

Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (<http://www.dms.org.rs/>) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatske) i saveznih natjecanja (SFRJ) i skenove objavim na web stranici <http://public.carnet.hr/mat-natj> .

Antonija Horvatek
<http://public.carnet.hr/~ahorvate/>

OBAVEŠTENJE PRETPLATNICIMA

1. Uredništvo poziva nastavnike i profesore matematike kao i ostale čitaoce da šalju svoje priloge za list: članke, odabrane zadatke, zadatke sa prijemnih ispita i matematičkih takmičenja, razne zanimljivosti. Poželjno je da svi rukopisi (osim učeničkih rešenja zadataka) budu pisani pisačom mašinom, s proredom. Rukopisi se ne vraćaju.

2. *Matematički list* namenjen je svim učenicima IV—VIII raz. osnovne škole. List izlazi 6 puta u toku školske godine, i to 1. X, 15. XI, 1. I, 15. II, 1. IV i 15. V.

3. Godišnja pretplata (za svih 6 brojeva) iznosi 30 dinara. Naručiocima za više od 10 kompleta odobravamo rabat (20%, 15%, 10%), zavisno od roka do kojeg se isplati celokupna pretplata (1. XII, 1. III, 1. VI). Nikakvi drugi odbici ne uvažavaju se.

Narudžbine se šalju samo neposredno na adresu lista, a novac na žiro-račun „Matematičkog lista“ broj 60806-678-14627. Pri tome treba obavezno navesti tačnu adresu na koju list treba dostaviti i jasno naznačiti na šta se narudžbina odnosno uplata odnosi.

Narudžbine primamo i direktno preko telefona redakcije, br. 011-638-263.

4. Raspoložemo kompletima lista iz školske 1968/69. god. (br. III, 1—5) šk. 1969/70. god. (br. IV, 1—5), šk. 1970/71. god. (br. V, 2 i 3), šk. 1971/72. god. (br. VI, 1—5), šk. 1972/73. god. (br. VII, 1—5), šk. 1973/74. god. (br. VIII, 1—5), šk. 1974/75. god. (br. IX, 1—6) i šk. 1975/76. god. (br. X, 1—6). Od ovih godišta prodaju se: godišta III, IV, VI i VII po sniženoj ceni od 6 dinara za komplet, godišta V po ceni od 4 dinara i godišta VIII, IX i X po ceni od 10 din. Zbirka rešenih zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovne škole može se dobiti po ceni od 8 din.

5. Mole se poverenici *Matematičkog lista* da izmire sva zaostala dugovanja.

6. Sve priloge, primedbe i naružbe slati isključivo na adresu:

Matematički list, p.p. 728, 11001 Beograd

S A D R Ź A J

1. Javorina Stojanović: Nešto iz teorije grupa	1
2. D. Milošević: Fibonačijevi brojevi	8
3. V. Stojanović: Zanimljive osobine stepena 2^n i 3^n	10
4. Iz istorije elementarne matematike	14
5. Testovi za proveravanje znanja iz matematike	16
6. Sedmo savezno takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola Jugoslavije	20
7. Zadaci sa republičkog takmičenja učenika SR BiH	25
8. Odabrani zadaci	28
9. Konkursni zadaci	30
10. Matematička razonoda	32
11. Vi pitate — mi odgovaramo	korice 3 str.
12. Nagrađeni zadatak br. 48	„ „ „

MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

XI

1



PITAGORA

BEOGRAD
1976.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST
za učenike osnovne škole

God. XI, broj 1 (1976/77)

Izlazi šest puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
SR SRBIJE

Beograd, Knez Mihajlova 35/IV, p. p. 728.

Urednici:

Platon Dimić (gl. ured.) i *Miroslav Živković* (odg. ured.)

Redakcioni odbor:

Višnja Brkić-Devčić (Zagreb), *Kosta Mijatović* (Sarajevo)

Bogumila Kolenko (Ljubljana), *Veljko Živković* (Titograd)

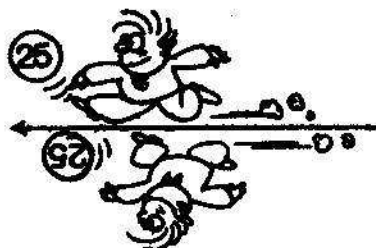
Duško Kovačev (Skopje), *Vladimir Stojanović* (Beograd)

Sva prava umnožavanja, preštampavanja i prevođenja zadržava
Društvo matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije

Oslobođeno plaćanja poreza na promet na osnovu rešenja Republičkog sekretarijata
za kulturu SR Srbije br. 413-186-03 od 11. 1. 1973. godine

Šampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

MATEMATIČKA TAKMIČENJA



SEDMO SAVEZNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

Ovo savezno takmičenje, čiji je neposredni organizator (prema odluci Komisije za mlade matematičare Saveza društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije) i ove godine bio *Matematički list za učenike osnovne škole iz Beograda*, održano je 6. juna 1976. g. u Kumrovcu.

