

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE  
REPUBLIKE HRVATSKE

POKRET "ZNAOST MLADIMA" HRVATSKE ZAJEDNICE TEHNIČKE  
KULTURE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

### MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika  
srednjih škola Republike Hrvatske

20. ožujka 1993. godine

#### III. razred

1. Riješite nejednadžbu:

$$\log_2(\sqrt{x^2 - 4x} + 3) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1}\right) + 1.$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &\geq 0 \\ x+1 &\geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 4x} + 3 &> \\ \sqrt{x^2 - 4x} &= \sqrt{x+1} \end{aligned}$$

2. Riješite jednadžbu:

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = -\frac{7}{2}.$$

3. Sjecište dijagonala konveksnog četverokuta dijeli te dijagonale na četiri dužine. Dokažite da su duljine tih dužina racionalni brojevi ako su duljine stranica i dijagonala racionalni brojevi.
4. Neka su  $S_1$  i  $S_2$  dvije suprotne strane, a  $S_3$  jedna od preostalih strana dane kocke duljine brida  $a$ . Polovišta bridova  $S_1 \cap S_3$  i  $S_2 \cap S_3$  su vrhovi četverostranih piramida s osnovkama  $S_2$ , odnosno  $S_1$ . Nađite obujam presjeka tih piramida.

Rješenja za treći razred:

1. Moraju biti zadovoljeni uvjeti za vađenje drugog korijena:

$$x^2 - 4x \geq 0, \quad x + 1 \geq 0 \iff x \in [-1, 0] \cup [4, +\infty) \quad 10 \text{ bodova}$$

Uz ove uvjete nejednadžba je ekvivalentna sa:

$$\sqrt{x^2 - 4x} + 3 > \frac{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1}{2} \cdot 2 \iff \sqrt{x+1} < 2 \iff -1 \leq x < 3. \quad 10 \text{ bodova}$$

Rješenje:  $x \in [-1, 0]$ . 5 bodova

2.  $\sin x + \cos x + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{-7}{2}$

Neka je:  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x = t$ . Tada je

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + t.$$

5 bodova

Sada gornja jednačba poprima oblik

$$(\sin x + \cos x)(1 + \frac{1}{\sin x \cos x}) = \frac{-7}{2} - \frac{1}{\sin x \cos x} \quad \text{i nakon uvrštavanja}$$

$$t(4t^2 - 29t - 24) = 0.$$

5 bodova

$t = 0 \Rightarrow \sin(2x) = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ . Ovo nije rješenje jer nije definirano  $\frac{1}{\sin x}$  i  $\frac{1}{\cos x}$ . 5 bodova

Rješenja kvadratne jednačbe  $4t^2 - 29t - 24 = 0$  su  $t_1 = 8$  (što nije moguće zbog  $|t| \leq 2$ ) i  $t_2 = -\frac{3}{4}$ .

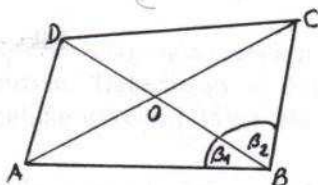
Sada je  $\sin(2x) = -\frac{3}{4}$ . Ova jednačba je zadovoljena za

$$x_1 = \arcsin(-\frac{3}{4}) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} - \arcsin(-\frac{3}{4}) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

10 bodova

3.



$$\beta = \angle ABC$$

$$\beta_1 = \angle ABD$$

$$\beta_2 = \angle DBC$$

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AO}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{OC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}.$$

5 bodova

Kako je  $AO + OC = AC \in \mathbb{Q}$  dovoljno je pokazati da je  $\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \in \mathbb{Q}$ . Tada su  $AO$  i  $OC \in \mathbb{Q}$ . 10 bodova

Prema kosinusovom poučku  $\cos \beta, \cos \beta_1$  i  $\cos \beta_2$  su racionalni, pa iz

$\cos \beta = \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \sin \beta_2$  slijedi da je  $\sin \beta_1 \sin \beta_2 \in \mathbb{Q}$ . Nadalje,

$$\sin^2 \beta_2 = 1 - \cos^2 \beta_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2}{\sin^2 \beta_2} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \in \mathbb{Q}. \quad 10 \text{ bodova}$$

$$\sqrt{1+t} + \frac{2}{t} + \frac{2\sqrt{1+t}}{t} = -\frac{7}{2} \quad \text{ii} \quad / \cdot 2t$$

$$4t^2 - 29t^2 - 24t = 0$$

$$2t\sqrt{1+t} + 4 + 4\sqrt{1+t} = -7t$$

$$t(4t^2 - 29t - 24) = 0$$

$$2\sqrt{1+t}(t+2) = -7t - 4 \quad /^2$$

$$4(1+t)(t^2 + 4t + 4) = 49t^2 + 56t + 16$$

$$4t^3 + 16t^2 + 16t + 4t^2 + 16t + 16 = 49t^2 + 56t + 16$$

1. U presjeku se dobije klin  $PMQNKL$ , koji se sastoji od dvije piramide  $KLQPM$  i  $KLQPN$ .

$$V = V_{KLQPM} + V_{KLQPN} = 2 \cdot V_{KLQPM}$$

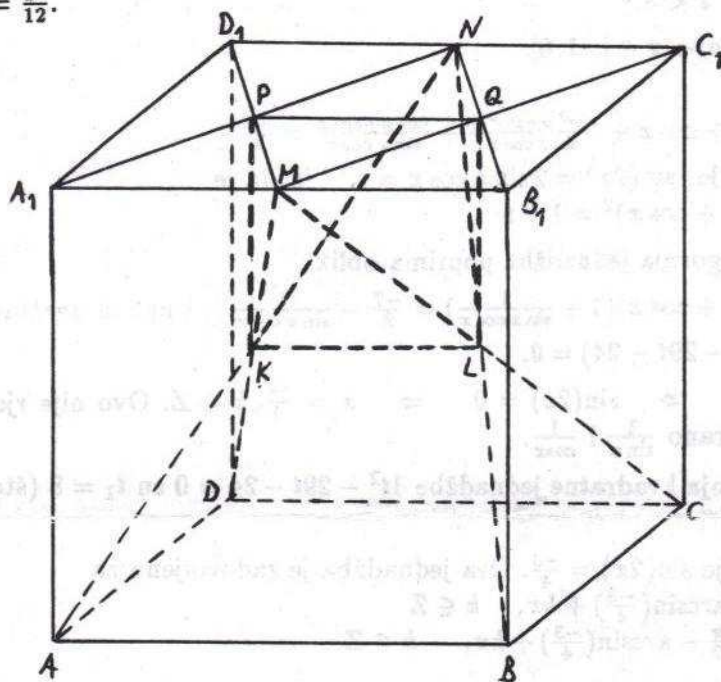
5 bodova

$$|KL| = |LQ| = |KP| = |PQ|, KL \perp KP, \langle PKL \rangle \perp \langle A_1B_1C_1 \rangle$$

$$V_{KLQPM} = \frac{1}{3} \left( \frac{a}{2} \right)^2 \frac{a}{2} = \frac{a^3}{24}$$

$$V = \frac{a^3}{12}.$$

10 bodova



Slika - 10 bodova