

Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (<http://www.dms.org.rs/>) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatske) i saveznih natjecanja (SFRJ) i skenove objavim na web stranici <http://public.carnet.hr/mat-natj> .

Antonija Horvatek  
<http://public.carnet.hr/~ahorvate/>

# MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

XIV

1



BEOGRAD  
1979.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA  
JUGOSLAVIJE

## MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. XIV, broj 1 (1979)

Izlazi šest puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA  
SR SRBIJE

Beograd, Knez Mihailova 35/IV, p. p. 728.

Urednici:

*Platon Dimić i Miroslav Živković*

Redakcioni odbor:

*Bogumila Kolenko* (Ljubljana), *dr Željko Pauše* (Zagreb),  
*Kosta Mijatović* (Sarajevo), *Danilo Šćepanović* (Titograd),  
*Duško Kovačev* (Skopje), *Velimir Sotirović* (Novi Sad),  
*Vladimir Stojanović* (Beograd)

Glavni i odgovorni urednik: *Miroslav Živković*

Sva prava umnožavanja, preštampavanja i prevođenja zadržava  
Društvo matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije

Oslobodeno plaćanja poreza na promet na osnovu rešenja Republičkog sekretarijata  
za kulturu SR Srbije br. 413-186-03 od 11.1.1973. godine

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

1979. - republičko natjecanje - 7. i 8. razred

Matematički list za učenike osnovne škole

[http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki\\_list](http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list)

<http://public.carnet.hr/mat-natj>



**REPUBLIČKO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA  
SR HRVATSKE,**

održano 11.–13. svibnja 1979. godine u Crikvenici

Republičko natjecanje iz matematike za učenike osnovnih škola SR Hrvatske održano je u okviru pokreta »Nauka mladima«. Natjecanje se odvijalo u dva dijela. Prvi dio sastojao se iz rješavanja po 6 lakših zadataka, na kojima se ocjenjivalo poznavanje tipičnog školskog gradiva. Drugi dio natjecanja zahtijevao je od učenika veći napor, jer je trebalo riješiti još 4 teža zadatka. Ovde ćemo dati rješenja druge skupine zadataka.

**VII RAZRED**

1. a) Dokaži da za bilo koji prirodan broj  $n$  vrijedi  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ .

b) Izračunaj zbroj

$$\frac{1}{100 \cdot 101} + \frac{1}{101 \cdot 102} + \frac{1}{102 \cdot 103} + \dots + \frac{1}{198 \cdot 199} + \frac{1}{199 \cdot 200}$$

2. Neka su  $x, y, z \in \mathbb{N}$ , takvi da je  $x < y < z$  i  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ . Nađi  $x, y, z$ .
3. Zadana je kružnica  $k$  i točke  $P$  i  $R$  unutar nje. Konstruiraj pravokutni trokut upisan u kružnicu  $k$ , takav da točka  $P$  pripada jednoj kateti, a  $R$  drugoj.
4. Četverokuti  $ABCD$  i  $EFGH$  imaju svojstvo da su točke  $B, C, D, A$ , redom polovišta dužina  $AE, BF, CG, DH$ . Ako je ploština četverokuta  $ABCD$  jednaka 1 (cm<sup>2</sup>), kolika je ploština četverokuta  $EFGH$ ?

**VIII RAZRED**

1. Neka su  $x, y, z \in \mathbb{N}$ , takvi da je  $x < y < z$ . Odredi  $x, y$  i  $z$ , ako je broj njihovih recipročnih vrijednosti jednak nekom cijelom broju  $a$ .
2. Na stranicama paralelograma  $ABCD$  odabrane su točke  $K \in AB, L \in BC, M \in CD$  i  $N \in DA$  tako da je  $d(A, K) : d(K, B) = d(B, L) : d(L, C) = d(C, M) : d(M, D) = d(D, N) : d(N, A) = k$ , gdje je  $k \in \mathbb{R}$  i  $k \neq 0$ . Dokazati da je četverokut  $KLMN$  paralelogram. Kako se odnose ploštine paralelograma  $ABCD$  i  $KLMN$ ?
3. Na pionirskom sportskom natjecanju pokazalo se je da se svaki dječak poznaje s točno  $n$  djevojčica i da se svaka djevojčica poznaje s točno  $n$  dječaka. Dokazati da je na natjecanju sudjelovao jednak broj dječaka i djevojčica.
4. Osnovica uspravne prizme  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  je trapez s bazama  $AB$  i  $CD$  u kojem su duljine stranica  $d(A, B) = 24, d(B, C) = 9, d(C, D) = 16$  i  $d(D, A) = 7$ . Koliki je volumen prizme ako dijagonala  $BD_1$  zatvara s dijagonalom  $BD$  baze kut od 45°?

**Rješenja zadataka**

**VII RAZRED**

1. a) Dovođenjem razlomaka na zajednički nazivnik dobivamo:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}, \text{ što je i trebalo dokazati.}$$

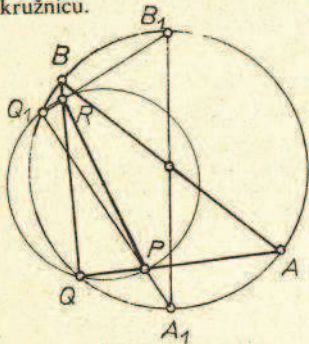
b) Koristeći se rezultatom dobivenim gore, svaki razlomak u datom zbroju napisaćemo kao razliku dva prosta razlomka, a onda će doći do poništavanja suprotnih brojeva, tako da ostanu samo prvi i posljednji razlomak:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \frac{1}{100 \cdot 101} & + & \frac{1}{101 \cdot 102} & + & \frac{1}{102 \cdot 103} & + & \dots & + & \frac{1}{198 \cdot 199} & + & \frac{1}{199 \cdot 200} & + & \frac{1}{200 \cdot 201} & + & \frac{1}{201 \cdot 202} \\ & & \frac{1}{101} & - & \frac{1}{102} & & & & \frac{1}{198} & - & \frac{1}{199} & & \frac{1}{200} & - & \frac{1}{201} \\ & & \frac{1}{102} & - & \frac{1}{103} & & & & \frac{1}{199} & - & \frac{1}{200} & & \frac{1}{200} & - & \frac{1}{201} \end{array}$$

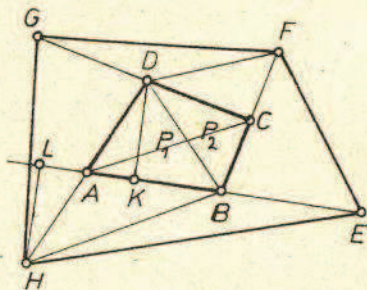
2. Očigledno je da ne može biti  $x=1$ . Prema tome, najmanja moguća vrijednost za  $x$  je  $x=2$ . Tada imamo  $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ , odakle je  $2z + 2y = yz$ , odnosno  $yz - 2y = 2z$ . Odavde dobivamo  $y = \frac{2z}{z-2}$ . Zbog  $y \geq 3$  i  $z \geq 4$  dobivamo  $\frac{2z}{z-2} \leq 3$ , odakle je  $2z \geq 3z - 6$ , odnosno  $z \geq 6$ . Dakle,  $z=4$ , ili  $z=5$ , ili  $z=6$ . Nije moguće  $z=4$ , jer je tada  $y=4$ , što je protivrečno uvjetu  $y < z$ . Za  $z=5$  ne dobivamo naravnu vrijednost za  $y$ . Za  $z=6$  dobivamo  $y=3$ , pa je rješenje  $x=2, y=3, z=6$ . Nije teško uvjeriti se da je to jedino rješenje zadatka.



3. Ako je  $Q$  vrh pravog kuta traženog trokuta, onda će dužina  $PR$  biti dijametar opisane kružnice trokuta  $PQR$ . Dakle, točku  $R$  dobit ćemo u presjeku date kružnice i kružnice dijametra  $PR$  (sl. 1). Zatim konstruiramo tetive  $AQ$  i  $BQ$ . Da je kut  $AQB$  prav slijedi iz činjenice da je svaki put nad dijametrom prav. Zadatak može da ima dva rješenja, kao na (sl. 1). trokuti  $ABQ$  i  $A_1B_1Q_1$ , jedno rješenje, ili nijedno, zavisno od toga da li kružnica dijametra  $PR$  siječe, dodiruje ili ne siječe datu kružnicu.



Sl. 1



Sl. 2

4. Označimo sa  $P_1$  i  $P_2$  ploštine trokuta  $ABD$  i  $BCD$ . Dokazujemo da trokut  $ABH$  ima ploštinu  $P_1$ . Neka su  $K$  i  $L$  nožišta okomica iz vrhova  $D$  i  $H$  na pravac  $AB$  (sl. 2). Pravokutni trokuti  $ADK$  i  $AHL$  sukladni su, jer je  $AH=AD$  i  $\angle HAL = \angle KAD$  (naizmjenični kutovi). Zbog toga su visine  $DK$  i  $HL$  trokuta  $ABD$  i  $ABH$  jednake, pa kako je  $AB$  zajednička osnovica, to je ploština trokuta  $ABH$  jednaka ploštini trokuta  $ABD$ . Tako i ploština trokuta  $HBE$  iznosi  $P_1$  ( $BE=AB$ , visina je  $HL$ ). Dakle, ploština trokuta  $AHE$  iznosi  $2P_1$ . Slično dokazujemo da je ploština trokuta  $CFG$  jednaka  $2P_2$ .

Ako sa  $P_3$  označimo ploštinu trokuta  $ABC$ , a sa  $P_3$  ploštinu trokuta  $ACD$ , onda, slično prethodnom izlaganju, dokazujemo da je ploština trokuta  $BEF$  jednaka  $2P_3$ , a ploština trokuta  $DGH$  jednaka  $2P_3$ .

Ploština  $P$  četverokuta  $EFGH$  jednaka je zbroju ploština trokuta  $AEH$ ,  $BEF$ ,  $CFG$ ,  $DGH$  i četverokuta  $ABCD$ , a to je:  $P=2P_1+2P_3+2P_2+2P_4+1=1+2(P_1+P_2+P_3+P_4)$ . Kako je  $P_1+P_2=P_3+P_4=1$ , to je  $P=1+2 \cdot 2=5$  (cm<sup>2</sup>).

## VIII RAZRED

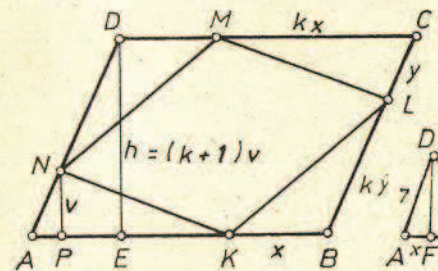
1. Uvjet  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a$  možemo napisati u obliku  $\frac{1}{ax} + \frac{1}{ay} + \frac{1}{az} = 1$ , gdje su  $ax$ ,  $ay$ ,  $az$  naravni brojevi i  $ax < ay < az$ . Na način, kao u zadatku 2 za VII razred, dobivamo jedinstveno rješenje:  $ax=2$ ,  $ay=3$ ,  $az=6$ , odnosno  $x=\frac{2}{a}$ ,  $y=\frac{3}{a}$ ,  $z=\frac{6}{a}$ . Odavde izlazi da rješenje postoji samo za  $a=1$ , i to  $x=2$ ,  $y=3$ ,  $z=6$ .

2. Neka je  $KB=DM=x$ . Tada je  $AK=CM=k \cdot x$ . Slično je  $CN=AN=y$  i  $BL=DN=k \cdot y$  (sl. 3). Lako se dokazuje da su trokuti  $AKN$  i  $CLM$  sukladni, pa je  $KN=LM$ . Na isti način, iz sukladnosti trokuta  $BKL$  i  $DMN$  slijedi da je  $KL=MN$ . Prema tome, četverokut  $KLMN$  ima jednake naspramne stranice, pa je on paralelogram.

