

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2019.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je s t označena duljina tanje i dulje, a s d duljina deblje i kraće svijeće.

Za 1 sat izgorjet će

$$\frac{t}{3.5} = \frac{2}{7}t \text{ dijela dulje svijeće i} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{1}{5}d \text{ dijela deblje svijeće.} \quad 1 \text{ BOD}$$

Za 2 sata izgorjet će

$$\frac{4}{7}t \text{ dijela dulje svijeće i} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{2}{5}d \text{ dijela deblje svijeće.} \quad 1 \text{ BOD}$$

Nakon 2 sata gorenja ostat će

$$t - \frac{4}{7}t = \frac{3}{7}t \text{ dulje svijeće i} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$d - \frac{2}{5}d = \frac{3}{5}d \text{ kraće svijeće.} \quad 1 \text{ BOD}$$

Kako su nakon 2 sata gorenja duljine jednake, možemo pisati

$$\frac{3}{7}t = \frac{3}{5}d \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{t}{7} = \frac{d}{5}$$

$$\frac{t}{d} = \frac{7}{5} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$t : d = 7 : 5 \quad 1 \text{ BOD}$$

Omjer duljine dulje svijeće prema duljini kraće svijeće je $7 : 5$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Brojevi se općenito mogu birati na dva različita načina:

- a) redoslijed izbora brojeva nije važan;
- b) redoslijed izbora brojeva je važan!

Prvi način (redoslijed izbora brojeva nije važan):

Tri različita broja mogu se birati na $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84$ različitih načina. 2 BODA

Zbroj triju različitih brojeva može biti 6, 9, 12, 15, 18, 21 ili 24. 1 BOD

Ako zbroj brojeva iznosi:

- 6

Trojka koja odgovara tom uvjetu je: $\{1, 2, 3\}$.

- 9
Trojke koje odgovaraju tom uvjetu su: $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 5\}$ i $\{2, 3, 4\}$.
- 12
Trojke koje odgovaraju tom uvjetu su:
 $\{1, 2, 9\}$, $\{1, 3, 8\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{1, 5, 6\}$, $\{2, 3, 7\}$, $\{2, 4, 6\}$ i $\{3, 4, 5\}$.
- 15
Trojke koje odgovaraju tom uvjetu su:
 $\{1, 5, 9\}$, $\{1, 6, 8\}$, $\{2, 4, 9\}$, $\{2, 5, 8\}$, $\{2, 6, 7\}$, $\{3, 4, 8\}$, $\{3, 5, 7\}$ i $\{4, 5, 6\}$.
- 18
Trojke koje odgovaraju tom uvjetu su:
 $\{1, 8, 9\}$, $\{2, 7, 9\}$, $\{3, 6, 9\}$, $\{3, 7, 8\}$, $\{4, 5, 9\}$, $\{4, 6, 8\}$ i $\{5, 6, 7\}$.
- 21
Trojke koje odgovaraju tom uvjetu su: $\{4, 8, 9\}$, $\{5, 7, 9\}$ i $\{6, 7, 8\}$.
- 24
Trojka koja odgovara tom uvjetu je: $\{7, 8, 9\}$. 5 BODOVA

Ukupno ima 30 povoljnih trojki pa je tražena vjerojatnost $p = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako se slijedi ideja ispisivanja trojki kojima je zbroj djeljiv s 3, svakih 6 dobro ispisanih trojki treba bodovati s JEDNIM BODOM.

Pokušaj izračunavanja tražene vjerojatnosti (povoljni / mogući) treba bodovati s JEDNIM BODOM.

Drugi način (redoslijed izbora brojeva nije važan):

Tri različita broja mogu se birati na $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84$ različitih načina. 2 BODA

Zbroj triju brojeva je djeljiv brojem 3 u jednom od sljedeća dva slučaja:

(i) sva tri broja daju isti ostatak pri dijeljenju brojem 3,

(ii) tri broja daju ostatke 0, 1, 2 pri dijeljenju brojem 3 (potpun sustav ostataka modulo 3). 1 BOD

Tri broja daju isti ostatak pri dijeljenju s 3 ako je izvučena jedna od kombinacija brojeva: $\{1, 4, 7\}$ ili $\{2, 5, 8\}$ ili $\{3, 6, 9\}$, tj. postoje 3 mogućnosti. 2 BODA

