BORIS ČEKRLIJA

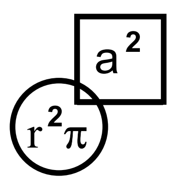
VREMEPLOVOM KROZ MATEMATIKU

Boris Čekrlija

VREMEPLOVOM

KROZ

MATEMATIKU



GRAFOMARK

Boris Čekrlija
Vremeplovom kroz matematiku

Recenzenti
dr Ratko Tošić
Prirodno-matematički fakultet Novi Sad

mr Vladimir Stojanović
Saobraćajni fakultet Beograd

Lektor
Zoja Čekrlija

Korektor
Autor

Crteži i korice
Autor

Kompjuterska obrada teksta
Autor

P R E D G O V O R

Ova knjiga je namijenjena učenicima osnovnih i srednjih škola, njihovim nastavnicima, kao i svima onima kojima matematika nije struka, a žele nešto više saznati o njenoj istoriji.

U njoj su izloženi sadržaji koje nije moguće, a niti je potrebno, obuhvatiti programima matematike. Oni pružaju mogućnost učenicima da upotpune svoja znanja o matematičkim pojmovima i teorijama, kao i da razviju i održe interes za matematiku. Knjiga može korisno poslužiti nastavnicima za sticanje komplementarnih znanja neophodnih da se nastava matematike učini interesantnijom.

Nisam imao pretenzija da ova knjiga bude jedna opšta istorija matematike, nego sam nastojao da, po vlastitoj ocjeni, izložim značajnije sadržaje iz istorije elementarne matematike.

Recenzentima dr Ratku Tošiću i mr Vladimiru Stojanoviću izražavam iskrenu zahvalnost na datim primjedbama i sugestijama koji su doprinijeli poboljšanju kvalitete knjige.

Banja Luka, marta 2001. Autor

SADRŽAJ

PRVA GLAVA

BROJEVI

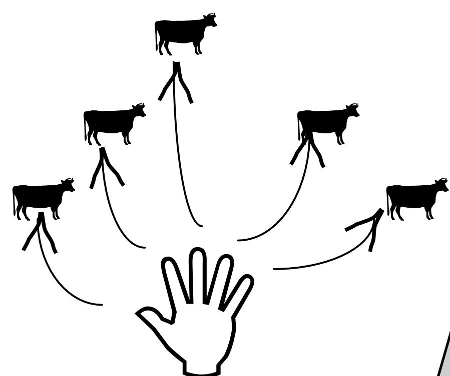
1. OD CRTEŽA DO ZNAKA ZA BROJEVE

Uvod

Kada, kako i kojim redom su nastajali brojevi? Kako su ljudi u prošlosti brojali? Kada su počeli zapisivati brojeve? Kako su ih nazivali u vrijeme njihovog nastanka? Ovo su pitanja na koja se ne može lako i jednostavno odgovoriti. Jedno je sigurno: ljudi nisu oduvijek znali da broje na način kako mi to danas činimo.

Razvoj matematike je neodvojivo vezan za opšti razvoj ljudskog društva. U predcivilizacijsko doba protekli su milenijumi dok u ljudskoj svijesti nisu počeli da se formiraju začeci pojma broja. Takođe, mnogo vremena je bilo potrebno da bi čovjek koji je skupljao plodove počeo da se bavi lovom, uzgajanjem stoke odnosno obrađivanjem zemlje. Obavljajući ove poslove razlikovao je jednu od dvije, tri ili više ubranih voćki odnosno ulovljenih životinja. Čovjek iz predcivilizacijskog doba bio je sposoban, iako nije znao brojati, da identifikuje elemente nekog skupa. To mu je, na primjer, omogućavalo da procijeni veličinu svog stada kao i da uoči da li mu nedostaje jedna ili više ovaca. Slično se može zapaziti i kod djeteta koje ne zna da broji, a ipak je u stanju da uoči da li mu nedostaje neka od igračaka.

Ako je broj krava odgovarao broju prsta na jednoj ruci, onda ih je pastir mogao brojati tako da svakoj kravi pridruži tačno po jedan prst.



Za matematičara brojanje je postupno navođenje brojeva pri čemu je svaki naredni broj za jedan veći od prethodnog. Naravno, samo brojanje počinje sa nekim prirodnim brojem i nastavlja se dodajući broj za jedan veći od prethodnog.

U našem jeziku brojanje obavljamo riječima:

jedan, dva, tri, četiri, ...

U latinskom jeziku brojeći izgovaramo sljedeće riječi:

unus, duo, tres, quattuor, ...

dok su u engleskom jeziku opet druge riječi:

one, two, three, four, ... itd.

Ako ne znamo francuski jezik, onda:

un, deux, trois, quatre, ...

nije ništa drugo nego navođenje riječi bez smisla i značenja kao što je, na primjer:

tam, ram, tet, set, ...

U principu brojanje je moguće izvoditi proizvoljno odabranim riječima. Prema tome, u posljednjem slučaju brojevima *jedan, dva, tri* možemo da dodijelimo, redom, imena *tam, ram, tet.*

Sam čin brojanja nastao je istovremeno sa upotrebom brojeva. U početku ono se svodilo na upoređivanje elemenata nekog skupa sa elementima poznatog skupa. Vremenom je čovjek pri brojanju sve rjeđe koristio prste, kamenčiće, školjke ili neke druge predmete.

> *Ako je imao više ovaca, pastir je mogao svaku od njih prilikom odlaska na pašu da predstavi jednim kamenčićem koji bi stavljao na gomilu. Predveče je za svaku ovcu prilikom njenog povratka uzimao sa te gomile po jedan kamenčić i odlagao ga malo dalje. Ako je dolaskom posljednje ovce upotrijebio i posljednji kamenčić, onda je bio siguran da su se sve vratile sa paše. Višak kamenčića je značio da se neke ovce nisu vratile.*

Istoričari matematike su, da bi saznali nešto više o nastanku brojeva, izučavali običaje i način života plemena koja su i danas na niskom stepenu razvoja. Na taj način se došlo do saznanja da su plemena, kod kojih je pojam broja bio tek u fazi formiranja, u stanju da ukažu na količinu pojedinih predmeta. Tako, na primjer, da bi pripadnik plemena saopštio da je ulovio *jednu* ribu pokazivao je na *Mjesec* ili *Sunce*; ako je želio kazati da se radi o *dvije* ribe, onda bi spominjao *oči*, *uši* ili *krila* ptice. *Ruka* je veoma često označavala broj *pet*, a obje ruke broj *deset*.

Prvo se formiraju brojevi *jedan* i *dva*; *jedan* kao odlika *jedinke* (individue), a *dva* kao obilježje *para*. U sljedećoj fazi veći brojevi se obrazuju sabiranjem: broj *tri* sabiranjem brojeva 1 i 2, *četiri* - sabiranjem 2 i 2, *pet* - sabiranjem 2 i 3 itd.

Jedno australijsko pleme, koje živi na ostrvima južno od Nove Gvineje, koristi sljedeće nazive za brojeve:

jedan	-	urapun,
dva	-	okoza,
tri	-	okoza-urapun,
četiri	-	okoza-okoza,
pet	-	okoza-okoza-urapun,
šest	-	okoza-okoza-okoza.

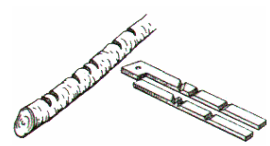
Naveli smo kako lovac daje do znanja da je ulovio *jednu* ili *dvije* ribe. U svakodnevnim komunikacijama ljudi su upotrebljavali riječi kojima su predstavljali određene brojeve. Te brojeve je trebalo nekako označiti. U početku su za to služili kamenčići, školjke ili neki drugi predmeti skupljeni u gomilu. Brojevi su označavani na različite načine: pomoću zareza na štapu, čvorova na konopcu i slično.

Znaci za brojeve

Prvi znaci za brojeve su bili crteži predmeta ili životinja. Stari Egipćani broj *sto hiljada* su predstavljali crtežom *krokodila*, dok je kod Kineza taj isti broj označavan crtežom *škorpije*. Put do današnjeg načina zapisivanja brojeva je bio dug, spor i nimalo jednostavan. Na manjim ili većim prostorima isti brojevi su označavani na različite načine. Mnoge od tih oznaka rijetko su se prenosile izvan prostora na kojima su nastajale.

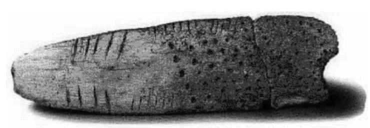
Za brojeve su korišćeni različiti simboli: čvorovi konopca kod Inka i Japanaca (sl. 1), horizontalne ili vertikalne crte urezane u glini, na drvetu (sl. 2), na jelenskim rogovima (sl. 3) ili na školjkama kao što je rađeno u području Okeanije.

Sl. 1.



Sl. 2.

Oblik i izgled znakova za brojeve zavisili su od pribora za pisanje kao i od materijala na kojem se pisalo.



Sl. 3. Zapisi brojeva na jelenskom rogu iz paleolita (15ooo g. p.n.e.)

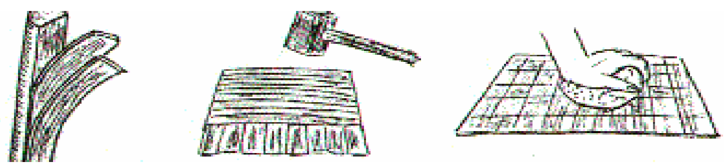
U Mesopotamiji se pisalo zašiljenim drvenim štapićem po glinenim pločicama (sl. 4); u Egiptu oštrim predmetom po kamenu (sl. 4), a zatim na papirusu i koži perom i mastilom. Kinezi su u 2. vijeku počeli proizvoditi i upotrebljavati hartiju. Prije toga su pisali oštrim predmetom po kamenu, a potom mastilom po bambusovim trakama i svili. Stari Grci su koristili voštane, odnosno drvene i kožne tablice koje su prethodno prevlačili tankim slojem sitnog pijeska; upotrebljavali su i papirus. Inače, pisanje po pijesku bilo je uobičajeno za narode gdje su za to dozvoljavali klimatski uslovi.

a)

b)

Sl. 4. a) Glinena pločica iz Mesopotamije
b) Zapisi na kamenu iz Egipta

Papirus je vrsta trske sa obala Nila. Stari Egipćani su sjekli stabljike papirusa na uske trake i lijepili ih jednu do druge. Na tako dobijenim dugačkim listovima su pisali, a ispisane listove savijali u svitke.



Sl. 5. Pripremanje listova papirusa za pisanje

Prvi znaci za brojeve bili su jednostavni i predstavljali su skup od onoliko crta ili tačaka koliko je iznosio taj broj. O tačnom vremenu kada su nastali ovi znakovi ne može se sa sigurnošću govoriti, ali se zato može odrediti period iz kojeg potiču konkretni istorijski izvori.

Egipat

Egipatski način zapisivanja brojeva hijeroglifima bio je jednostavan. Smatra se da su Egipćani oko 5000. godine p. n. e. koristili sistem brojeva sa bazom 10. Različitim znacima su označavani stepeni broja 10, na primjer:

jedinica

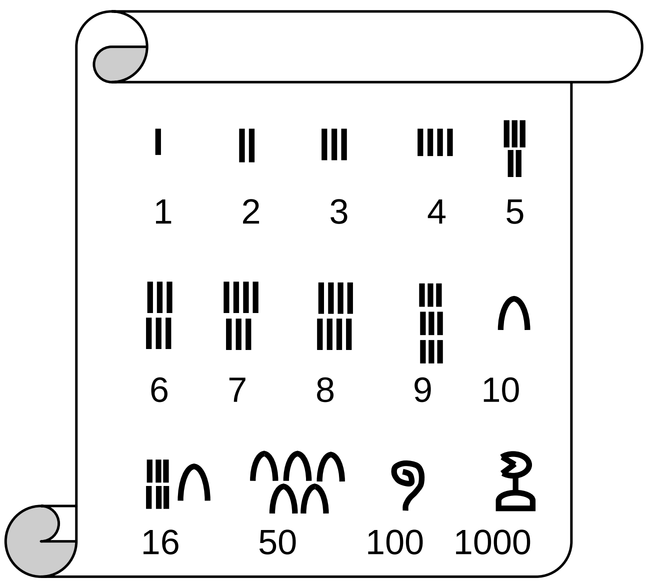
desetica

stotina

hiljada

deset hiljada

Broj *sto hiljada* je predstavljen crtežom punoglavca, a *milion* crtežom boga što je trebalo simbolizovati beskonačnost. Egipćani su zapisivali brojeve kombinovanjem ovih znakova, sl. 6.

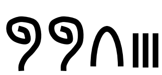
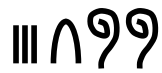


Sl. 6. Egipatski način zapisivanja brojeva

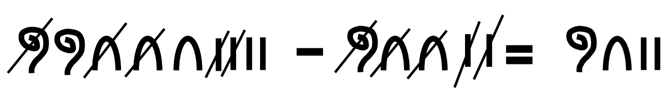
Vrijednost tako napisanog broja jednaka je zbiru njegovih pojedinačnih vrijednosti bez obzira na redosljed znakova. Ovakav način zapisivanja brojeva zasnovan je na sabiranju i naziva se *aditivnim*.

 = 100+100+10+10+10+1+1+1+1= 234.

Broj 213 se mogao, kao i drugi brojevi, pisati na više načina:

 ili  ili 

Sabiranje i oduzimanje brojeva je jednostavno:



U ovom aditivnom sistemu zapisivanja brojeva množenje se svodi na množenje sa 2 i sabiranje nekih od tako dobijenih proizvoda. Množenje i dijeljenje sa 2 su ubrajani u osnovne računske operacije koje su imale i svoje nazive: *udvajanje* (*duplikacija*) odnosno *polovljenje*.

13×12		Množenje sa 13 izvodilo se tako što se broj 12 *udvajao* kako je prikazano u tabeli. (Na primjer, broj 48 se dobije udvajanjem broja 24, koji je rezultat udvajanja broja 12.) Kako je $13=1+4+8$ to su se sabirali brojevi iz desne kolone (označeni su zvjezdicom), koji odgovaraju brojevima 1, 4 i 8 iz lijeve kolone.
1	**12***	
2	24	
4	**48***	
8	**96***	
	156	

$13\cdot12=(1+4+8)\cdot12=1\cdot12+4\cdot12+8\cdot12=12+48+96=156$

Rimski brojevi

Aditivan način zapisivanja brojeva bio je u upotrebi i u starom Rimu. Za rimske cifre su uzeta latinična slova, ima ih ukupno sedam:

rimske cifre:	I	V	X	L	C	D	M
odgovarajuće vrijednosti:	1	5	10	50	100	500	1000

Brojevi su zapisivani kombinovanjem ovih cifara. Doprinos koji pojedina cifra u zapisu nekog broja daje ukupnoj vrijednosti zavisi od njenog položaja prema drugim ciframa.

Tako, na primjer, četiri jedinice su predstavljene jednim simbolom (IV), četiri desetice drugim (XL), a četiri stotine trećim (CD). Cifra V ima značenje pet jedinica kako u broju VI tako i u broju IV.

Rimljani nisu razvili jedan opšti sistem za zapisivanje velikih brojeva. Na primjer, Plinije (1. vijek nove ere) je broj 12000 pisao XIIM. U jednom rukopisu broj 38784 je zapisan

$$\mathrm{XXXVIII_mDCCLXXXIV}.$$

Slično je bilo i u srednjem vijeku, u jednom rukopisu iz 1150. godine broj 10000 je napisan $\text{X}^{\text{es}}\text{M}$ milia. U prvoj polovini 16. vijeka broj 9000 je predstavljen kao IXM, a *sto miliona* -

$$\overset{\text{c}}{\text{MM}}.$$

U srednjem vijeku *milion* je označavan na razne načine:

$$\text{MM} \; ; \quad |\text{X}| ; \quad \overline{|\text{X}|} \, .$$

Oznaka za *sto miliona* je bila $\overline{|\text{M}|}$.