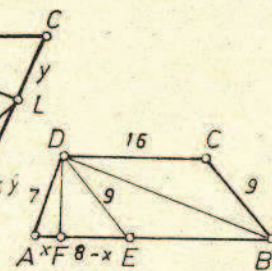
Neka su točke  $E$  i  $P$  nožišta okomica iz točaka  $D$  i  $N$  na pravac  $AB$ . Iz sličnosti pravokutnih trokuta  $ANP$  i  $ADE$  izlazi da je  $DE:NP=AD:AN$ , odakle je visina paralelograma:  $h=(k+1)v$ , gdje je  $v$  visina trokuta  $AKN$ . Slično, visina trokuta  $BKL$ , okomita na stranicu  $BK$ , iznosi  $k \cdot v$ .

Ploštinu  $p$  paralelograma  $KLMN$  dobit ćemo kada od ploštine  $P$  paralelograma  $ABCD$  oduzmemo ploštine trokuta  $AKN$  i  $CLM$ , tj.  $2P_1$  i ploštine trokuta  $BKL$  i  $DMN$ , tj.  $2P_2$ . Kako je  $P=AB \cdot h=(k+1)x(k+1)v=(k+1)^2xv$ ,  $P_1=\frac{1}{2}kxv$  i  $P_2=\frac{1}{2}xkv$ , to je  $p=P-2P_1-2P_2=(k+1)^2xv-kxv-kxv=(k^2+1)xv$ . Prema tome  $P:p=\frac{(k+1)^2}{k^2+1}$ .

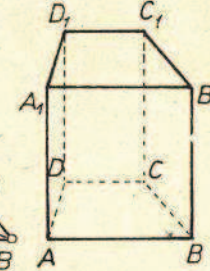
3. Neka je na natjecanju sudjelovalo  $a$  dječaka i  $b$  djevojčica. Svaki dječak se poznaje s točno  $n$  djevojčica, pa  $a$  dječaka ima ukupno  $n \cdot a$  poznanstava sa djevojčicama. Slično,  $b$  djevojčica ima točno  $n \cdot b$  poznanstava s dječacima. Međutim, svakom poznanstvu »dječak — djevojčica« odgovara točno jedno poznanstvo »djevojčica — dječak« (na primjer, poznanstvu »Aca — Vesna«, odgovara poznanstvo »Vesna — Aca«), pa je  $na=nb$ , odakle je  $a=b$ . Dakle, broj dječaka jednak je broju djevojčica, što se i tvrdilo.



Sl. 3



Sl. 4



Sl. 5

4. Najprije ćemo izračunati duljinu visine  $DF$  i dijagonale  $BD$ . Duljina dužine  $AF$  označena je sa  $x$ , a ostale duljine označene su na sl. 4. Primjenjujući Pitagorin poučak na trokute  $ADF$  i  $DEF$  dobit ćemo:  $7^2-x^2=h^2$  i  $9^2-(8-x)^2=h^2$ , odnosno  $7^2-x^2=9^2-(8-x)^2$ . Odavde je  $x=2$ , a  $8-x=6$ . Potom dobivamo da je  $h^2=45$ , odnosno  $h=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ . Sada imamo duljine kateta  $DF$  i  $BF$  pravokutnog trokuta  $BDF$ . Iz  $BD^2=DF^2+BF^2$  dobivamo:  $d(B,D)=23$ .

Trokut  $ABD_1$  na sl. 5 je pravokutni istokrani, pa je duljina visine  $DD_1$  prizme jednaka duljini dijagonale  $BD$ . Kako je ploština  $P$  baze  $ABCD$ :  $P=\frac{1}{2}(24+26) \cdot 3\sqrt{5}=60\sqrt{5}$ , to je volumen prizme:  $V=60\sqrt{5} \cdot 23=1380\sqrt{5}$ .



