

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE

POKRET "ZNANOST MLADIMA" HRVATSKE ZAJEDNICE TEHNIČKE
KULTURE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

20. ožujka 1993. godine

IV. razred

1. U skupu kompleksnih brojeva riješite jednađbu:

$$z^5 + \bar{z} = 0.$$

2. Nađite broj realnih rješenja jednađbe:

$$\sin x = \frac{x}{1993\pi}.$$

3. Od 1993 dana vektora različitih smjerova ~~ni~~ti jedan nije paralelan sa zbrojem svih preostalih vektora. Može li ~~z~~broj svih ~~d~~anih vektora biti nul-vektor?

4. Izračunajte zbroj

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 1993 \cdot 2^{1992}.$$

Rješenja za četvrti razred:

1. $z^5 = -\bar{z} \quad / \cdot z \quad \Rightarrow \quad z^6 = -|z|^2, \quad 5 \text{ bodova}$

$\operatorname{Re}(z^6) = -|z|^2, \quad \operatorname{Im}(z^6) = 0.$

Koristeći oblik kompleksnog broja $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ dobivamo

(1) $r^6 \cos(6\phi) = -r^2$

(2) $r^6 \sin(6\phi) = 0.$

Ako je $r = 0$, onda je $z_0 = 0$, a ako je $r \neq 0$ i $\sin(6\phi) = 0$ tada je $\phi = \frac{k\pi}{6}, \quad k = 0, 1, \dots, 11.$ 5 bodova

Tada je $\cos(6\phi) = \pm 1$, a iz (1) slijedi da je $\cos(6\phi) = -1, r = 1.$

5 bodova

Iz (1) se dobiva da su rješenja samo za: $\phi_1 = \frac{\pi}{6}, \phi_2 = \frac{\pi}{2}, \phi_3 = \frac{5\pi}{6},$
 $\phi_4 = \frac{7\pi}{6}, \phi_5 = \frac{3\pi}{2}, \phi_6 = \frac{11\pi}{6}.$ 5 bodova

Dakle, sva rješenja su: $z_0 = 0, z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, z_2 = i, z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$

$z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, z_5 = -i, z_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$ 5 bodova

2. (a) $x = 0$ je jedno rješenje. 5 bodova

(b) Ako je x_1 rješenje, tada je i $-x_1$ rješenje. 5 bodova

(c) Odredimo broj pozitivnih rješenja:

$$|\sin x| \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{1993\pi} \leq 1 \Rightarrow x \leq 1993\pi.$$

Na svakom intervalu $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ pravac $y = \frac{x}{1993\pi}$ siječe graf funkcije $y = \sin x$ ili u dvije točke ili niti u jednoj. Kako je $1993 = 2 \cdot 996 + 1$ biti će pozitivnih rješenja $2 \cdot 997 = 1994$, a svih rješenja će biti $2 \cdot 1994 + 1 = 3989.$ 15 bodova

3. Neka su ti vektori $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{1993}$ i neka je zbroj svih vektora nul-vektor. Tada je

$$\vec{a}_1 = - \sum_{i=2}^{1993} \vec{a}_i.$$

No ovo nije moguće zato jer vektor \vec{a}_1 nije paralelan sa zbrojem preostalih. Zato nije istinita pretpostavka tj. zbroj svih vektora ne može biti nul-vektor.

25 bodova

1. 1. način

$$S = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 1993 \cdot 2^{1992}.$$

Da bismo izračunali ovaj zbroj grupirajmo sumande na ovaj način:

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{1992} = 2^{1993} - 1$$

$$2 + 2^2 + \dots + 2^{1992} = 2(2^{1992} - 1) = 2^{1993} - 2$$

$$2^2 + \dots + 2^{1992} = 2^2(2^{1991} - 1)$$

$$\vdots$$

$$2^{1991} + 2^{1992} = 2^{1991}(2^2 - 1)$$

$$2^{1992} = 2^{1992}(2 - 1) \quad 15 \text{ bodova}$$

$$S = 1993 \cdot 2^{1993} - (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{1992}) = 1993 \cdot 2^{1993} - 2^{1993} + 1 = 1992 \cdot 2^{1993} + 1. \quad 10 \text{ bodova}$$

2. način

Ovaj zbroj se može odrediti pomoću derivacije i sumiranja geometrijskog niza.

$$(x + x^2 + \dots + x^{1993})' = 1 + 2x + \dots + 1993x^{1992},$$

$$\left(x \cdot \frac{1 - x^{1993}}{1 - x}\right)' = \dots = \frac{1 - x^{1993}(1994 - 1993x)}{(1 - x)^2}.$$

Za $x \neq 1$ je

$$1 + 2x + \dots + 1993x^{1992} = \frac{1 - x^{1993}(1994 - 1993x)}{(1 - x)^2}.$$

25 bodova