Tek mnogo kasnije formirana su pravila za pisanje rimskim ciframa:

1. *Vrijednosti dva ista znaka koji stoje jedan uz drugog se sabiraju;*	XX = 20
2. *Vrijednost znaka koji se nalazi sa desne strane znaka veće vrijednosti sabira se sa vrijednošću tog znaka;*	LX = 60
3. *Vrijednost znaka koji se nalazi između dva znaka sa većom vrijednošću oduzima se od vrijednosti znaka koji je desno od njega;*	LIX = 59
4. *Broj nadvučen jednom crtom znači da je on uvećan hiljadu puta, a broj nadvučen dvjema crtama je uvećan milion puta.*	$\overline{\text{LIX}}$ = 59 000 $\overline{\overline{\text{LIX}}}$ =59 000 000

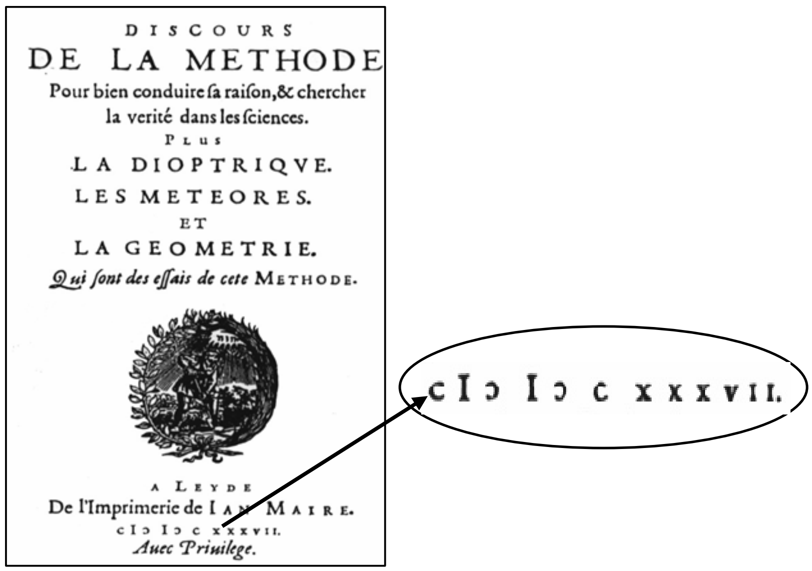
Rimljani nisu brojeve nadvlačili crtama da bi naznačili da se radi o broju koji je uvećan hiljadu odnosno milion puta. Takve oznake su koristili kad je trebalo istaći razliku između broja i imenice.

Ako je, na primjer, u tekstu trebalo napisati "*2 čovjeka*" ili "*tri čovjeka*" (*triumvirat*), onda je to činjeno na sljedeći način: $\overline{\text{II}}$**VIR**, odnosno $\overline{\text{III}}$**VIR**; *vir* (lat.) - čovjek. Ovo nije bilo jedno opšte pravilo nego se javljalo kod pojedinih autora kako u starom tako i u kasnom srednjem vijeku.

> Neujednačen način pisanja velikih brojeva često je dovodio do nesporazuma. Tako je, na primjer, žena cara Augusta darovala jednom Rimljaninu 50 miliona sestercija što je u dokumentu označeno sa $\overline{|\text{D}|}$. Ovu svotu trebao je isplatiti njen nećak, koji je zapisu navedenog broja izostavio dio okvira tako da je ostalo zapisano $\overline{\text{D}}$ (pet stotina hiljada). Na taj način obećani iznos novca je umanjen sto puta.

Rimski brojevi se danas koriste za označavanje godina, glava u knjizi, stranica nekog predgovora i sl. (**I** glava, **XIX** vijek, **VIII** godina Republike).

> Rimljani su broj *hiljada* označavali grčkim slovom Φ kojeg su pisali ⊂|⊃. Znak za *pet stotina* je nastao kao "polovina" znaka za *hiljadu* : |⊃ ili ⊂| da bi se kasnije zadržao znak |⊃ koji je vremenom transformisan u slovo D. Tek krajem 17. vijeka za *hiljadu* se koristi znak M kao prvo slovo riječi MILLE *(hiljada).* Na naslovnoj strani Dekartove *Geometrije* (1637) godina izdanja označena je sa ⊂|⊃ |⊃ CXXXVII, sl. 7.


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↃ IↃ c XXXVII.
Auec Priuilege.

Sl. 7. Naslovna strana Dekartove *Geometrije*

XI = 11	CMXCIX = 999
XXIII = 23	$\overline{XV}$CLXI = 15 161
XLIX=49	$\overline{XLI}$XLI = 41 041
LXVII = 67	$\overline{M}$ = 1 000 000
CMLIX = 959	

Alfabetski brojevi

Feničani su prije 5000 godina uveli novi sistem numeracije brojeva pomoću slova. Jevreji i Grci su prihvatili takav način zapisivanja brojeva i prilagodili ga svom alfabetu. Do 3. vijeka p. n. e. grčki matematičari su zamijenili svoju numeraciju brojeva sa alfabetskom. Novi sistem zapisivanja brojeva koristi prvih devet slova alfabeta za brojeve od 1 do 9, sljedećih devet slova za desetice (10, 20, 30,..., 90) i posljednjih devet slova za stotine (100, 200, 300,..., 900). Zapeta ispred znaka za jedinicu je značila da je taj broj uvećan hiljadu puta, sl. 8. U starom grčkom alfabetu su bila 24 slova, a za označavanje svih jedinica, desetica i stotina bilo je potrebno 27 slova. Grci su ovaj problem riješili tako što su pored 24 pomenuta slova koristili i tri stara, kojima se inače pri pisanju nisu služili. Da bi razlikovali brojeve od slova oni su iznad znaka za broj stavljali crtu ili apostrof u gornjem desnom uglu, sl. 8.

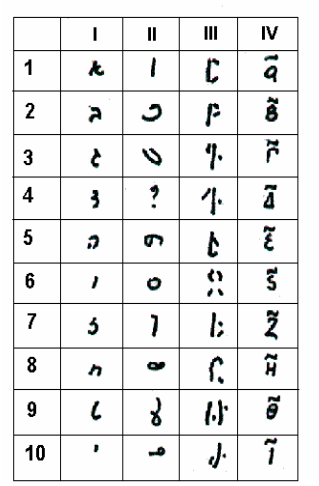
1	$\overline{\alpha}$	10	$\overline{\iota}$	100	$\overline{\rho}$	1 000	$,\overline{\alpha}$
2	$\overline{\beta}$	20	$\overline{\kappa}$	200	$\overline{\sigma}$	2 000	$,\overline{\beta}$
3	$\overline{\gamma}$	30	$\overline{\lambda}$	300	$\overline{\tau}$	3 000	$,\overline{\gamma}$
4	$\overline{\delta}$	40	$\overline{\mu}$	400	$\overline{\upsilon}$	4 000	$,\overline{\delta}$
5	$\overline{\varepsilon}$	50	$\overline{\nu}$	500	$\overline{\varphi}$	5 000	$,\overline{\varepsilon}$
6	$\overline{\varsigma}$	60	$\overline{\xi}$	600	$\overline{\chi}$	6 000	$,\overline{\varsigma}$
7	$\overline{\zeta}$	70	$\overline{o}$	700	$\overline{\psi}$	7 000	$,\overline{\zeta}$
8	$\overline{\eta}$	80	$\overline{\pi}$	800	$\overline{\omega}$	8 000	$,\overline{\eta}$
9	$\overline{\theta}$	90	$\overline{\text{ϙ}}$	900	$\overline{\text{ϡ}}$	9 000	$,\overline{\theta}$

Sl. 8. Grčki alfabetski brojevi

Alfabetskom notacijom broj 2045 se zapisivao

$$,\overline{\beta\mu\varepsilon} \quad \text{ili} \quad ,\beta\mu\varepsilon'$$

Zapisivanje brojeva pomoću slova koristili su i drugi narodi, na primjer: Sirijci, Jermeni, Goti i Sloveni.