**REPUBLIČKO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA  
SR HRVATSKE  
1979. godina**

**VII RAZRED**

1. a) Dokaži da za bilo koji prirodan broj  $n$  vrijedi  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$  .
- b) Izračunaj zbroj  $\frac{1}{100 \cdot 101} + \frac{1}{101 \cdot 102} + \frac{1}{102 \cdot 103} + \dots + \frac{1}{198 \cdot 199} + \frac{1}{199 \cdot 200}$  .
2. Neka su  $x, y, z \in \mathbb{N}$ , takvi da je  $x < y < z$  i  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ . Nađi  $x, y, z$ .
3. Zadana je kružnica  $k$  i točke  $P$  i  $R$  unutar nje. Konstruiraj pravokutni trokut upisan u kružnicu  $k$ , takav da točka  $P$  pripada jednoj kateti a  $R$  drugoj.
4. Četverokuti  $ABCD$  i  $EFGH$  imaju svojstvo da su točke  $B, C, D, A$  redom polovišta dužina  $AE, BF, CG, DH$ . Ako je površina četverokuta  $ABCD$  jednaka  $1 \text{ (cm}^2\text{)}$ , kolika je površina četverokuta  $EFGH$ ?

**REPUBLIČKO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA  
SR HRVATSKE  
1979. godina**

**VIII RAZRED**

1. Neka su  $x, y, z \in \mathbb{N}$ , takvi da je  $x < y < z$ . Odredi  $x, y, z$ , ako je zbroj njihovih recipročnih vrijednosti jednak nekom cijelom broju  $a$ .
2. Na stranicama paralelograma  $ABCD$  odabrane su točke  $K \in AB$ ,  $L \in BC$ ,  $M \in CD$  i  $N \in DA$  tako da je  $d(A,K):d(K,B) = d(B,L):d(L,C) = d(C,M):d(M,D) = d(D,N):d(N,A) = k$ , gdje je  $k \in \mathbb{R}$  i  $k \neq 0$ . Dokazati da je četverokut  $KLMN$  paralelogram. Kako se odnose površine paralelograma  $ABCD$  i  $KLMN$ ?
3. Na pionirskom sportskom natjecanju pokazalo se je da se svaki dječak poznaje s točno  $n$  djevojčica i da se svaka djevojčica poznaje s točno  $n$  dječaka. Dokazati da je na natjecanju sudjelovao jednak broj dječaka i djevojčica.
4. Osnovica uspravne prizme  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  je trapez s bazama  $AB$  i  $CD$  u kojem su duljine stranica  $d(A,B)=24$ ,  $d(B,C)=9$ ,  $d(C,D)=16$  i  $d(D,A)=7$ . Koliki je volumen prizme ako dijagonala  $BD_1$  zatvara s dijagonalom  $BD$  baze kut od  $45^\circ$ ?

## Rješenja zadataka

### REPUBLIČKO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE 1979. godina

#### VII RAZRED

1. a) Svođenjem razlomaka na zajednički nazivnik dobivamo  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$ , što je i trebalo dokazati.

b) Koristeći se rezultatom dobivenim gore, svaki razlomak u datom zbroju napisat ćemo kao razliku dva prosta razlomka, a onda će doći do poništavanja suprotnih brojeva, tako da ostanu samo prvi i posljednji razlomak:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{100 \cdot 101} + \frac{1}{101 \cdot 102} + \frac{1}{102 \cdot 103} + \dots + \frac{1}{198 \cdot 199} + \frac{1}{199 \cdot 200} = \\ &= \frac{1}{100} - \frac{1}{101} + \frac{1}{101} - \frac{1}{102} + \frac{1}{102} - \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{198} - \frac{1}{199} + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \\ &= \frac{1}{100} - \frac{1}{200} = \frac{1}{200} \end{aligned}$$

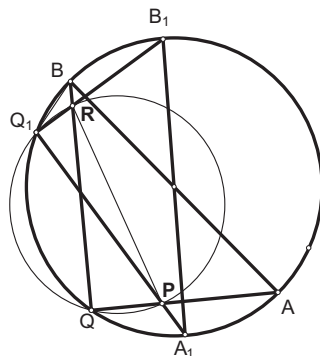
2. Očigledno je da ne može biti  $x=1$ . Prema tome, najmanja moguća vrijednost za  $x$  je  $x=2$ .