U ovom takmičenju učestvovalo je ukupno 70 učenika VII i VIII razreda, koji su na osnovu međurepubličkog dogovora Društava matematičara, fizičara i astronoma (MFA) Jugoslavije stekli ovo pravo kao najbolji na prethodno održanim republičkim i pokrajinskim takmičenjima. Takmičilo se 13 učenika iz SR Bosne i Hercegovine, 4 iz SR Crne Gore, 16 iz SR Hrvatske, 11 iz SR Slovenije, 18 iz SR Srbije bez pokrajina, 8 iz SAP Vojvodine. Bilo je ukupno 35 učenika iz VII razreda i 35 učenika iz VIII razreda.

Izrada zadataka trajala je 120 minuta. Svaki učesnik rešavao je na svom materijalnom jeziku 5 zadataka, koji su donosili najviše 100 poena. Zadatke je pripremila Savezna komisija za takmičenje, koju su sačinjavali delegati republičkih i pokrajinskih Društava MFA, i to: Kosta Mijatović (predsednik komisije, BiH), Božo Bakrač (Crna Gora), dr Mirko Polonijo (Hrvatska), Bogumila Kolenko (Slovenija), Vladimir Stojanović (Srbija bez pokrajina) i Velimir Stojanović (Vojvodina). Nadzor za vreme izrade zadataka i pregled zadataka izvršili su članovi Komisije.

Izrada zadataka bila je obavljena u Domu boraca i omladine u Kumrovcu, gde je idućeg dana bilo izvršeno i objavljivanje postignutih rezultata. Posle takmičenja učenici su posetili rodnu kuću predsednika SSR Jugoslavije druga Josipa Broza Tita, muzej Mateje Gubca u Donjoj Stubici i Stubičke Toplice.

Nagrađeni su i pohvaljeni sledeći učenici:

VII RAZRED

1. Timčenko Aleksandar, uč. OŠ „I. Gundulić“, Beograd (I nagrada)
2. Damjanović Aleksandar, uč. OŠ „I. Gundulić“, Beograd (I nagrada)
3. Marjanović Zorica, uč. OŠ „A. Savčić“, Valjevo, (I nagrada)
4. Ležajić Nina, uč. OŠ „Sv. Sava“, Beograd (II nagrada)
5. Petronijević Mirjana, uč. OŠ „A. Savčić“, (II nagrada)
6. Čekerevac Spomenka, uč. OŠ „H. Kikić“, Sanski Most (III nagrada)
7. Krčmar Slobodan, uč. OŠ „M. Pupin“, Veternik (III nagrada)
8. Stojisavljević Ljubo, uč. OŠ „H. Sanski Most (III nagrada)
9. Tačić Miodrag, uč. OŠ „A. Savčić“, Valjevo (III nagrada)
10. Elez Nebojša, uč. OŠ „M. Pijade“, Vogošća (pohvala)
11. Pavličić Ivan, uč. OŠ „M. Gorki“, Titograd (pohvala)
12. Janković Srđan, uč. OŠ „B. Božović“, Titograd (pohvala)
13. Cokan Tomaž, uč. OŠ „Prule“, Ljubljana (pohvala)
14. Habijan Gorazd, uč. OŠ „Pali prvoborac“, Žiri (pohvala)
15. Prekić Danka, uč. OŠ „J. Milovanović“, Sopot (pohvala)
16. Malinić Orah, uč. OŠ „R. Pavićević“, Bajina Bašta (pohvala)