Sl. 9. Alfabetski brojevi
I-Hebrejski (5. vijek p. n. e.);
II-Sirijski; III-Jermenski;
IV-Glagoljički (10. vijek)

Sl. 10. Zapisivanje brojeva u Rusiji (17. vijek)

2. POZICIONI BROJEVNI SISTEMI

Danas se brojevi najčešće zapisuju u dekadnom pozicionom sistemu. Smatra se da ovaj sistem zapisivanja brojeva ima korijene u prirodi mnogih jezika. Tako, na primjer, u našem jeziku postoji deset različitih naziva za brojeve od 1 do 10: *jedan*, *dva*, *tri*, *četiri*, *pet*, *šest*, *sedam*, *osam*, *devet* i *deset*. Ostali nazivi za prirodne brojeve su izvedeni iz imena prvih deset brojeva (*jedanaest*, *dvanaest*, *trideset i pet* itd.) Naravno i ovdje postoje izuzeci kao što su brojevi 100 i 1000. Slično je i u nekim drugim jezicima.

Saglasno izvođenju naziva brojeva uvodi se deset različitih oznaka, cifara:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \text{ i } 9.$$

Svaki prirodan broj se može zapisati pomoću ovih deset simbola.

Kod dekadnog brojevnog sistema svaka cifra pored svoje brojevne vrijednosti ima i mjesnu (pozicionu) vrijednost. Tako, na primjer, u broju 359 cifra 5 se nalazi na mjestu *desetica* i ima mjesnu vrijednost *pedeset*. Ista cifra u broju 5971 je na mjestu *hiljada* te ima mjesnu vrijednost *pet hljada*. Dekadni sistem zapisivanja brojeva se zasniva na principu mjesnih (pozicionih) vrijednosti cifara i naziva se *pozicioni*. Broj različitih cifara koji se upotrebljava u pozicionom brojevnom sistemu predstavlja osnovu tog sistema. Dakle, osnova dekadnog sistema je broj 10 (koristi se deset različitih cifara). Poziciona vrijednost cifre prirodnog broja u dekadnom sistemu određena je stepenom broja 10:

$$5378 = 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Za osnovu pozicionog brojevnog sistema može se uzeti bilo koji prirodan broj veći od 1.

Ako se umjesto 10 za osnovu uzme broj 5, onda se svaki broj zapisuje pomoću nekih od cifara 0, 1, 2, 3 i 4. U tom slučaju pozicione vrijednosti cifara su određene stepenima broja 5.

Broj *stotinu devedeset tri* u dekadnom sistemu pisaćemo $193_{(10)}$, gdje smo sa (10) označili da se radi o zapisu datog broja u pozicionom sistemu sa osnovom *deset*. Isti broj zapisan u pozicionom sistemu sa osnovom 5 pisaćemo $1233_{(5)}$, jer je $\mathbf{1233}_{(5)} = \mathbf{1} \cdot 5^3 + \mathbf{2} \cdot 5^2 + \mathbf{3} \cdot 5^1 + \mathbf{3} \cdot 5^0$.

Vavilon

Vavilonci su koristili pozicioni sistem sa osnovom 60; takozvani *šezdesetični* (*seksagezimalni*) brojevni sistem. Brojevi su pisani samo pomoću dvije "cifre": jedna je bila u obliku klina $\blacktriangledown$, a druga horizontalno položenog klina $\blacktriangleleft$.

Znak 𒁹 ima vrijednost 1 ili 60 zavisno od položaja koji zauzima u zapisu broja.

- **Primjer.**

  Broj 92 Vavilonci su zapisivali

  𒁹𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹.

  Pri tome, znak 𒁹 koji je prvi slijeva ima vrijednost 60 dok isti ti znaci na pretposljednjem i posljednjem mjestu imaju vrijednost 1.

  Broj 62 je predstavljan sa tri ista znaka:

  𒁹 𒁹𒁹,

  tako da je ostavljan razmak između znaka za broj 60 i za broj 2.

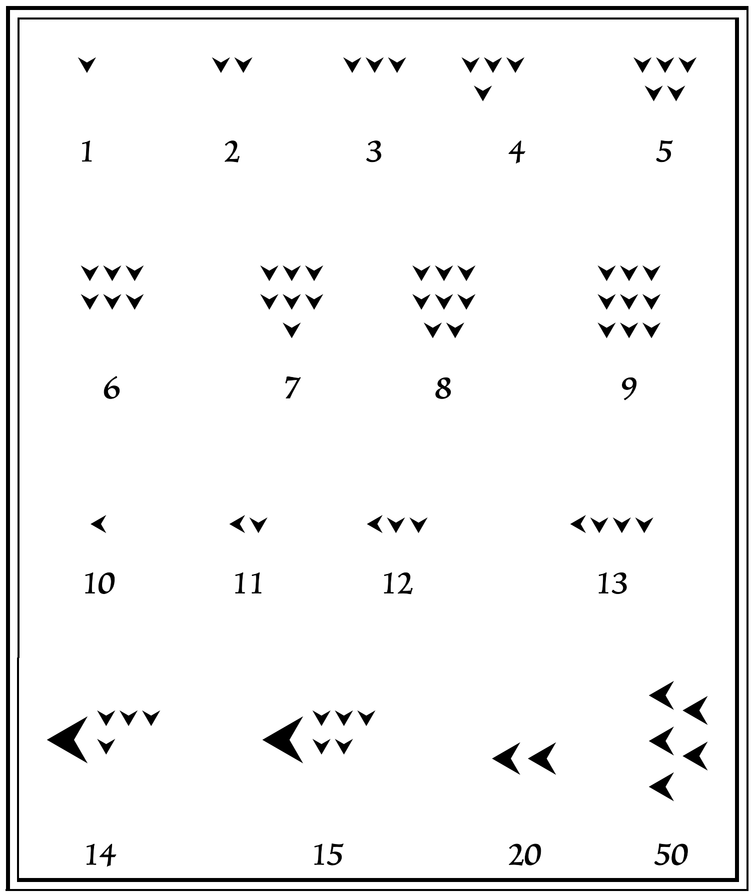
- **Primjer.**

  Zapis 𒌋𒁹 se mogao interpretirati kao 11 ili 11×60 ili $\frac{11}{60}$. O kojem broju se radi Vavilonci su određivali na osnovu konkretnog zadatka.

Ovakav način pisanja brojeva je predstavljao prvi korak od adicionog ka pozicionom brojevnom sistemu. Jedan od njegovih nedostataka je odsustvo znaka za nulu.

Zašto su Vavilonci za osnovu uzeli baš broj 60? Najvjerovatnije da se razlog nalazi u činjenici da broj 60 ima više djelilaca za razliku od nekih drugih brojeva: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30.

Pisanje brojeva sa osnovom 60 koristi se i danas: podjela ugla na 360 stepeni, stepena na 60 minuta, minute na 60 sekundi, kao i časa na 60 minuta i minute na 60 sekundi.



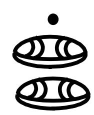
Sl. 11. Vavilonski način zapisivanja brojeva
pomoću klinastog pisma

Maje U Centralnoj Americi Maje (10-12. vijek) su koristili pozicioni brojevni sistem sa osnovom 20. Za to su im bila potrebna tri znaka:

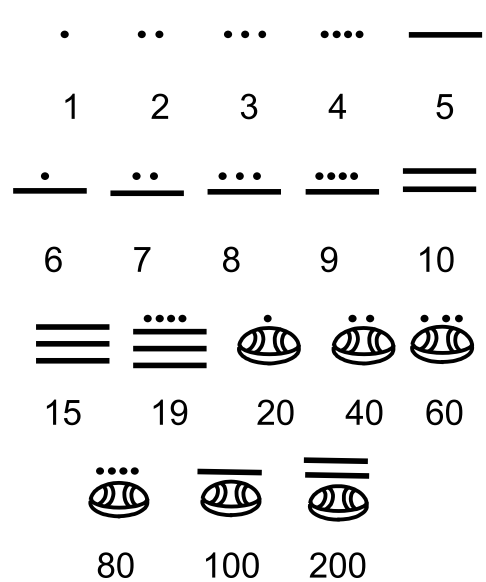
Posljednji znak podsjeća na školjku - neki ga nazivaju i *oval*. Pomoću tačaka i crtica mogu se napisati brojevi od 1 do 19. Dopisivanjem *ovala* ispod bilo kojeg od tako napisanih brojeva dobija se dvadeset puta veći broj.

