

**XVIII. SAVEZNO NATJECANJE
SFRJ
1987.G.**

VII RAZRED

1. Dokazati da za svaki troznamenkasti broj vrijedi sljedeća tvrdnja: ili je on djeljiv s 3, ili je dvoznamenkasti broj, odnosno jednoznamenkasti broj, sastavljen od njegovih znamenki djeljiv sa 3.
2. Brojevi 12 i 60 imaju interesantno svojstvo: njihov umnožak (produkt) jednak je deseterostrukom zbroju. Takvih parova prirodnih brojeva ima još. Odredi sve te parove.
3. Neki troznamenkasti broj se poveća za 45, ako znamenke jedinica i desetica zamijene mjesta, a isti broj se smanji za 270, ako znamenke stotica i desetica zamijene mjesta. Što će se dogoditi s tim brojem ako znamenka stotica i jedinica zamijene mjesta?
4. U jednokračnom trokutu ABC za osnovnicom AB, dužina CD je visina na osnovicu. Ako je M bilo koja točka kraka BC, dokazati da je razlika dužina CA i CM veća od razlike dužina DA i DM.
5. Data je tačka C i pravci p i q koji se sijeku. Konstruirati trokut ABC, kome je pravac p simetrala unutrašnjeg kuta α , a pravac q simetrala unutrašnjeg kuta β . (Tačku C i pravce p i q izabrati tako da zadatak ima rješenje).

XVIII. SAVEZNO NATJECANJE
SFRJ
1987.G.

VIII RAZRED

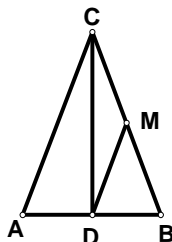
1. Za koje vrijednosti x, y, z izraz $x^2+y^2+z^2-12y-14z+90$ ima najmanju vrijednost? Naći tu vrijednost!
2. Ako je $a^2+a+1=0$; odredi vrijednost izraza: $a^{1987} + \frac{1}{a^{1987}}$.
3. Zbroj svih prirodnih brojeva od 1 do n (uključivo) jednak je troznamenkastom broju jednakih znamenaka. Koliko smo prirodnih brojeva zbrojili.
4. U pravokutnik ABCD sa stranicama $AB=10$ cm i $BC=5$ cm upiši polukrug (polukružnicu) promjera AB. U kojem omjeru dijeli polukrug dijagonalu pravokutnika?
5. Neka je ABCD proizvoljan četverokut površine 3. Na stranici AB date su točke M i N, takve da je $AM=MN=NB$, a na stranici CD date su točke P i Q, takve da je $CP=PQ=QD$. Dokazati da je četverokut MNPQ ima površinu 1.

Rješenja zadataka

XVIII. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA SFRJ 1987. godina

VII RAZRED

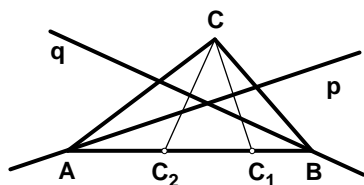
1. Ako je neka od znamenaka proizvoljnog troznamenkastog broja djeljiva s 3, tada je tvrdnja dokazana. Pretpostavimo da ni jedna od znamenaka x, y, z tog broja nije djeljiva s 3. Tada su ostaci dijeljenja znamenaka x, y, z s 3 jednaki za sve znamenke, ili su za dvije znamenke ovi ostaci različiti. Ako su ostaci jednaki, onda je $(x+y+z)$ djeljivo sa 3, pa je, prema kriteriju djeljivosti, broj \overline{xyz} djeljiv sa 3. Ako su ostaci, na primjer kod znamenki x i y različiti (znači 1 i 2), tada je zbroj $(x+y)$ djeljiv sa 3, pa je i dvoznamenkasti broj \overline{xy} djeljiv sa 3. Time je tvrdnja dokazana.
2. Neka su x i y traženi brojevi. Tada je $xy=10(x+y)$. Odavde dobivamo: $xy-10x-10y=0$, odnosno: $xy-10x-10y+100=100$. Transformiranjem lijeve strane dobivamo: $(x-10)(y-10)=100$.
Ovo daje sljedeće mogućnosti: $(x-10)(y-10)=1 \cdot 100$, $(x-10)(y-10)=2 \cdot 50$,
 $(x-10)(y-10)=4 \cdot 25$, $(x-10)(y-10)=5 \cdot 20$ i $(x-10)(y-10)=10 \cdot 10$. Traženi parovi brojeva su: 11 i 110, ili 12 i 60, ili 14 i 35, ili 15 i 30, ili 20 i 20.
3. Neka je $100x + 10y + z$ naš troznamenkasti broj. Tada, zamjenom znamenaka jedinica i desetica dobivamo: $100x + 10y + z + 45 = 100x + 10z + y$, što daje uvjet: $y - z + 5 = 0$. Ako stotice i desetice zamijene mjesta bit će: $100x + 10y + z - 270 = 100y + 10x + z$, odakle je: $x - y - 3 = 0$. Zbrajanjem dvije dobivene jednakosti nastaje uvjet: $(y - z + 5) + (x - y - 3) = 0$, odnosno: $x - z = -2$.
Ako znamenke stotica i jedinica zamijene mjesta dobivamo: $100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 99(x - z) = 99 \cdot (-2) = -198$. Dakle, zamjenom znamenaka jedinica i stotica broj se poveća za 198.
4. Zbog $CA=CB$ je $CA-CM=CB-CM=BM$. U trokutu BDM je stranica BM veća od razlike stranica DB i DM , tj. $BM > |DB-DM|$, sl.1. Međutim, podnožje visine na osnovicu je središte osnovice, pa je $DA=DB$. Zbog toga je: $CA-CM = BM > |DB-DM| = |DA-DM|$, tj. $CA-CM > |DA-DM|$, što se i tvrdilo.