Za dobivanje potpunog sustava ostataka modulo 3 imamo $3^3 = 27$ mogućnosti (3 mogućnosti za odabir broja djeljivog s 3, 3 mogućnosti za odabir broja koji daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3 i 3 mogućnosti za odabir broja koji daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3). 3 BODA

Tražena vjerojatnost je $p = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način (redoslijed izbora brojeva je važan):

Broj ukupnih mogućnosti izbora tri različita broja (ako pazimo na njihov redoslijed) je $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$. 2 BODA

Zbroj triju brojeva je djeljiv brojem 3 u jednom od sljedeća dva slučaja:

(i) sva tri broja daju isti ostatak pri dijeljenju brojem 3;

(ii) tri broja daju ostatke 0, 1, 2 pri dijeljenju brojem 3 (potpun sustav ostataka modulo 3). 1 BOD

Tri broja mogu dati isti ostatak pri dijeljenju brojem 3 ako je izvučena jedna od kombinacija brojeva: $\{1, 4, 7\}$ ili $\{2, 5, 8\}$ ili $\{3, 6, 9\}$. 1 BOD

Budući da je važan poredak brojeva, to je ukupno $3 \cdot 6 = 18$ mogućnosti.

1 BOD

Za dobivanje potpunog sustava ostataka modulo 3 je $3^3 \cdot 6 = 162$ mogućnosti (3 mogućnosti za odabir broja djeljivog brojem 3, 3 mogućnosti za odabir broja koji daje ostatak 1 pri dijeljenju brojem 3 i 3 mogućnosti za odabir broja koji daje ostatak 2 pri dijeljenju brojem 3;

kako je **bitan** poredak, za svaku od dobivenih mogućnosti, postoji $3! = 6$ mogućih permutacija).

3 BODA

Zato je tražena vjerojatnost $p = \frac{180}{504} = \frac{5}{14}$.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je u razredu x dječaka. Djevojčica je za 20 % više od tog broja, dakle ima ih $x + 0.2x = 1.2x$.

1 BOD

Iz $x + 1.2x = 22$ slijedi $2.2x = 22$, odnosno $x = 10$.

2 BODA

U razredu je 10 dječaka i 12 djevojčica.

1 BOD

Iz uvjeta zadatka se vidi da u tročlanoj ekipi moraju biti ili dvije djevojčice i jedan dječak ili dva dječaka i jedna djevojčica.

1 BOD

Dvije djevojčice možemo izabrati na $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ načina, a jednog dječaka na 10 načina.

1 BOD

Tročlanu ekipu s dvije djevojčice i jednim dječakom možemo izabrati na $66 \cdot 10 = 660$ načina.

1 BOD

Dva dječaka možemo izabrati na $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ načina, a jednu djevojčicu na 12 načina.

1 BOD

Tročlanu ekipu s dva dječaka i jednom djevojčicom možemo izabrati na $45 \cdot 12 = 540$ načina.

1 BOD

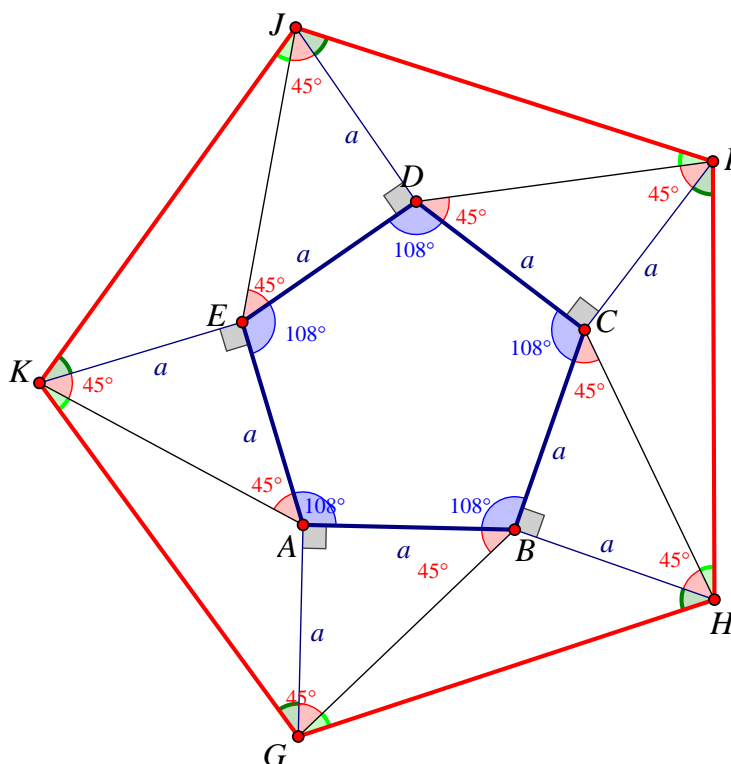
Ukupan broj različitih odabira je $660 + 540 = 1\,200$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Skica:

1 BOD



Neka je a duljina stranice pravilnog peterokuta $ABCDE$.

Veličine svih unutarnjih kutova pravilnog peterokuta su $\frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$. 1 BOD

Trokuti $\triangle ABG$, $\triangle BCH$, $\triangle CDI$, $\triangle DEJ$ i $\triangle EAK$ su međusobno sukladni jer su to jednakokračni pravokutni trokuti s katetama duljine a . Veličine šiljastih kutova u tim trokutima su 45° . 1 BOD

Iz sukladnosti tih trokuta slijedi:

$$|GB| = |HC| = |ID| = |JE| = |KA| \quad 1 \text{ BOD}$$

$$|\angle KAG| = |\angle GBH| = |\angle IDJ| = |\angle JEK| = |\angle HCI| = 360^\circ - (108^\circ + 90^\circ + 45^\circ) = 117^\circ \quad 1 \text{ BOD}$$

Prema poučku S-K-S trokuti $\triangle HBG$, $\triangle ICH$, $\triangle JDI$, $\triangle KEJ$ i $\triangle GAK$ su međusobno sukladni jer imaju po dva para sukladnih stranica i sukladne veličine kutova između tih stranica. 1 BOD

Iz ove sukladnosti slijedi:

$$|GH| = |HI| = |IJ| = |JK| = |KG|, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$|\angle BGH| = |\angle CHI| = |\angle DIJ| = |\angle EJK| = |\angle AKG|, \\ |\angle GHB| = |\angle HIC| = |\angle IJD| = |\angle JKE| = |\angle KGA|. \quad 1 \text{ BOD}$$

Gledajući peterokut $GHIJK$, veličina kuta kod svakog od vrhova peterokuta jednaka je zbroju triju sukladnih kutova pa slijedi:

$$|\angle KGH| = |\angle GHI| = |\angle HIJ| = |\angle IJK| = |\angle JKG|. \quad 1 \text{ BOD}$$

Peterokut $GHIJK$ ima sve stranice jednake duljine i sve unutarnje kutove jednake veličine pa je pravilan. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Iz nejednakosti $x > y > z > 1$ za recipročne vrijednosti brojeva x , y i z vrijedi $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < \frac{1}{z} < 1$. 1 BOD

Stoga je

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 1,$$

$$\text{odnosno } \frac{3}{z} > 1 \Rightarrow z < 3. \quad 1 \text{ BOD}$$

Kako mora biti $z > 1$ i $z < 3$, slijedi da je $z = 2$. 1 BOD

Iz

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Nadalje je

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2},$$

$$\text{odnosno } \frac{2}{y} > \frac{1}{2}, \text{ pa je } y < 4. \quad 1 \text{ BOD}$$

Kako mora biti $y > z = 2$ i $y < 4$, slijedi da je $y = 3$. 1 BOD

Iz

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{6}.$$

Slijedi da je $x < 6$. 1 BOD

Kako mora biti $x > y = 3$ i $x < 6$, slijedi da x može biti 4 ili 5. 1 BOD

Uređene trojke koje zadovoljavaju zadane uvjete su (4, 3, 2) i (5, 3, 2).

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Obje pogođene trojke, uz provjeru oba uvjeta (obje nejednakosti), treba bodovati sa 6 BODOVA, na način da se dobije po 1 BOD za svaku trojku, 2 BODA za provjeru prve nejednakosti (obje trojke) te 2 BODA za provjeru druge nejednakosti (obje trojke).

Jednu pogođenu trojku, uz provjeru oba uvjeta (obje nejednakosti), treba bodovati s 3 BODA (1 BOD za trojku, 1 BOD za provjeru prve nejednakosti, 1 BOD za provjeru druge nejednakosti).