Sličnost sa današnjim načinom zapisivanja brojeva je očigledna: *nula* dopisana nekom broju sa desne strane uvećava taj broj deset puta.

Maje su svoj sistem zapisivanja brojeva prilagodili mjerenju vremena. Dodajući drugi oval dati broj bi uvećavali 18, a ne 20 puta. Prema tome zapis



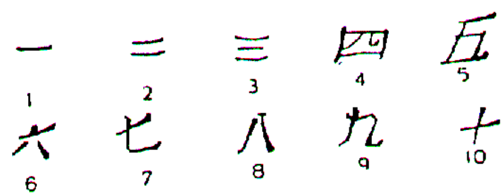
predstavlja broj 360 (1x20x18). Godina kod Maja je imala 360 dana; 18 mjeseci sa po 20 dana.



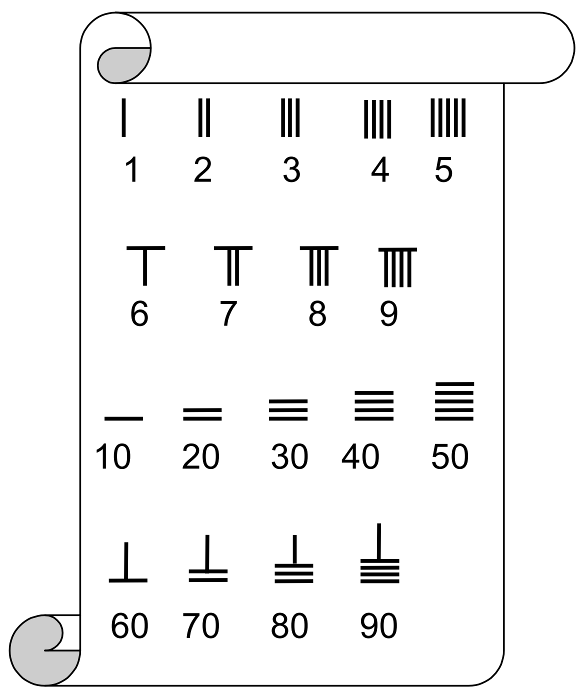
Sl. 12. Oznake za brojeve kod Maja.

Kina

Kinezi su do četvrtog vijeka prije nove ere brojeve označavali hijeroglifima, kada su prešli na predstavljanje brojeva pomoću štapića. Hijeroglifski način zapisivanja brojeva bio je komplikovan (sl. 13), za razliku od njihovog predstavljanja pomoću štapića (sl. 14).

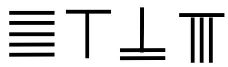


Sl. 13. Kineski zapisi brojeva hijeroglifima



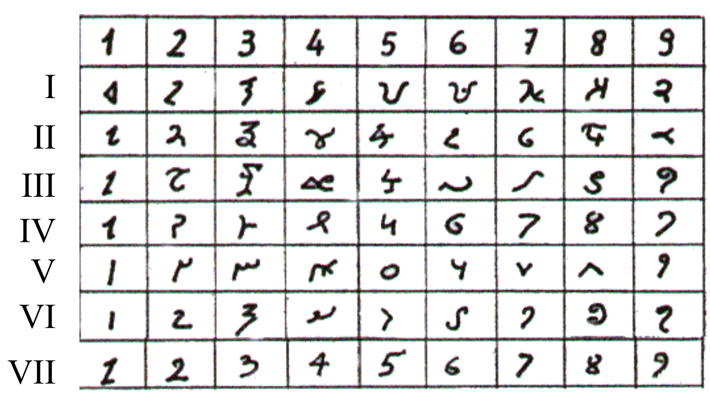
Sl. 14. Kinesko označavanje brojeva ciframa-štapićima

Stotine i *desetine hiljada* Kinezi su označavali kao i *jedinice*, a *hiljade* kao *desetice*. Na osnovu ovih pravila broj 5678 se zapisivao



Indijsko-arapski brojevi

Današnji desetični brojevni sistem nastao je u Indiji. Neki istoričari matematike su mišljenja da je on inspirisan vavilonskim načinom predstavljanja brojeva. U Indiji je pronađena kamena ploča iz 595. godine na kojoj je zapisan broj 346; smatra se da je to prva poznata primjena desetičnog pozicionog sistema. Ovakav način zapisivanja brojeva u Evropu su prenijeli Arapi preko sjeverne Afrike i Španije. Zato se cifre koje danas koristimo nazivaju arapskim. Za prihvatanje desetičnog pozicionog sistema u zapadnoj Evropi zaslužan je arapski matematičar al-Horezmi (oko 780 - oko 850) i njegovo djelo *O indijskom broju*. Do tada se u Evropi koriste rimski i grčki brojevi.



Sl. 15. Evolucija arapskih brojeva
I-Staroindijski brojevi; II-Indijski brojevi (5. v.); III- Boecije (6. v.); IV- Evropa (4. v.); V-Arapski brojevi (azijski), 12. v; VI-Arapski brojevi (evropski), VII-Brojevi (Evropa, 13. v.)

Dekadski brojevni sistem je sporo osvajao Evropu. Često se nailazilo na dekadsko zapisivanje brojeva pomiješano sa grčkim načinom označavanja brojeva. U Francuskoj su sve do 1789. godine zvanični računi bili pisani rimskim brojevima.

U 15. vijeku dekadski pozicioni način zapisivanja brojeva se proširio u cijeloj Evropi. Današnji oblik arapskih cifara je nastajao dugi niz godina. Pojedine oznake za cifre su pretrpjele znatne promjene, sl. 15.

Binarni sistem brojeva

Sa razvojem elektronskih računskih mašina sve veću primjenu dobija *binarni sistem* u kome je osnova računanja broj 2, a cifre su 0 i 1. Računanje u ovom sistemu je dosta dugo, ali istovremeno i jednostavno; tablice sabiranja i množenja su uprošćene.

Tablica sabiranja	Tablica množenja
$0+0=0$	$0 \cdot 0=0$
$0+1=1$	$0 \cdot 1=0$
$1+0=1$	$1 \cdot 0=0$
$1+1=10$	$1 \cdot 1=1$

Broj napisan u binarnom brojevnom sistemu može se predstaviti pomoću električnih impulsa, pri čemu prisustvo električnog impulsa označava *jedinicu*, a njegovo odsustvo - *nulu*. Na tom principu rade kompjuteri.

- **Primjer.**

a) Pretvaranje zapisa broja iz desetičnog u binarni sistem:

$$29_{(10)}=1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=11101_{(2)}$$

b) Prikaz pretvaranja zapisa broja iz binarnog sistema u desetični:

$$1001_{(2)}=1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=8+0+0+1=9_{(10)}$$

c) Sabiranje u binarnom sistemu se obavlja prema navedenoj tablici za sabiranje.

3. PRIRODNI BROJEVI

Brojevi 1,2,3,... koje nazivamo *prirodnim,* dobro su nam poznati i spadaju u najvažnije matematičke pojmove. Naziv *prirodni broj* prvi put se spominje u djelu *Uvod u aritmetiku* grčkog matematičara Nikomaha (oko 100. godine nove ere). Taj naziv je preuzao Boecije (oko 480-524) i koristio ga u djelu *Uputa u aritmetiku*, odakle je dospio u srednji vijek i dalje do nas.

Kod Egipćana i Vavilonaca prirodni brojevi se javljaju u dva značenja: kao *glavni* ili *kardinalni* i kao *redni* ili *ordinalni brojevi*. *Glavni* brojevi utvrđuju koliko je izbrojano elemenata nekog skupa, a *redni* određuju mjesto po redu pojedinog elementa konkretnog skupa.

Već je starim Egipćanima bila poznata podjela prirodnih brojeva na *parne* ili *take* (2, 4, 6, 8, ...) i *neparne* ili *lihe* (1, 3, 5, 7, ...). Oni su pored osnovnih operacija poznavali i koristili operacije: *udvostručavanje (*množenje sa 2*)* i *polovljenje* (dijeljenje sa 2).