Sl. 1

5. Analiza: Neka je ABC trokut kome su p i q simetrale kutova α i β . Tada točka C_1 , simetrična sa C u odnosu na p , pripada pravcu AB , a ovom pravcu pripada i točka C_2 , simetrična sa C u odnosu na q , sl.2.

Na osnovu ovih zaključaka dolazimo do jednostavne konstrukcije. Zadanoj točki C konstruiramo simetrične točke C_1 i C_2 , kao što je opisano u analizi. Pravac $C_1 C_2$ siječe pravce p i q u A i B .



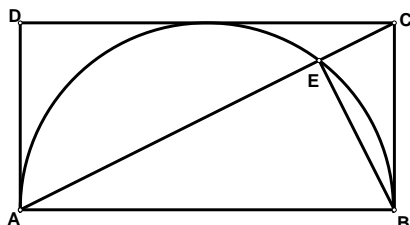
Sl. 2

Rješenja zadataka

XVIII. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA SFRJ 1987. godina

VIII RAZRED

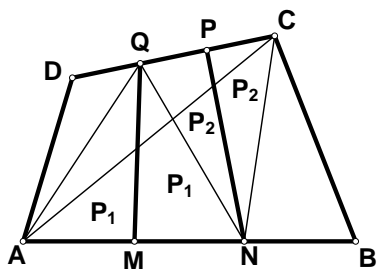
1. Dani izraz možemo napisati u obliku : $x^2+y^2-12y+36+z^2-14z+49+5 = x^2+(y-6)^2+(z-7)^2+5 \geq 5$. Ovo zaključujemo na osnovu poznate osobine da je kvadrat svakog realnog broja ≥ 0 . Znači, za $x=0$, $y=6$ i $z=7$ dani izraz ima minimalnu vrijednost 5.
2. Ako danu jednakost pomnožimo s $(a-1)$, dobit ćemo: $(a-1)(a^2+a+1)=0$, tj. $a^3-1=0$, a odavde je $a^3=1$. Tada je: $a^{1987} = a^{3 \cdot 662} \cdot a = (a^3)^{662} \cdot a = 1^{662} \cdot a = 1 \cdot a = a$. Prema tome bit će: $a^{1987} + \frac{1}{a^{1987}} = a + \frac{1}{a}$. Međutim, iz dane jednakosti imamo : $a^2+1 = -a$, a kad ovo podijelimo s a , bit će: $a + \frac{1}{a} = -1$. Konačno imamo: $a^{1987} + \frac{1}{a^{1987}} = a + \frac{1}{a} = -1$.
3. $1+2+3 + \dots + (n-2)+(n-1)+n = (1+n)+(2+(n-1))+(3+(n-2))+\dots =$
 $(n+1)+(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1) = \frac{n}{2}(n+1)$. Označimo s k znamenku dobivenog troznamenkastog broja. Tada je: $\frac{n}{2}(n+1) = k \cdot 111$, odnosno $n(n+1) = k \cdot 222 = k \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37$.
Lijeva strana jednakosti je umnožak dva uzastopna prirodna broja. Da bi to bilo moguće mora biti $k=6$. Tada je $n(n+1)=36 \cdot 37$ tj. $n=36$. Zbrajali smo 36 prirodnih brojeva a njihov zbroj je 666.
4. Neka je E presječna točka dijagonale AC i polukruga k , sl.3. Tada je $\sphericalangle AEB = 90^\circ$, kao kut nad promjerom AB . Pravokutni trokuti ABE i BCE su slični, jer imaju jednake šiljaste kutove (kutovi s okomitim kracima). Zbog toga je $AE:EC = AB:BC = 10:5 = 2:1$.



Sl. 3

5. Trokuti AMQ i MNQ imaju jednake osnovice, $AM=MN$, i zajedničku odgovarajuću visinu, pa su im jednake površine (na sl.4 označene sa P_1). Iz sličnih razloga su jednake površine trokuta CPN i PQN , označene s P_2 . Dakle, površina četverokuta $MNPQ$ je

$P_1 + P_2$. Dokazat ćemo da je zbroj površina trokuta ADQ i BCN jednak trećini površine četverkuta ANCD, tj. jednak 1. Zaista, trokut ADQ ima tri puta manju osnovicu od trokuta ACD, a visina im je zajednička. Zbog toga je $P_{ADQ} = \frac{1}{3} P_{ACD}$. Slično zaključujemo da je $P_{BCN} = \frac{1}{3} P_{ABC}$, pa je $P_{ADQ} + P_{BCN} = \frac{1}{3} P_{ACD} + \frac{1}{3} P_{ABC} = \frac{1}{3} P_{ABCD} = 1$. Sad dobivamo da je $P_{ANCQ} = 2$, tj. $2P_1 + 2P_2 = 2$, odnosno $P_1 + P_2 = 1$, a samim tim je $P_{MNPQ} = 1$.



Sl. 3