Tada imamo  $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ , odakle je  $2z+2y=yz$ , odnosno  $yz-2y=2z$ . Odavde dobivamo

$$y = \frac{2z}{z-2}. \text{ Zbog } y \geq 3 \text{ i } z \geq 4 \text{ dobivamo } \frac{2z}{z-2} \leq 3, \text{ odakle je } 2z \geq 3z-6, \text{ odnosno } z \geq 6.$$

Dakle,  $z=4$ , ili  $z=5$ , ili  $z=6$ . Nije moguće  $z=4$ , jer je tada i  $y=4$ , što je proturječno uvjetu  $y < z$ . Za  $z=5$  ne dobivamo prirodnu vrijednost za  $y$ . Za  $z=6$  dobivamo  $y=3$ , pa je rješenje  $x=2$ ,  $y=3$ ,  $z=6$ . Nije teško uvjeriti se da je to jedino rješenje zadataka.

3. Ako je  $Q$  vrh pravog kuta traženog trokuta, onda će dužina  $PR$  biti dijametar (promjer) opisane kružnice kružnice trokuta  $PQR$ . Dakle, točku  $R$  dobit ćemo u presjeku dane kružnice i kružnice dijametra  $PR$  (sl.1). Zatim konstruiramo tetive  $AQ$  i  $BQ$ . Da je kut  $AQB$  pravi slijedi iz činjenice da je svaki kut nad dijametrom prav. Zadatak može imati dva rješenja, kao na sl.1 trokuti  $ABQ$  i  $A_1B_1Q_1$ , jedno rješenje, ili nijedno, ovisno o tome da li kružnica dijametra  $PR$  siječe, dodiruje ili ne siječe datu kružnicu.



Sl. 1

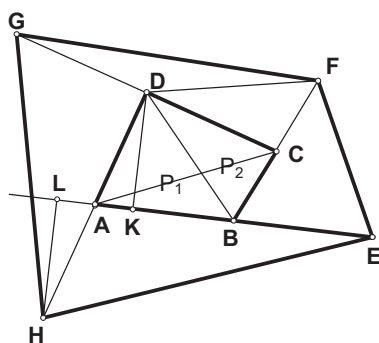
4. Označimo sa  $P_1$  i  $P_2$  površine trokuta ABD i BCD. Dokazat ćemo da trokut ABH ima površinu  $P_1$ . Neka su K i L nožišta okomica iz vrhova D i H na pravac AB (sl.2). Pravokutni trokuti ADK i AHL sukladni su, jer je  $AH=AD$  i  $\sphericalangle HAL = \sphericalangle KAD$  (naizmjenički kutovi). Zbog toga su visine DK i HL trokuta ABD i ABH jednake, pa kako je AB zajednička osnovica, to je površina trokuta ABH jednaka površini trokuta ABD. Tako i površina trokuta HBE iznosi  $P_1$  ( $BE=AB$ , visina je HL). Dakle, ploština trokuta AHE iznosi  $2P_1$ . Slično dokazujemo da je površina trokuta CFG jednaka  $2P_2$ .

Ako sa  $P_3$  označimo površinu trokuta ABC, a sa  $P_4$  površinu trokuta ACD, onda, slično prethodnom izlaganju, dokazujemo da je površina trokuta BEF jednaka  $2P_3$ , a površina trokuta DGH jednaka  $2P_4$ .

Površina P četverokuta EFGH jednaka je zbroju površina trokuta AEH, BEF, CFG, DGH i četverokuta ABCD, a to je:

$$P = 2P_1 + 2P_3 + 2P_2 + 2P_4 + 1 = 1 + 2(P_1 + P_2 + P_3 + P_4).$$

Kako je  $P_1 + P_2 = P_3 + P_4 = 1$ , to je  $P = 1 + 2 \cdot 2 = 5$  ( $\text{cm}^2$ ).



Sl. 2



## Rješenja zadataka

### REPUBLIČKO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE 1979. godina

#### VIII RAZRED

1. Uvjet  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a$  možemo napisati u obliku  $\frac{1}{xa} + \frac{1}{ya} + \frac{1}{za} = 1$ , gdje su  $ax, ay, az$  prirodni brojevi  $ax < ay < az$ . Kao način kao u zadatku 2 za VII razred, dobivamo jedinstveno rješenje:  $ax=2, ay=3, az=6$ , odnosno  $x=\frac{2}{a}, y=\frac{3}{a}, z=\frac{6}{a}$ . Odavde izlazi da rješenje postoji samo za  $a=1$ , i to  $x=2, y=3, z=6$ .

2. Neka je  $KB=DM=x$ . Tada je  $AK=CM=k \cdot x$ . Slično je  $CN=AN=y$  i  $BL=DN=k \cdot y$  (sl.3). Lako se dokazuje da su trokuti  $AKN$  i  $CLM$  sukladni, pa je  $KN=LM$ . Na isti način, iz sukladnosti trokuta  $BKL$  i  $DMN$  slijedi da je  $KL=MN$ . Prema tome, četverokut  $KLMN$  ima jednake nasuprotne stranice, pa je on paralelogram.

Neka su točke  $E$  i  $P$  nožišta okomica iz točaka  $D$  i  $N$  na pravac  $AB$ . Iz sličnosti pravokutnih trokuta  $ANP$  i  $ADE$  izlazi da je  $DE:NP=AD:AN$ , odakle je visina paralelograma:  $h=(k+1)v$ , gdje je  $v$  visina trokuta  $AKN$ . Slično, visina trokuta  $BKL$ , okomita na stranicu  $BK$ , iznosi  $k \cdot v$ .

Površinu  $p$  paralelograma  $KLMN$  dobit ćemo kada od površine  $P$  paralelograma  $ABCD$  oduzmemo površine trokuta  $AKN$  i  $CLM$ , tj.  $2P_1$  i površine trokuta  $BKL$  i  $DMN$ , tj.  $2P_2$ .

Kako je  $P = AB \cdot h = (k+1)x(k+1)v = (k+1)^2 x v$ ,  $P_1 = \frac{1}{2} k x v$  i  $P_2 = \frac{1}{2} x k v$ , to je

$p = P - 2P_1 - 2P_2 = (k+1)^2 x v - k x v - k x v = (k^2 + 1) x v$ . Prema tome

$$P:p = (k+1)^2 x v : (k^2 + 1) x v = \frac{(k+1)^2}{k^2 + 1}.$$

3. Neka je na natjecanju sudjelovalo  $a$  dječaka i  $b$  djevojčica. Svaki dječak se poznaje s točno  $n$  djevojčica, pa  $a$  dječaka ima ukupno  $n \cdot a$  poznanstava sa djevojčicama. Slično,  $b$  djevojčica ima točno  $n \cdot b$  poznanstava s dječacima. Međutim, svakom poznanstvu "dječak-djevojčica" odgovara točno jedno poznanstvo "djevojčica-dječak" (na primjer, poznanstvu "Ante-Vesna", odgovara poznanstvo "Vesna-Ante"), pa je  $na=nb$ , odakle je  $a=b$ . Dakle broj dječaka jednak je broju djevojčica, što se i tvrdilo.

4. Najprije ćemo izračunati duljinu visine  $DF$  i dijagonale  $BD$ . Duljina dužine  $AF$  označena je sa  $x$ , a ostale duljine označene su na sl. 4. Primjenjujući Pitagorin poučak na trokute  $ADF$  i  $DEF$  dobit ćemo:  $7^2 - x^2 = h^2$  i  $9^2 - (8-x)^2 = h^2$ , odnosno  $7^2 - x^2 = 9^2 - (8-x)^2$ . Odavde je  $x=2$ , a  $8-x=6$ .

Potom dobivamo da je  $h^2=45$ , odnosno  $h = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ . Sada imamo duljine kateta  $DF$  i  $BF$  pravokutnog trokuta  $BDF$ . Iz  $BD^2 = DF^2 + BF^2$  dobivamo  $d(B,D)=23$ .

Trokut  $ABD_1$  na sl. 5 je pravokutni jednakokrani, pa je duljina visine  $DD_1$  prizme jednaka duljini dijagonale  $BD$ . Kako je površina  $P$  baze  $ABCD$ :  $P = \frac{1}{2} (24+26) \cdot 3\sqrt{5} = 60\sqrt{5}$ , to je

volumen prizme:  $V = 60\sqrt{5} \cdot 23 = 1380\sqrt{5}$ .