Mada je još Aristotel (384-322. p.n.e.) definisao prirodni broj kao "*množinu koja se mjeri jedinicom*", bilo je rasprava treba li i *jedinicu* smatrati brojem. Neki matematičari 17. vijeka smatrali su da *jedinica* nije broj. Uporište ovom tvrđenju nalazili su u učenju pitagorejaca.

Grčki filozof Platon (427-347. p.n.e.), koji je definisao aritmetiku kao nauku o svojstvima parnih i neparnih brojeva, tvrdio je da parnih i neparnih brojeva ima jednako mnogo.

> *U Platonovo vrijeme bila je popularna igra u kojoj jedan od igrača izgovara proizvoljan prirodan broj, a ostali treba da odrede da li je taj broj paran ili neparan.*

Svojstva prirodnih brojeva počela su se uočavati dosta davno i nezavisno od operacija sa njima. Mnoga od njih su bila poznata Vaviloncima i Egipćanima.

Grčki matematičar Pitagora (6. vijek p.n.e.) kao i njegovi sljedbenici, poznati pod nazivom *pitagorejci*, pristupali su predano, sa mnogo žara i misticizma, proučavanju svojstava prirodnih brojeva. Oni su iz skupa prirodnih brojeva izdvajali i proučavali *proste, složene, kvadratne, trougaone, savršene, prijateljske* kao i druge brojeve.

Prosti brojevi

Brojevi različiti od 1, koji nemaju drugih djelilaca osim broja 1 i samoga sebe nazivaju se *prosti brojevi*. Za Euklida (?365-?300. p.n.e.) *prost broj* se ne može mjeriti nijednim brojem nego samo jedinicom.

Od prvih deset prirodnih brojeva četiri su prosta; među 90 dvocifrenih brojeva prostih je 21, a među 900 trocifrenh brojeva 143 su prosta. Ako dalje nastavimo sa određivanjem broja prostih brojeva među četverocifrenim i petocifrenim brojevima vidjećemo da ih ima sve manje i manje. Stare Grke je interesovalo da li postoji takav prirodan broj da nijedan od njega veći broj nije prost. Odgovor na ovo pitanje dao je Euklid dokazavši da prostih brojeva ima beskonačno mnogo. On je tu tvrdnju iskazao stavom:

> *1999. godine otkriven je, pomoću kompjutera, najveći poznati prost broj:*
>
> $$2^{756839}-1,$$
>
> *koji sadrži* 2098960 *cifara.*

Prostih brojeva je više od ma koje naznačene množine brojeva.

Grčki matematičar Eratosten (?276-?194. p.n.e.) pronašao je metod za određivanje svih prostih brojeva koji su manji od nekog datog broja. Ovaj metod je u matematici poznat pod imenom *Eratostenovo sito*.

❒ **Primjer**.

Primjenimo Eratostenov postupak za određivanje prostih brojeva manjih od 100, sl. 16. Precrtajmo jedinicu, koja se ne smatra ni prostim ni složenim brojem. Zatim podvucimo prost broj 2 i precrtajmo sve brojeve koji su djeljivi sa 2. Sljedeći neprecrtani broj je 3. Podvucimo ga, a zatim precrtajmo sve brojeve koji su djeljivi sa tri. Sljedeći broj koji nije ni podvučen ni precrtan je 5. Nastavimo ovaj postupak i u slučaju broja 5.

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Sl. 16. Eratostenovo sito

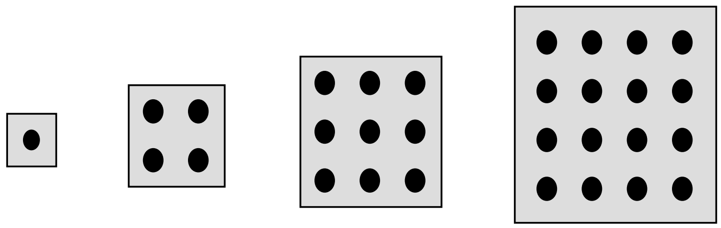
Na kraju ćemo dobiti sve proste brojeve manje od 100; to su svi podvučeni brojevi. ❒

(i)	*Francuski matematičar Ležandr* (1752-1833) *je za određivanje prostih brojeva koristio formulu* $p_n=2n^2+29$ *za* $n=0,1,2,...,28$. *Na taj način se određuje 29 prostih brojeva.*
(ii)	*Slično, švajcarski matematičar Ojler* (1707-1783) *je za određivanje prostih brojeva pronašao formulu* $p_n=n^2+n+41$ *gdje je* $n=0,1,2...,39$. *Međutim, za* $n=40$ *dobija se* $p_{40}=40^2+40+41=40^2+2\cdot 40+1=41^2$ *i ovaj broj je složen.*
(iii)	*Francuski matematičar Ferma* (1601-1665) *je smatrao da su brojevi oblika* $$F_n=2^{2^n}+1$$ *prosti. Ovo tvrđenje je tačno za* $n=0,1,2,3,4$. *Ako je* $n=5$ *dobije se broj* 4294967297 *za kojega je Gaus* (1777-1855) *dokazao da je složen;* $$4294967297=641\cdot 7600417.$$

Kvadratni brojevi

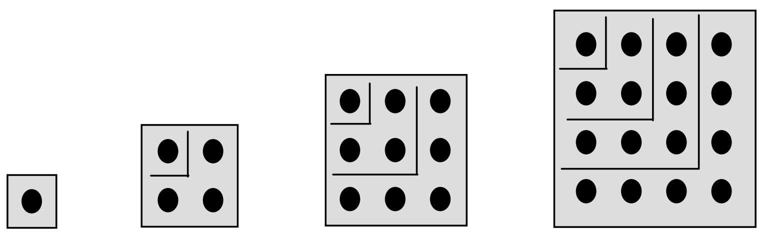
Grci su brojeve interpretirali pomoću geometrijskih objekata. Brojeve koje su prikazivali u obliku geometrijskih figura nazivali su *figurativni brojevi*. Dijelili su ih na *trougaone, kvadratne, pentagonalne, piramidalne* i druge.

Na sl. 17 brojevi 1, 4, 9 i 16 su prikazani kao skupovi tačaka u ravni raspoređeni u jednak broj redova i kolona. Od ovih brojeva su "sagrađeni" kvadrati te su ih pitagorejci nazivali *kvadratni brojevi*.



Sl. 17. Kvadratni brojevi

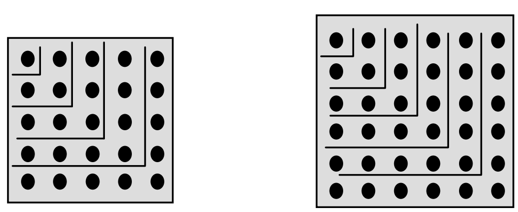
Kvadratne brojeve možemo interpretirati na način kako je to prikazano na sl. 18.



1 1+3=4 1+3+5=9 1+3+5+7=16

Sl. 18.

Kako ćemo dobiti nove kvadratne brojeve? Jednostavno, "konstruisaćemo" sve veće i veće kvadrate, sl. 19. *Peti* kvadratni broj 25 dobije se kao zbir *pet* prvih prirodnih neparnih broja: 1+3+5+7+9=25. Lako se možemo uvjeriti da je *šesti* kvadratni broj 36 jednak zbiru *šest* prvih prirodnih neparnih brojeva: 1+3+5+7+9+11=36.



1+3+5+7+9=25 1+3+5+7+9+11=36

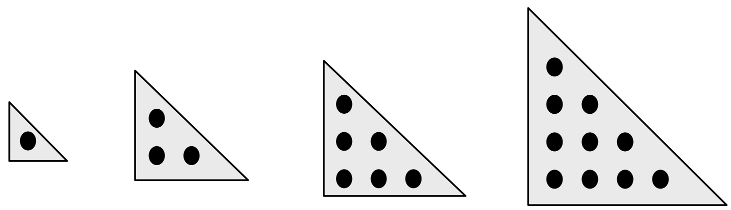
Sl. 19.

