

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KLTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE

POKRET "ZNANOST MLADIMA" HRVATSKE ZAJEDNICE TEHNIČKE
KULTURE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

20. ožujka 1993. godine

I. razred

1. Nađite sve trojke cijelih brojeva (a, b, c) takvih da je $M(b, c) = 1$ i

$$\sqrt{a + \frac{b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

2. Duljina jedne stranice trokuta ABC je 20 cm, a duljine težišnica koje pripadaju drugim dvjema stranicama su 24 cm i 18 cm. Kolika je površina trokuta?

3. Nacrtajte graf ove relacije:

$$||x - 1| - 1| = |y + 1|.$$

4. Dva komada slitine (legure) zlata i srebra sadrže ukupno a kg zlata. Ako bi postotak zlata u prvome komadu bio onaj isti koji je u drugom, oba komada sadržavala bi ukupno b kg zlata. Ako bi postotak zlata u drugome komadu bio onaj isti koji je u prvom, oba komada bi sadržavala ukupno c kg zlata. Koliko kg zlata ima u prvom, a koliko u drugom komadu?

Rješenja za prvi razred:

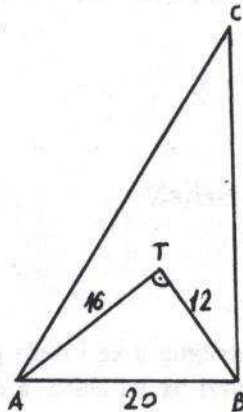
1. Kvadriranjem i sređivanjem dobiva se

$$ac = b(a^2 - 1).$$

Kako je $M(b, c) = 1$, slijedi da je $c = a^2 - 1$, $b = a$.

25 bodova

2.



Neka je T težište trokuta. Tada je

$$P_{ABC} = 3 \cdot P_{ABT}.$$

10 bodova

P_{ABT} može se izračunati pomoću Heronove formule

($AB = 20$ cm, $AT = 16$ cm i $BT = 12$ cm).

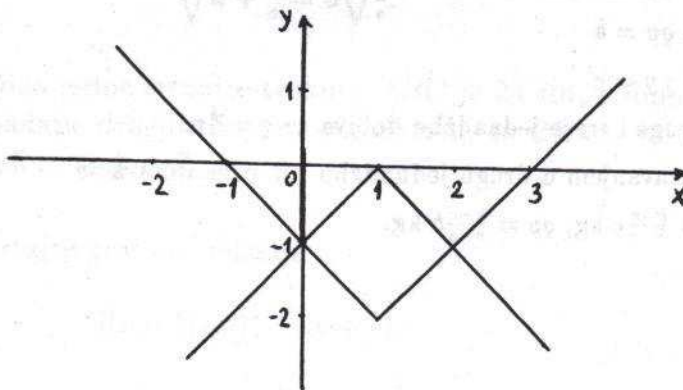
15 bodova

Podaci su takvi da je $\triangle ABT$ pravokutan

($20^2 = 16^2 + 12^2$). Stoga je

$$P_{ABC} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 288 \text{ cm}^2.$$

15 bodova



5 bodova

(a) $y \geq -1$, $||x - 1| - 1| = y + 1$

i. $x \geq 1$, $|x - 2| = y + 1$

A. $x \geq 2$, $y = x - 3$

B. $1 \leq x \leq 2$, $y = -x + 1$

ii. $x \leq 1, |x| = y + 1$

A. $0 \leq x \leq 1, y = x - 1$

B. $x \leq 0, y = -x - 1$

10 bodova

(b) $y \leq -1, ||x - 1| - 1| = -y - 1$

i. $x \geq 1, |x - 2| = -y - 1$

A. $x \geq 2, y = -x + 1$

B. $1 \leq x \leq 2, y = x - 3$

ii. $x \leq 1, |x| = -y - 1$

A. $0 \leq x \leq 1, y = -x - 1$

B. $x \leq 0, y = x - 1$

10 bodova

- l. Neka je težina prvog komada jednaka x kg, a drugog y kg i neka prvi komad sadrži p posto zlata, a drugi q posto. Prvi sadrži px kg zlata, a drugi qy kg zlata.

5 bodova

Sada je

$$px + qy = a$$

$$qx + qy = b$$

$$px + py = c$$

10 bodova

Iz druge i treće jednačbe dobiva se $q = \frac{b}{c}p$.

Uvrštavanjem u drugu jednačbu i iz prve dobiva se

$$px = \frac{b-a}{b-c}c \text{ kg}, qy = \frac{a-c}{b-c}b \text{ kg}.$$

10 bodova