

REGIONALNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

5. razred – rješenja

15. svibnja 2009.

1. Jednoznamenkastih brojeva ima 9, pa je potrebno 9 znamenki za numeriranje jednoznamenkastih stranica. 2 BODA

Dvoznamenkastih brojeva ima 90, pa je potrebno $90 \cdot 2 = 180$ znamenki za numeriranje dvoznamenkastih stranica. 2 BODA

Na stranicama knjige ima $568 - 99 = 469$ troznamenkastih brojeva, pa je za njihovo numeriranje potrebno $469 \cdot 3 = 1407$ znamenki. 4 BODA

Dakle, za numeriranje knjige potrebno je $9 + 180 + 1407 = 1596$ znamenki. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka su a i b traženi brojevi. Kako je $D(a, b) = 12$, slijedi da je $a = 12x$ i $b = 12y$, pri čemu su x i y relativno prosti prirodni brojevi, tj. $D(x, y) = 1$. 1 BOD

Kako vrijedi jednakost $D(a, b) \cdot V(a, b) = a \cdot b$, imamo da je $12 \cdot 672 = 12x \cdot 12y$, odakle je $12xy = 672$, tj. $xy = 56$. 3 BODA

Sada imamo sljedeće mogućnosti:

x	1	2	4	7
y	56	28	14	8
$D(x, y)$	1	2	2	1

2 BODA

Kako su brojevi x i y relativno prosti, te budući da je manji od njih djeljiv brojem 7, a veći nije, zaključujemo da se jedino rješenje dobiva za $x = 7$ i $y = 8$. 2 BODA

Tada je $a = 12x = 84$ i $b = 12y = 96$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Očito, traženi broj će biti najmanji ukoliko on ima najveći broj znamenki 9. 2 BODA

Podijelimo li broj 2009 s 9 dobivamo 223 i ostatak 2, tj. vrijedi $2009 = 223 \cdot 9 + 2$. 4 BODA

Prema tome, traženi broj je $\underbrace{299 \dots 99}$, pri čemu se znamenka 9 pojavljuje 223 puta. 4 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je x broj koji se nalazi u srednjem polju kvadrata. Tada je zbroj na jednoj dijagonali jednak $17 + x + 11 = x + 28$. 1 BOD

U nepoznatom polju u prvom stupcu mora biti broj $x - 1$, zato jer je $(x - 1) + 12 + 17 = x + 28$. 1 BOD

Stoga, u srednjem polju prvog retka mora biti broj 18 zato jer je $(x - 1) + 18 + 11 = x + 28$. 1 BOD

Nadalje, u najdonjem polju drugog stupca mora biti broj 10, zato jer je $18 + x + 10 = x + 28$. 1 BOD

Slično, u desnom polju trećeg retka mora biti $x + 1$, zato jer je $17 + 10 + (x + 1) = x + 28$. 1 BOD

Konačno, u srednjem polju trećeg stupca mora biti broj 16 zato jer je $11 + 16 + (x + 1) = x + 28$. 1 BOD

Prema tome, imamo sljedeću situaciju:

$x - 1$	18	11
12	x	16
17	10	$x + 1$

Sada, kako su i zbrojevi na dijagonalama jednaki, mora vrijediti $(x - 1) + x + (x + 1) = x + 28$, odnosno $3x = x + 28$, odakle je $2x = 28$, tj. $x = 14$. 2 BODA

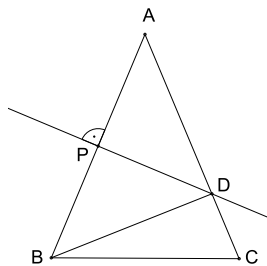
Zbog toga lagano dobivamo traženo rješenje:

13	18	11
12	14	16
17	10	15

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

5.



1 BOD

Pravac PD je simetrala kraka \overline{AB} , pa je ABD jednakokračan trokut s osnovicom \overline{AB} .

2 BODA

Zbog toga je $|DA| = |DB|$.

Stoga, za opseg o trokuta BCD vrijedi

$$o = |BC| + |CD| + |DB| = |BC| + (|CD| + |DA|) = |BC| + |CA| = a + b,$$

pri čemu je a duljina osnovice te b duljina kraka trokuta ABC .

3 BODA

Kako je opseg trokuta ABC jednak $\frac{3}{5}$ m = 60 cm, a duljina osnovice $a = 12$ cm, mora vrijediti

$12 + 2b = 60$, odakle je $2b = 60 - 12 = 48$, tj. $b = 24$ cm.

2 BODA

Dakle, opseg trokuta BCD je $o = a + b = 12 + 24 = 36$ cm.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA