

Republičko natjecanje učenika srednjih škola SRH

26. III 1972.

Prvi razred

1. Naći najmanji prirodni broj koji ima svojstvo da pri dijeljenju sa 2 daje ostatak 1, pri dijeljenju sa 3 ostatak 2, pri dijeljenju sa 4 ostatak 3, pri dijeljenju sa 5 ostatak 4, pri dijeljenju sa 6 ostatak 5, pri dijeljenju sa 7 ostatak 6, pri dijeljenju sa 8 ostatak 7 i pri dijeljenju sa 9 ostatak 8.

2. Ako je suma razlomaka

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

jednaka 1, onda su dva od ta tri razlomka jednaka 1, a preostali razlomak je jednak -1.

3. Konstruiraj peterokut kojemu su zadana površina stranica M, N, P, Q, R .

4. Unutar kvadrata $A_1A_2A_3A_4$ zadana je proizvoljna točka P . Iz vrha A_1 spuštена je okomica na A_2P , iz A_2 okomica na A_3P , iz A_3 okomica na A_4P a iz A_4 okomica na A_1P .

Dokaži da se sve četiri okomice (ili njihova produženja) sijeku u jednoj točki.

5. Dan je izraz

$$A = \frac{x^3 + a^3}{x - a} + \frac{x^3 - a^3}{x + a} - \frac{8a^3x^3}{x^4 - a^4} \quad (x \neq a, -a)$$

Prikaži ovaj izraz u obliku neskrativog razlomka $\frac{P}{Q}$ i dokaži, da je $Q^2 - P - 3a^2x^2$ potpun kvadrat.

Republičko natjecanje učenika srednjih škola SRH

26. III 1972.

Drugi razred

1. Neka su P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 pet točaka u unutrašnjosti kvadrata stranice 1. Dokažite, da je barem jedna od udaljenosti $\overline{P_1P_2}$ manja od $\sqrt{2}/2$. Pokaži da za svako $d < \frac{\sqrt{2}}{2}$ postoji raspored pet točaka unutar kvadrata, da ni koje dvije nisu udaljene za manje od d .
2. Dokaži da za svako $a, b, c \geq 0$ vrijedi
$$I = a b (a + b - 2c) + b c (b + c - 2a) + (c + a - 2b) \geq 0.$$
3. Nad dužinama \overline{AC} i \overline{CB} dijametra \overline{AB} kružnice k konstruirane kao nad dijametrima kružnice k_1 i k_2 . Neka je p proizvoljni pravac točkom C , koji siječe k u M i N , a kružnice k_1 i k_2 u p_1 i p_2 . Dokaži da je $\overline{MP_1} = \overline{NP_2}$.
4. Dva igrača A i B igraju ovu igru: A kaže neki broj između 1 i 10 (uključujući i njih). B tada zamisli opet neki takav broj, prebroji to onom što je rekao A i saopći tu sumu igraču A . Tada opet A pribroji neki broj između 1 i 10 prethodnoj sumi, saopći igraču B itd. Pobjednik je onaj igrač koji može prvi reći sumu 100. A je počeo s 2. Postoji li za B strategija da pobijedi?
5. Neka je $y \neq 0$, ± 1 . Stavimo $x_1 = \frac{y-1}{y+1}$, $x_2 = \frac{x_1-1}{x_1+1}$, $x_3 = \frac{x_2-1}{x_2+1}$ itd.
Odredi y ako je $x_{1972} = 3$.

Republičko natjecanje učenika srednjih škola SRH

26. III 1972.

Treći razred

1. Suma nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva jednaka je 1000. Nađi sve takve nizove.

2. Neka je T težište tetraedra $ABCD$, a P proizvoljna točka unutar tetraedra. Neka pravac TP siječe ravnine BCD , CDA , DAB , ABC redom u točkama A' , B' , C' , D' . Dokažite da je

$$\frac{A'P}{AT} + \frac{B'P}{BT} + \frac{C'P}{CT} + \frac{D'P}{DT} = 4.$$

3. Dokazati identitet

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = \frac{n-1}{n} (\log_x 2)^{-2}.$$

4. Dano je 7 dužina, čije su duljine a_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) veće od 10 cm, a manje od 1 m. Dokaži da postoje tri od ovih dužina s kojima je moguće konstruirati trokut.
5. Dokaži da polinom $p(x)$ s cijelim koeficijentima, koji poprima za tri različita cijela broja vrijednost 1, ne može imati cjelobrojni korijen.

Republičko natjecanje učenika srednjih škola SRH

26. III 1972.

Četvrti razred

1. Neka je a_1, a_2, \dots, a_n neka permutacija brojeva $1, 2, \dots, n$. Dokaži da je $p = (a_1 - 1)(a_2 - 2) \dots (a_n - n)$ paran broj, ako je ne paran.
2. Dokaži da jednačina $x! + y! = 10z + 9$ nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.
3. Neka je T težište tetraedra ABCD, a P proizvoljna točka unutar tetraedra. Neka pravac TP siječe ravnine BCD, CDA, DAB, ABC u točkama A', B', C', D' redom. Dokaži da je: $\frac{A'P}{AT} + \frac{B'P}{BT} + \frac{C'P}{CT} + \frac{D'P}{DT} = 4$
4. U kvadratnoj jednačini tablici tipa 4×4 proizvoljno s porazmješteni brojevi $1, 2, 3, \dots, 16$. Dokaži da postoje dva susjedna polja (tj. Polja sa zajedničkim bridom) u kojima su brojevi čija je razlika barem 4.
5. Dokaži da je $\sin x - \sin y \leq \frac{3}{2} - \cos(x - y)$.