

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE  
REPUBLIKE HRVATSKE

POKRET "ZNANOST MLADIMA" HRVATSKE ZAJEDNICE TEHNIČKI  
KULTURE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

## MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika  
srednjih škola Republike Hrvatske

20. ožujka 1993. godine

II. razred

1. Ako su  $x$  i  $y$  realni brojevi takvi da je  $-\sqrt{2} \leq x + y \leq \sqrt{2}$ .

2. Riješite jednadžbu

$$\log_{0,125}(2x) - 4 \log_{0,25} x \cdot \log_8 x = 0.$$

3. Izvan kvadrata  $ABCD$  izabrana je točka  $O$  takva da je  $|OA| = |OB| = 5$  cm, i  $|OD| = \sqrt{13}$  cm. Kolika je površina kvadrata?

4. Dokažite da je za svaki prirodan broj  $n$

$$\operatorname{Re}(1 + i\sqrt{2})^n$$

neparan broj.

Rješenja za drugi razred:

1.  $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy,$   
 $2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \Rightarrow 2 \geq (x + y)^2$   
 $\Rightarrow |x + y| \leq \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x + y \leq \sqrt{2}$  25 bodova

2. Budući da je

$$\log_{0,125}(2x) = \log_{0,125} 2 + \log_{0,125} x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} x,$$

$$\log_{0,25} x = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} x,$$

$$\log_8 x = -\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} x$$

10 bodova

jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$2 \log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x - 1 = 0$$

5 bodova

Rješenja odgovarajuće kvadratne jednadžbe su:

$$\log_{\frac{1}{2}} x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \log_{\frac{1}{2}} x_2 = -1,$$

a rješenja polazne jednadžbe su  $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  i  $x_2 = 2.$  10 bodova

3. Iz  $|OD|^2 = |OM|^2 + |DM|^2$  i  $|OA|^2 = |ON|^2 + |AN|^2,$  10 bodova

tj.  $13 = x^2 + (\frac{a}{2})^2$  i  $25 = (a + x)^2 + (\frac{a}{2})^2$  oduzimanjem se dobiva

$$x = \frac{12 - a^2}{2a}.$$

5 bodova

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobiva se  $a^4 - 38a^2 + 72 = 0.$

Rješenja ove jednadžbe su  $a_1^2 = 36$  (što ne zadovoljava uvjetima zadatka) i  $a_2^2 = 2.$

Površina kvadrata je  $2 \text{ cm}^2.$

10 bodova

4. Za  $n = 1$   $\text{Re}(1 + i\sqrt{2}) = 1$  što je neparan broj. 5 bodova

Neka je za neki prirodan broj  $n$   $(1 + i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2},$  gdje je  $a_n$  neparan broj, a  $b_n$  prirodan broj. 5 bodova

Tada je  $(1 + i\sqrt{2})^{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1}\sqrt{2}$

$$(1 + i\sqrt{2})^n(1 + i\sqrt{2}) = (a_n + ib_n\sqrt{2})(1 + i\sqrt{2}) = (a_n - 2b_n) + i(a_n + b_n)\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = a_n - 2b_n \quad \text{i} \quad b_{n+1} = a_n + b_n$$

5 bodova

Ako je  $a_n$  neparan, tada je i  $a_{n+1}$  neparan broj. Po principu matematičke indukcije  $a_n$  je neparan za svaki prirodan broj  $n.$  10 bodova