisane kružnice).
12. Dokazati vektorski da je paralelogram romb akko su mu dijagonale međusobno okomite.
13. Četverokut ABCD je ortoid akko vrijedi $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2$.
14. Dokazati da za paralelepiped ABCDEFGH vrijedi $|AG|^2 + |BH|^2 + |CE|^2 + |DF|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 + |AE|^2 + |BF|^2 + |CG|^2 + |DH|^2 + |EF|^2 + |FG|^2 + |GH|^2 + |HE|^2$.
15. Ako je T težište tetraedra OABC kod kojeg je $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COA = 90^\circ$, tada je $|TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 = 11 \cdot |TO|^2$.