Doista, može se dokazati da je zbir prvih n neparnih prirodnih brojeva kvadratni broj, tj. da važi

$$1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2.$$

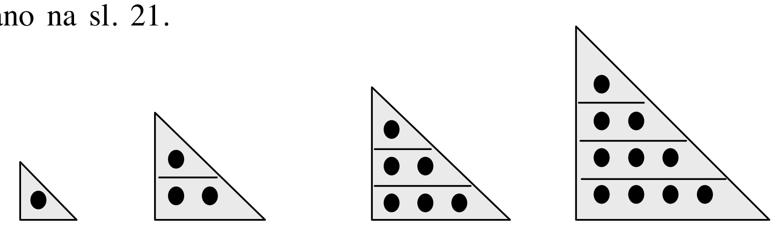
Trougaoni brojevi

Brojevi 1, 3, 6 i 10 se mogu rasporediti kao skupovi tačaka u ravni u obliku trougla, sl. 20. Ovi brojevi se nazivaju *trougaoni*.



Sl. 20. Trougaoni brojevi

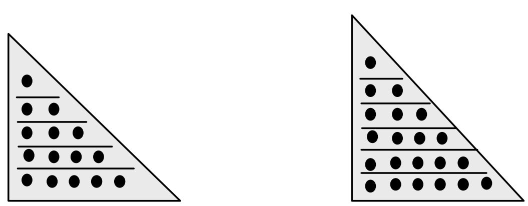
Trougaone brojeve možemo interpretirati na način kako je prikazano na sl. 21.



1 1+2=3 1+2+3=6 1+2+3+4=10

Sl. 21.

Nove trougaone brojeve dobijaćemo tako da "gradimo" sve veće i veće trouglove, sl. 22.



1+2+3+4+5=15 1+2+3+4+5+6=21

Sl. 22.

Peti trougaoni broj 15 se dobije kao zbir *pet* prvih prirodnih brojeva: $1+2+3+4+5=15$. *Šesti* trougaoni broj je 21. On je jednak zbiru *šest* prvih prirodnih brojeva: $1+2+3+4+5+6=21$.

Za trougaone brojeve $1,3,6,10,15,...,n$ važi:

$$1=\frac{1\cdot 2}{2},$$

$$1+2=3=\frac{2\cdot 3}{2},$$

$$1+2+3=6=\frac{3\cdot 4}{2},$$

$$1+2+3+4=10=\frac{4\cdot 5}{2},$$

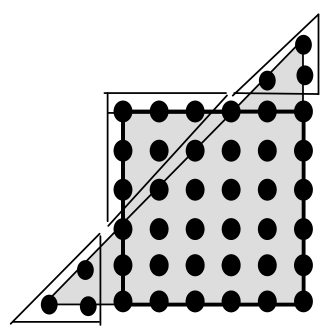
$$1+2+3+4+5=15=\frac{5\cdot 6}{2},$$

....

$$1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Dakle, zbir prvih n prirodnih brojeva je trougaoni broj; svaki broj koji se može napisati u obliku $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ je trougaoni.

Broj 1 je i kvadratni i trougaoni broj. Da li ima još brojeva sa ovim svojstvom? Svakako da ima. Jedan od njih je broj 36. Na sl. 23 je prikazano kako se kvadratni broj 36 može prikazati kao trougaoni broj.



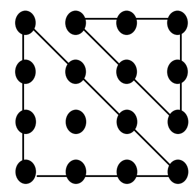
Sl. 23.

Utvrđeno je da prva znanja o *figurativnim brojevima* potiču od Vavilonaca. Od njih su Grci preuzeli učenje o figurativnim brojevim i usavršili ga. Grčki matematičar Diofant (3. vijek) je napisao knjigu o figurativnim brojevima.

Nikomahov identitet

O figurativnim brojevima pisao je Nikomah u knjizi *Uvod u aritmetiku*.

Zbir dva uzastopna trougaona broja je kvadratni broj (sl. 24).

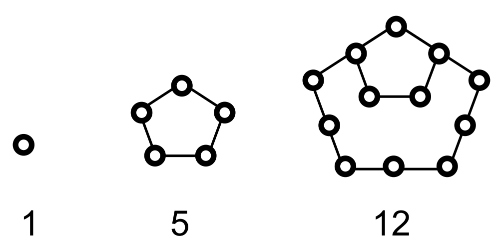


Sl. 24.

Petougaoni brojevi

1, 5, 12, 22, 35, ...

Petougaoni broj je broj koji se može napisati u obliku $\frac{n \cdot (3n-1)}{2}$.



Sl. 25. Petougaoni brojevi

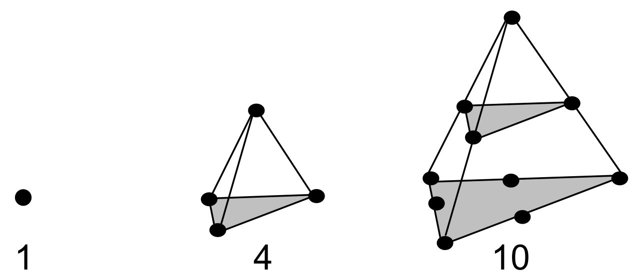
Tetraedarski brojevi

1,4,10,20,35,...

Brojevi koji se mogu zapisati u obliku

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}$$

nazivaju se tetraedarski brojevi.



Sl. 26. Tetraedarski brojevi

Savršeni brojevi Svaki djelilac proizvoljnog broja n, različit od samog broja n, naziva se *pravi djelilac* broja n. Pravi djelioci broja 6 su 1, 2 i 3. Njihov zbir je $1+2+3=6$. Dakle, broj 6 je jednak zbiru svojih pravih djelilaca. To svojstvo ima i broj 28 (njegovi pravi djelioci su 1, 2, 4, 7 i 14):

$$28=1+2+4+7+14.$$

Ovi brojevi se nazivaju *savršenim*. *Savršeni broj* je onaj broj koji je jednak zbiru svih svojih pravih djelilaca. Da li postoji još savršenih brojeva? Svakako da postoji. Sljedeći savršeni brojevi su 496 i 8128. Za ovaj posljednji savršeni broj znao je Nikomah. Dalje traganje za novim savršenim brojevima nije bilo nimalo jednostavno.

Italijanski matematičar Fibonači (1180 - oko 1250) je za određivanje savršenih brojeva koristio izraz

$$\frac{1}{2}\cdot 2^{p}\left(2^{p}-1\right),$$

gdje je $2^{p}-1$ prost broj. Za $p = 2, 3, 5$ i 7 dobija se:

$$\frac{1}{2}\cdot 2^{2}\left(2^{2}-1\right)=6, \qquad \frac{1}{2}\cdot 2^{3}\left(2^{3}-1\right)=28,$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2^{5}\left(2^{5}-1\right)=496, \qquad \frac{1}{2}\cdot 2^{7}\left(2^{7}-1\right)=8128.$$

Peti savršeni broj $33\ 550\ 336$ pronašao je njemački matematičar Regiomontanus (1436-1476).

Ojler je tvrdio da je

$$2^{n-1}\left(2^{n}-1\right)$$

savršen broj za $n=1,2,3,5,7,13,19, 31, 41$ i 47. Kasnije je pokazao da ovo tvrđenje nije tačno za $n=41$ i $n=47$.

8 589 056 - *šesti savršeni broj*

137 438 691 328 - *sedmi savršeni broj*

2 305 843 008 139 952 128 - *osmi savršeni broj*

Do januara 2000. godine bilo je poznato 38 savršenih brojeva i svi su oni parni. Posljednji i najveći savršeni broj, među ovih 38, pronađen je 1999. godine; zapisuje se pomoću 4 197 919 cifara.

Prijateljski brojevi

Pravi djelioci broja 220 su: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 22, 44, 55 i 110. Njihov zbir je 284:

$$1+2+4+5+10+20+22+44+55+110=284.$$

Slično, pravi djelioci broja 284 su: 1, 2, 4, 71 i 142. Njihov zbir je 220:

$$1+2+4+71+142 = 220.$$

Brojevi, kao što su 220 i 284, kod kojih je zbir svih pravih djelilaca jednog broja jednak drugom broju, nazivaju se *prijateljski brojevi*. Pitagorejci su znali samo za jedan par prijateljskih brojeva: 220 i 284. Ojler je u 17. vijeku pronašao 65 parova prijateljskih brojeva. Prijateljske brojeve su proučavali Ferma i Dekart. Dekart je 1638. godine otkrio prijateljske brojeve

9 363 584 i 9 437 056.