VIII RAZRED

1. Vukosavić Slobodan, OŠ „Popinski borci“, Vrnjačka Banja (I nagrada)
2. Rodić Enisa, uč. OŠ „A. Senoa“, Zagreb (I nagrada)
3. Mladonović Biljana, uč. OŠ „21 maj“, Niš (I nagrada)
4. Džabić Emir, uč. OŠ „H. Humo“, Mostar (II nagrada)
5. Petrović Nina, uč. OŠ „H. Kikić“, Sanski Most (II nagrada)
6. Kaljević Igor, uč. OŠ „M. Višnjić“, Banja Luka (II nagrada)
7. Lazarevski Trešnja, uč. OŠ „N. Dragosavljević“, Okučani (II nagrada)
8. Čilenšek Alja, uč. OŠ „V. Šmuc“, Izola (II nagrada)
9. Veličković Boban, uč. OŠ „J. Miodragović“, Beograd (III nagrada)
10. Gorković Dražen, uč. OŠ „R. Lakić“, Beograd (III nagrada)
11. Popović Dragana, uč. OŠ „D. Radosavljević“, M. Mitrovića (III nagrada)
12. Manojlović Slavko, uč. OŠ „P. Kočić“, Nova Topola (III nagrada)
13. Pišernik Jasenka, uč. OŠ „A. Senoa“, Zagreb (III nagrada)
14. Elezović Sančica, uč. OŠ „I. Gundulić“, Beograd (III nagrada)
15. Resman Goran, uč. OŠ „Koroške Bele“, Jesenice (pohvala)
16. Pišernik Maca, uč. OŠ „Prežihov V.“, Ljubljana (pohvala)
18. Prašalo Željka, uč. OŠ „29 novembar“, Sarajevo (pohvala)
19. Klobučar Davor, uč. OŠ „V. Nazor“, Đakovo, (pohvala)
20. Pupo Zajko, uč. OŠ „Igmanski marš“, Vogošća (pohvala)

Matematički list je obezbedio nagrade za najbolje učesnike takmičenja u vidu vrednih knjiga. Nagrađenim učenicima uručene su diplome, pohvaljenima pohvale, a svima takmičarima uopšte priznanja za učestvovanje u ovom takmičenju. Sem toga su 6 najboljih takmičara nagrađeni besplatnim boravkom u *Letnjoj školi mladih matematičara*, koju je početkom jula organizovalo Društvo matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije u letovalištu „Šuplja Stena“ kod Beograda.

Naposletku, prilikom ovog takmičenja uočeno je da su se na njemu najviše istakli učenici osnovnih škola „I. Gundulić“ iz Beograda, „A. Senoa“ iz Zagreba, „H. Kikić“, iz Sanskog Mosta i „A. Savčić“ iz Valjeva. Zbog toga su aktivima matematičara i direktorima ovih škola upućene čestitke od strane Komisije za takmičenje, sa knjigama koje je tim školama uputio *Matematički list*.

ZADACI SA VII SAVEZNOG TAKMIČENJA

VII RAZRED

1. Morska voda sadrži 5% soli. Koliko kilograma obične vode treba pomiješati sa 40 kg morske vode, pa da dobivena mešavina sadrži 2% soli?
2. Odredi najmanji razlomak sa kojim treba podeliti razlomke $\frac{8}{15}$, $\frac{12}{35}$ i $\frac{20}{21}$, takav da u sva tri slučaja količnik (kvocijent) bude prirodan broj.
3. Kružnice k_1 i k_2 dodiruju se spolja (izvana) u tački A. Prava (pravac) koja sadrži tačku A seče kružnicu k_1 još u tački M i kružnicu k_2 još u tački N. Dokazati da su tangente t_1 i t_2 datih kružnica, za koje su M i N dodirne tačke (dirališta), međusobno paralelne.
4. Dokazati da svi kvadri (pravougli paralelopipedi) kojima su ploština (po vršina) (u cm^2) i volumen (zapremina) (u cm^3) izraženi istim brojem, imaju isti zbroj (zbir) recipročnih vrijednosti duljina (dužina) triju bridova (ivica) iz istog vrha.
5. Odabran je bilo koji broj sa 2000 cifara (znamenki) koji je djeljiv sa 9. Zbir (zbroj) njegovih cifara označimo sa a, zbir cifara broja a sa b, zbir cifara broja b sa c. Koliki je broj c?

VIII RAZRED

1. Bilo koji prirodni broj n uvećan je za svoju četverostruku recipročnu vrednost i taj zbir (zbroj) je kvadriran. Ako se dobijeni rezultat umanjí za kvadrat četverostruke recipročne vrednosti datog prirodnog broja n , dobija se prirodan broj koji nije deljiv sa 5. Dokazati!

2. Neki avion preletio je prvih 385 km brzinom od 220 km/h. Preostali dio puta preletio je brzinom od 330 km/h. Srednja brzina leta na cijelom putu je bila 250 km/h. Koliki je put preletio avion?

3. Ravnina (ravan) presijeca kocku tako da tri brida (ivice) kocke sa zajedničkim vrhom siječe u tačkama koje te bridove dijele u omjerima (razmjerama) 2:1, 3:1 i 4:1, računajući od zajedničkog vrha.

