

Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (<http://www.dms.org.rs/>) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatske) i saveznih natjecanja (SFRJ) i skenove objavim na web stranici <http://public.carnet.hr/mat-natj> .

Antonija Horvatek  
<http://public.carnet.hr/~ahorvate/>

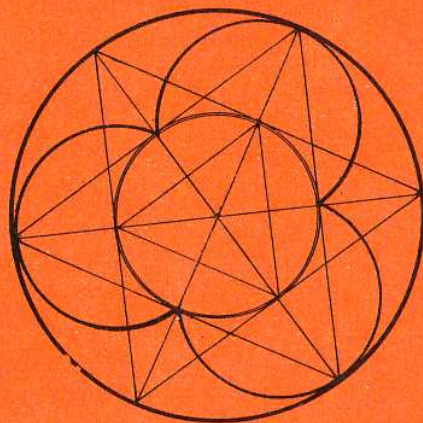
72

# MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

XIX

1



BEOGRAD  
1984.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA  
JUGOSLAVIJE

## MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. XIX, broj 1 (1984)

Izlazi šest puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA SR SRBIJE

Beograd, Knez Mihailova 35/IV, p. p. 728.

Redakcioni odbor:

*Bogumila Kolenko* (Ljubljana), *dr Željko Pauše* (Zagreb),  
*Kosta Mijatović* (Sarajevo), *Danilo Šćepanović* (Titograd),  
*mr Slobodanka Georgievska* (Skopje), *Velimir Sotirović* (Novi Sad),  
*Šinasi Korenica* (Priština), *mr Vladimir Stojanović* (Beograd)

Uredništvo:

*Miroslav Živković*, *mr Mirjana Mrmak*, *dr Arif Zolić*,  
*Branka Đerasimović* (sekretar uredništva), *dr Ljubomir Čukić*, *Ilija Mitrović*,  
*Staniša Petković*

Glavni i odgovorni urednik: *Platon Dimić*

Sva prava umnožavanja, preštampavanja i prevođenja zadržava  
Društvo matematičara SR Srbije

Oslobođeno plaćanja poreza na promet na osnovu rešenja Republičkog sekretarijata  
za kulturu SR Srbije br. 413-186-03 od 11. 1. 1973. godine

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

1984. - republičko natjecanje - 7. i 8. razred

Matematički list za učenike osnovne škole

[http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki\\_list](http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list)

<http://public.carnet.hr/mat-nati>



## ZADACI SA REPUBLIČKOG NATJECAJA UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE

Po ustaljenoj tradiciji, učenici su rješavali zadatke u dvije skupine. Prvu skupinu sačinjavaju lakši test-zadaci, a u drugoj skupini su po četiri teža zadatka za svaki razred. Ovdje ćemo navesti samo zadatke iz druge skupine i njihova rješenja.

### VII RAZRED

1. Iz jedne željezne šipke može se napraviti lanac od 80 karika, ili pak lanac od 100 karika, pri čemu jedna karika u lancu od 100 karika ima za 5 g manju masu od jedne karike u lancu od 80 karika. Kolika je masa željezne šipke?

2. Dana su dva racionalna broja (razlomka) sa svojstvom da je njihov produkt 7 puta manji od njihove sume. Kolika je suma recipročnih brojeva danih brojeva?

3. Oko dva dijagonalna suprotna vrha kvadrata duljine stranice 4 cm treba nacrtati u kvadratu dio kružnice polumjera  $\frac{a}{2}$ . Oko druga dva (preostala) vrha treba nacrtati s istim polumjerom  $\frac{a}{2}$  dio kružnice izvan kvadrata. Izračunati opseg i površinu lika omeđenog s dijelovima kružnica.

4. Kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju se izvana u točki  $P$ . Na kružnici  $k_1$  odabrana je točka  $A$ , a na kružnici  $k_2$  točka  $B$ , tako da točke  $A$ ,  $B$ ,  $P$  leže na istom pravcu. (Točke  $A$  i  $B$  su različite od  $P$ ). Neka je  $t_1$  tangenta kružnice  $k_1$  čije je diralište točka  $A$ , te neka je  $t_2$  tangenta kružnice  $k_2$  čije je diralište točka  $B$ .

Dokazati da su tangente  $t_1$  i  $t_2$  paralelne.

### VIII RAZRED

1. Dokazati da je izraz  $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$  djeljiv sa 10 za svaki prirodan broj  $n$ .

2. Prosječna starost 11 nogometaša neke momčadi je za 1 godinu veća nego prosječna starost 10 nogometaša bez kapetana. Za koliko je godina starost kapetana veća od prosječne starosti momčadi?

3. Zadan je kvadrat duljine starnice  $a$ . Nad svakom stranicom kao promjerom nacrtane su kružnice. Unija presjeka po dva kruga je figura koja podsjeća na četverolist.

a) Nacrtati sliku.

b) Izraziti površinu «četverolista» pomoću duljine stranice  $a$  zadanog kvadrata.

c) Koliki postotak površine un je krugova je površina «četverolista»? (Odrediti postotak na 1 decimalu).

4. Izračunati ploštinu trapeza  $ABCD$ , kojemu su duljine dijagonala  $AC=17$  i  $BD=113$ , a duljina visine 15.

Upuć: izraziti najprije duljine osnovica trapeza pomoću duljina dijagonala trapeza.

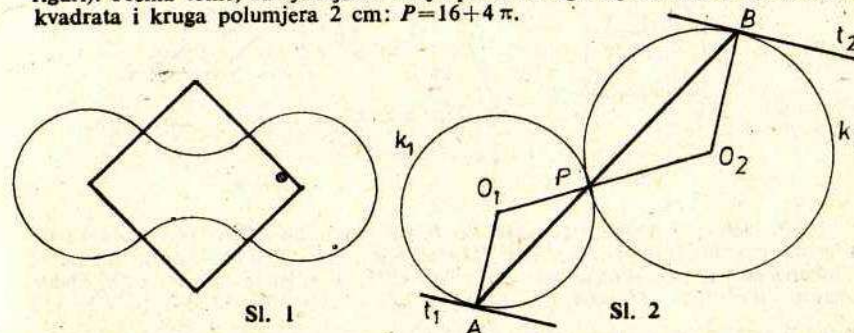
## Rješenja zadataka

### VII RAZRED

1. Ako je masa teže karike  $x$  g, možemo sastaviti jednadžbu:  $80x = 100(x - 5)$  odakle je  $x = 25$ . Dakle, masa željene šipke je  $80 \cdot 25$  g, tj. 2000 g ili 2 kg.

2. Neka su  $a$  i  $b$  dati razlomci. Tada je  $a + b = 7ab$ , odakle je:  $\frac{a+b}{ab} = 7$ . Zbroj recipročnih vrijednosti danih razlomaka je:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = 7$ .

3. U kvadratu su dvije četvrtine, a van kvadrata su dva puta po tri četvrtine kruga, sl. 1. Opseg dobivene figure jednak je duljini djevu kružnica polumjera  $\frac{a}{2} = 2$  cm:  $O = 8\pi$  cm. Površine osjenčenih dijelova naše figure jednake su četvrtinama kruga (zapravo, jednake su dijelovima površine kvadrata, koji ne pripadaju našoj figuri). Prema tome, zaključujemo da je površina figure jednaka zbroju površine kvadrata i kruga polumjera 2 cm:  $P = 16 + 4\pi$ .



Sl. 1

Sl. 2

4. Trokut  $O_1AP$  je jednakokrak, jer je  $O_1P = OA$ , sl. 2, a isto tako i trokut  $O_2BP$  je jednakokrak. Zbog toga je  $\angle O_1AP = \angle O_1PA$  i  $\angle O_2PB = \angle O_2BP$ . Sem toga, kutevi  $O_1PA$  i  $O_2PB$  su unakrsni, a to znači i da su jednaki, pa je i  $\angle O_1AP = \angle O_2BP$ . Točke  $A$ ,  $P$  i  $B$  su kolinearne, pa su kutevi  $O_1AP$  i  $O_2BP$  naizmjenični, te iz njihove jednakosti izlazi da su pravci  $O_1A$  i  $O_2B$  paralelni među sobom. Kako je  $t_1$  okomito na  $O_1A$  i  $t_2$  okomito na  $O_2B$ , moraju tangente  $t_1$  i  $t_2$  biti takođe paralelne među sobom, a to se i tvrdilo.

### VIII RAZRED

1. Dani izraz može se transformirati:  $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^2 \cdot 3^n + 3^n - 2^2 \cdot 2^n - 2^n = 9 \cdot 3^n + 3^n - 4 \cdot 2^n - 2^n = 10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n = 10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} = 10(3^n - 2^{n-1})$ , a odavde proizlazi traženi zaključak.

2. Neka je  $n$  prosječna starost svih 11 nogometaša. Tada oni imaju ukupno  $11n$  godina. Bez kapetana oni imaju  $10(n-1)$  godina. Prema tome, kapetan ima  $11n - 10(n-1)$  godina, a to iznosi  $(n+10)$  godina. Dakle, starost kapetana je za 10 godina veća od prosječne starosti svih 11 nogometaša.

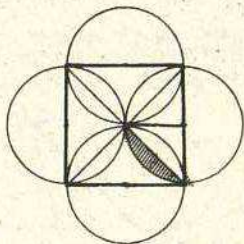


3. a) Vidjeti sl. 3.

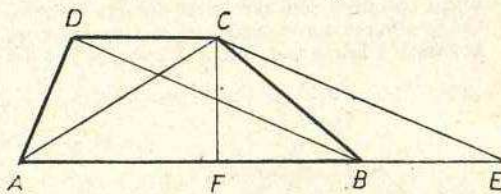
b) Površina četverolista sastoji se iz 8 odsječaka, koji su jednaki osjenčenom odsječku na sl. 3:  $P = 8 \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{a}{2} \right)^2 \pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \right] = a^2 \frac{\pi}{2} - a^2 = \frac{a^2}{2} (\pi - 2)$ .

c) Površina  $P_1$  unije krugova jednaka je zbroju površine kvadrata i 4 površine polukruga:  $P_1 = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2} \right)^2 \pi = a^2 + a^2 \frac{\pi}{2} = \frac{a^2}{2} (2 + \pi)$ . Kako je  $\frac{P}{P_1} = \frac{\frac{a^2}{2} (\pi - 2)}{\frac{a^2}{2} (\pi + 2)} =$

$\frac{\pi - 2}{\pi + 2} \approx 0,222$ , to je traženi postotak 22,2%.



Sl. 3



Sl. 4

4. Neka je  $E$  točka pravca  $AB$  iza  $B$ , tako da je  $BE = CD$ . Tada je  $AE = a + b$ , a četverokut  $BECD$  je paralelogram. Zbog toga je  $CE = BD = 113$ . Duljinu dužine  $AE$  izračunavamo iz pravokutnih trokuta  $ACF$  i  $CEF$ , sl. 4, jer je  $AE = AF + FE$ . Dakle, imamo:  $AF^2 = 17^2 - 15^2 = 64$ , tj.  $AF = 8$  i  $EF^2 = 113^2 - 15^2 = 12554$ , tj.  $EF = 112$ .

Sada je  $AE = 8 + 112 = 120$ , pa je ploština trapeza:  $P = \frac{1}{2} (a + b) \cdot h = 60 \cdot 15 = 900$ .