POKRET "NAUKU MLADIMA" SRH
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA SRH

# M A T E M A T I K A

## ZADACI ZA OPĆINSKI SUSRET UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA SRH 1989.

### 1. RAZRED

1. Marko je svojim prijateljima postavio ovaj zadatak:

   "Zamislio sam 5 brojeva. Kad izračunam sume svih mogućih parova tih brojeva, dobijem: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Recite mi koje sam brojeve zamislio!"

   Koje je brojeve zamislio Marko?

2. Kružnici je opisan jednokračni trapez i upisan pravokutni jednakokračni trokut. Koliki je omjer duljine kraka trapeza i duljine hipotenuze trokuta ako je omjer njihovih površina 8?

3. Ako su $a$, $b$, i $c$ duljine stranica trokuta dokažite da su $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ i $\sqrt{c}$ takoder duljine stranica nekog trokuta.

4. Neka su $a$, $b$, $c$ realni brojevi za koje vrijedi:

   $a + b + c = 0$ i $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

   Izračunajte $a^4 + b^4 + c^4$.

POKRET "NAUKU MLADIMA" SRH

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA SRH

M A T E M A T I K A

ZADACI ZA OPĆINSKI SUSRET UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA 1989.

2. RAZRED

1. U konveksnom peterokutu ABCDE točke K, L, M, N polovišta su stranica AB, BC, CD, DE.
Dokaži da je dužina koju određuju polovišta dužina KM i LN paralelna sa stranicom AE, te da je jednaka njenoj četvrtini!

2. Neka je $A \subset C \setminus \{0\}$ skup sa svojstvom: Ako je x iz A, onda su $\frac{1}{x}$ i $1 - x$ također iz A.
Da li postoji skup A s takvim svojstvom koji ima točno 5 elemenata?

3. Odredite zbroj kvadrata rješenja jednadžbe:

$$(x^2 + 2x)^2 - 5(x^2 + 2x) + 3 = 0$$

4. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a i b, $a \neq b$, vrijedi nejednakost:

$$a^a b^b > a^b b^a$$

POKRET "NAUKU MLADIMA" SRH
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA SRH

MATEMATIKA

ZADACI ZA OPĆINSKI SUSRET UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA 1989.

3. RAZRED

1. Dokažite da je za svaka dva prosta broja $a, b > 3$ broj $a^2 - b^2$ djeljiv sa 24.

2. Za duljine stranica trokuta vrijedi $a \leq b \leq c$ i $a^3 + b^3 = c^3$. Da li je taj trokut šiljastokutan, pravokutan ili tupokutan?

3. Ravnina prolazi jednim bridom pravilnog tetraedra i dijeli obujam tetraedra u omjeru 3:5.
Nađite tangense kutova $\alpha$ i $\beta$ na koje ta ravnina dijeli priklonl kut onih dviju strana tetraedra koje se sijeku u tom bridu.

4. Dokažite da je skup točaka ravnine za koje je omjer $k$ $(k > 0,\ k \neq 1)$ udaljenosti od dviju čvrstih točaka $T_1$ i $T_2$ konstantan, kružnica. Izrazite polumjer te kružnice kao funkciju udaljenosti točaka $T_1$ i $T_2$ i broja $k$.

POKRET "NAUKU MLADIMA" SRH
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA SRH

M A T E M A T I K A

ZADACI ZA OPĆINSKI SUSRET UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA 1989.

**4. RAZRED**

1. Neka su $M_1$ i $M_2$ dvije točke na jednoj grani hiperbole $y = \frac{a^2}{x}$ i neka su $A_1$ i $A_2$ ortogonalne projekcije točaka $M_1$ i $M_2$ na os $x$, a $B_1$ i $B_2$ ortogonalne projekcije točaka $M_1$ i $M_2$ na os $y$. Provjeri da li su površine krivolinijskih trapeza $A_1A_2M_1M_2$ i $B_1B_2M_1M_2$ jednake!

2. U šiljasti kut $\alpha$, upisan je krug polumjera $r$. U prostor prema vrhu kuta upisan je niz krugova od kojih svaki dodiruje prethodnog i oba kraka kuta. Odredi zbroj opsega svih krugova!

3. Neka je $n > 2$ prirodni broj i

$$a_i = \binom{n}{i}\left(\frac{2}{3}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-i} .$$

Dokaži da postoji prirodni broj $\ell$ takav da je:

$$a_1 < a_2 \ \ldots \ < a_\ell$$

$$a_{\ell+1} > a_{\ell+2} \ \ldots > a_n$$

4. Zadana je funkcija $f:N \longrightarrow R$ rekurzivnim relacijama

$$f(1) = 2$$
$$f(2) = 3$$
$$f(n+1)\, f(n-1) = (f(n))^2 + (-1)^n, \quad n \geqslant 2$$

a) Dokaži da je $f(n) \in N, \quad \forall n \in N$

b) Dokaži da je $f$ rastuća funkcija.