Kako se odnose volumeni (zapremine) tijela, na koje ta ravnina dijeli kocku?

4. Dat je pravougli trougao (pravokutni trokut) ABC . Iz temena (vrha) A pravog ugla (kuta) konstruisana je težišna duž (težišnica) AM . Visina AD trougla ACM polovi (raspolavlja) naspramnu stranicu.

a) Izračunati uglove trougla ABC .

b) Izračunati površinu i zapreminu (ploštinu i volumen) tela, koje nastaje obrtanjem trougla ABC oko stranice AB , ako dužina (duljina) duži (dužine) AD iznosi $k\sqrt{3}$.

5. U trapezu $ABCD$ paralela sa osnovicom AB siječe dužine (duži) AC i BC redom u tačkama M i N .

Dokazati da su ploštine trokuta (površine trouglova) DAM i DBN jednake.

Rešenja zadataka

VII RAZRED

1. U 40 kg morske vode ima $40 \cdot 0,05 \text{ kg} = 2 \text{ kg}$ soli. Ako dolijemo 60 kg čiste vode, imaćemo 100 kg mešavine sa 2 kg soli, odnosno sa 2% soli.

2. Označimo traženi razlomak sa $\frac{a}{b}$. Tada moraju biti celi brojevi sledeći

proizvodi (produkti): $\frac{8}{15} \cdot \frac{b}{a}$, $\frac{12}{35} \cdot \frac{b}{a}$ i $\frac{20}{21} \cdot \frac{b}{a}$. To će biti ispunjeno ako je $b = 105n$,

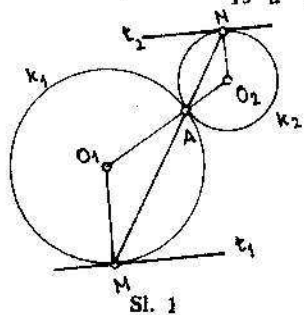
jer je 105 najmanji zajednički sadržalac za brojeve 15,

35 i 21. Da bi razlomak $\frac{a}{b}$ bio najmanji, treba da

bude $a=1$ (najmanji prirodan broj), a $b=105n$ treba da bude najveći prirodan broj. Pošto najveći prirodan broj ne postoji, to ne postoji ni najmanji

razlomak $\frac{a}{b} = \frac{1}{105n}$.

3. Trouglovi (trokuti) O_1AM i O_2AN su jednakokraki, pa je $\angle AMO_1 = \angle MAO_1$ i $\angle ANO_2 = \angle NAO_2$ (sl. 1). Kako je $\angle MAO_1 = \angle NAO_2$ (kao unakrsni), to je i $\angle AMO_1 = \angle ANO_2$. Kako je A



Sl. 1

tačka prave (pravca) MN , sleduje da su uglovi (kutovi) AMO_1 i ANO_2 naizmenični, pa iz njihove jednakosti zaključujemo da je $O_1M \parallel O_2N$. Poznato je da je tangenta upravna na dodirnom poluprečniku (radijusu), pa je $t_1 \perp O_1M$ i $t_2 \perp O_2N$. Otuda sleduje da je $t_1 \parallel t_2$.

4. Primenjujući formule za površinu i zapreminu kvadra, dobijamo: $2ab + 2ac + 2bc = abc$. Ako ovu jednakost podelimo sa $2abc$, dobićemo:

$$\frac{2ab}{2abc} + \frac{2ac}{2abc} + \frac{2bc}{2abc} = \frac{abc}{2abc},$$

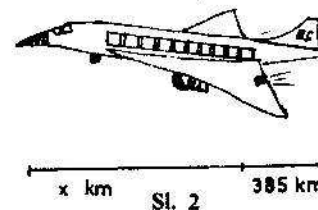
odakle je: $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$, što se i tvrdilo.

5. Zbir cifara datog broja deljiv je sa 9 i nije veći $2000 \cdot 9 = 18000$, tj. $a < 18000$. Zbir cifara broja a je deljiv sa 9 i nije veći od 36, tj. $b < 36$ (za $a = 9999$ je $b = 36$). Prema tome, zbir cifara broja b je 9, tj. $c = 9$.

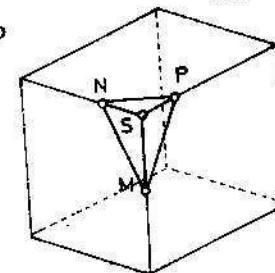
VIII RAZRED

1. $\left(n + \frac{4}{n}\right)^2 - \left(\frac{4}{n}\right)^2 = n^2 + 8 + \left(\frac{4}{n}\right)^2 - \left(\frac{4}{n}\right)^2 = n^2 + 8$. Dobijeni broj je prirodan. Da bi on bio deljiv sa 5, morao bi imati na mestu jedinica cifru (znamenku) 0 ili 5. Međutim, kako se broj $n^2 + 8$ može završavati samo ciframa koje pripadaju skupu $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, to poslednja cifra broja $n^2 + 8$ ne može biti ni 0, ni 5.

2. Prvi deo puta avion je preleteo za $\frac{385}{220} = 1,75$ časova. Ostali deo puta (x km) avion je preleteo za t časova. Na osnovu toga dobijamo jednačine: $x = 330t$ i $385 + x = (3,5 + t) \cdot 250$, odnosno $385 + x = 875 + 250t$. Ako zamenimo t iz prve u drugu jednačinu $\left(t = \frac{x}{330}\right)$, dobićemo jednačinu po x : $385 + x = 875 + \frac{250x}{330}$, odakle je $x = \frac{33 \cdot 490}{8} = 2021,25$. Dakle, avion je preleteo put od $2406,25$ km (sl. 2).



Sl. 2



Sl. 3

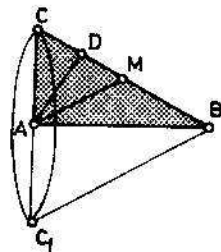
3. Neka je a ivica (brid), a $V = a^3$ zapremina (volumen) kocke. Odsečeno telo je piramida $SMNP$ (sl. 3). Zapreminu V_1 ove piramide izračunavamo uzimajući pravougli trougao (pravokutni trokut) SMN za bazu, a duž (dužinu) $SP = \frac{a}{4}$ za

visinu. Prema tome: $V_1 = \frac{1}{32} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{4} = \frac{1}{72} a^3$. Zapremina V_2 preostalog dela kocke je $V_2 = V - V_1 = \frac{71}{72} a^3$, pa je $V_2 : V_1 = 71 : 1$.

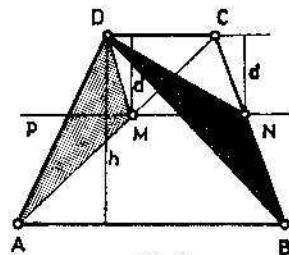
4. a) Poznato je da je u pravouglom trouglu (pravoludnom trokutu) težišna duž (težišnica) podudarna (sukladna) polovini hipotenuze: $AM = CM$. (sl. 4). Dalje, kako je $DM = CD$, $AD = AD$ i $\angle ADM = \angle ADC = 90^\circ$, sleduje da su podudarni među sobom trouglovi ADM i ADC , pa je $AM = AC$. Dakle, trougao AMC ima podudarne sve stranice, pa su mu unutrašnji uglovi (kutovi) po 60° . Otuda zaključujemo da je: $\angle ACB = 60^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$ i, prema pretpostavci, $\angle BAC = 90^\circ$.

b) Kako je $AD = k\sqrt{3}$, iz $AD = \frac{AC\sqrt{3}}{2}$ dobijamo da je $AC = 2k$. Dalje je $BC = 4k$ i $AB = 2k\sqrt{3}$. Dobijeno telo je konus poluprečinka (radijusa) AC , visine AB i izvodnice BC . Prema tome:

$$P = (AC)^2 \pi + AC \cdot BC \pi = 12k^2 \pi \quad \text{i} \quad V = \frac{1}{3} (AC)^2 \cdot AB \pi = \frac{8}{3} k^3 \pi.$$



Sl. 4



Sl. 5

5. Trouglovi (trokuti) ACD i BCD imaju zajedničku stranicu CD , a visine koje odgovaraju ovim stranicama jednake su visini h datog trapeza (sl. 5). Dakle;

$$P_{ACD} = \frac{CD \cdot h}{2} = P_{BCD}.$$

Trouglovi MCD i NCD imaju zajedničku stranicu CD , a odgovarajuće visine su im jednake normalnom rastojanju d između paralelnih pravih (pravaca) CD i p . Prema tome:

$$P_{MCD} = \frac{CD \cdot d}{2} = P_{NCD}.$$

Pošto je

$$P_{AMD} = P_{ACD} - P_{MCD} \quad \text{i} \quad P_{BND} = P_{BCD} - P_{NCD},$$

sleduje zaključak:

$$P_{AMD} = P_{BND},$$

što se i tvrdilo.