Zahvaljujući računarima do početka 1998. godine bilo je poznato 4316 parova prijateljskih brojeva. Do danas nije utvrđeno da li ih ima konačno ili beskonačno mnogo.

> *Mnogi su tragali za novim parovima prijateljskih brojeva. Među njima je bilo poznatih matematičara, ali i onim drugih. Tako je u 17. vijeku čuveni muzičar Nikolo Paganini kao šesnaestogodišnjak otkrio jedan par prijateljskih brojeva:* 1184 *i* 1210.

Brojevi blizanci

Dva prosta broja koji se razlikuju za 2 nazivaju se *blizancima*. *Brojevi blizanci* su, na primjer,

3 i 5;
5 i 7;
11 i 13;
41 i 43;
101 i 103;
10999949 i 10999951.

Postoji osam parova brojeva blizanaca koji su manji od 100; 1224 para je manjih od 100000, a 440312 ih je manje od sto miliona. Ne zna se da li *brojeva blizanaca* ima konačno ili beskonačno mnogo. Oni se mogu određivati pomoću *Eratostenovog sita*.

Fibonačijevi brojevi

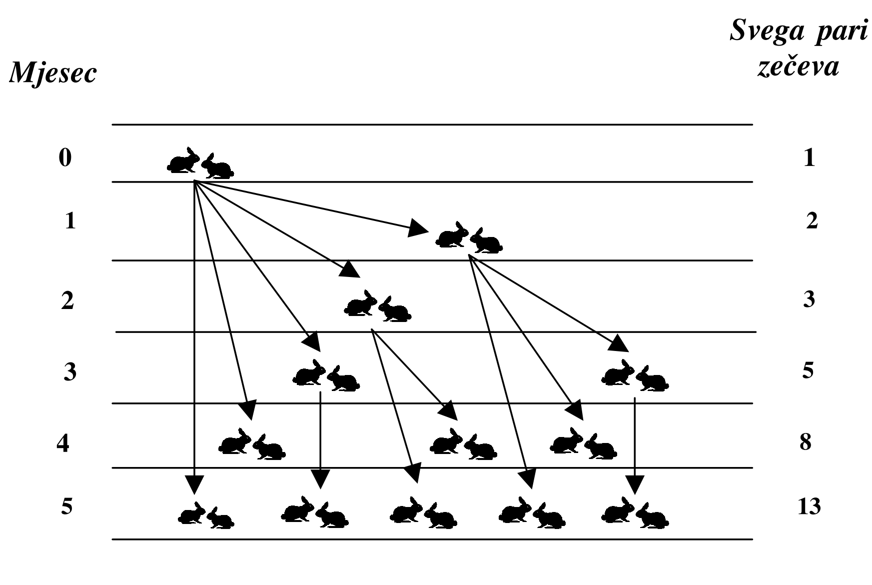
U nizu brojeva 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,... uočimo pravilo po kojem su napisani:

počevši od trećeg člana svaki od brojeva jednak je zbiru dvaju njemu prethodnih članova.

Brojevi ovog niza se nazivaju *Fibonačijevi brojevi* po matematičaru Fibonačiju. On je u djelu *Knjiga o abaku* (1202) prvi put skrenuo pažnju na ovaj niz.

Fibonačijevi brojevi se dobiju rješavanjem zadatka:

Koliko se pari zečeva može dobiti tokom jedne godine od jednog para ako svaki par rađa novi par, koji je već od drugog mjeseca u stanju da rađa i ako se zna da zečevi ne umiru?



Brojevi i magija

Pitagorejci su dijelili brojeve u tri kategorije: *muške - neparne*; *ženske - parne* i *parno-neparnu* jedinicu. Smatrali su da brojevi imaju magična svojsta. Tako je, na primjer, broj *jedan* predstavljao svemir i savršenstvo; brojevi 4 i 9 su oličenje pravednosti, jer su nastali množenjem jednakih brojeva.

Insistirajući na vezi aritmetike i magije pitagorejci su trošili vrijeme i energiju tragajući za tom vezom. Za njih je posebno značenje imala prva desetica. Prema pitagorejcima brojevi 4, 6, 8, 9, 10 su nastali kao rezultat množenja nekim od brojeva 2, 3, 4, 5:

$$2\cdot 2=4,\quad 2\cdot 3=6,\quad 2\cdot 4=8,\quad 2\cdot 5=10,\quad 3\cdot 3=9.$$

Množenje kao operacija oplođivanja davala je brojevima 2, 3, 4, 5 snagu plodnosti, a brojevima 4, 6, 8, 9, 10 snagu "porođenoga".

Takav pristup proučavanju brojeva sa primjesama magije doveo je poslije Pitagorine smrti do sukoba među pitagorejcima te se stvaraju dvije struje. Spor je nastao kada je trebalo odrediti koji je broj rezultat "bračnog spajanja". Jedni su smatrali da je to broj 5, jer je on *zbir* najmanjeg ženskog i najmanjeg muškog broja: $5=2+3$; drugi su isticali da je to broj 6, jer je on *proizvod* najmanjeg ženskog i najmanjeg muškog broja: $6=2\cdot 3$.

Od jedan do beskonačno

Prva saznanja iz teorije brojeva Pitagorejci su najvjerovatnije preuzeli od sljedbenika *Jonske škole,* koju je osnovao Tales (oko 624-547. p.n.e.). Prva sistematska izlaganja iz teorije brojeva dao je Euklid u svojim *Elementima*.

U starom vijeku je uočeno da prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo; Platon je govorio da prirodnim brojevima *nema kraja*. Arhimed (287-212. p.n.e.) je u svojoj raspravi *Pješčanik* dokazivao vladaru Sirakuze da broj svih zrnaca pjeska sadržanih u kugli koja obuhvata cijeli svemir nije beskonačan nego da se može izračunati.

Stari narodi su nastojali pomoću velikih brojeva izraziti poštovanje i poniznost prema svojim božanstvima. Tako se kod Indusa u epu *Mahabharata* govori o $24 \cdot 10^{15}$ bogova kao i da je Buda imao $6 \cdot 10^{16}$ sinova, dok se u jednoj narodnoj pripovijeci priča o ratu u kojem je učestvovalo 10^{40} majmuna.

Grčki matematičar Anaksagora (oko 500-428. p.n.e.) ističe da uvijek "postoji nešto veće od onoga što je veliko".

Pitagorejci su pojam *beskonačno* vezivali za božanstva i nisu ga proučavali smatrajući da to smiju raditi samo bogovi.

Indijski matematičar Bhaskara (1114-?1185) je naslućivao da bi rezultat dijeljenja sa *nulom* trebao da bude *beskonačan*.

Put do pojma beskonačno vodio je preko velikih brojeva. Teško je sa određenom tačnošću reći kada su i gdje nastajali pojedini nazivi za velike brojeve. Tokom vremena oni su mijenjani dok se nije došlo do današnjih naziva. Tako se oko 1500. godine u rukopisu francuskog matematičara Šikea javlja riječ *milion* kao naziv za 10^6, *bilion* za 10^{12}, trilion za 10^{18}. Riječ *milion* je prvi put odštampana 1494. godine u jednom radu italijanskog matematičara Luke Pačolija (1445-1514). Riječ *milijarda* javlja se početkom 16. vijeka.

Interesantno je upoznati se sa načinom zapisivanja velikih brojeva. Engleski matematičar Rekord (1510-1558) velike brojeve zapisuje grupišući ih pomoću vertikalne crte $|230|864|089|015|340|$, dok neki matematičari to rade na sljedeći način $\overline{678}\ \overline{935}\ \overline{784}\ \overline{841}$. Italijanski matematičar Fibonači je umjesto crta koristio lukove iznad grupe od po tri broja. Takođe, upotrebljavaju se zapete i oznake za akcente da bi se grupisale cifre velikih brojeva.

Oznaku ∞ za beskonačno uveo je engleski matematičar Valis 1657. godine.

Računanje sa beskonačnim veličinama ne podliježe zakonima koji važe za konačne brojeve. Tako je, na primjer,

$$\infty + 123456789 = \infty, \quad \infty \cdot 3 = \infty,$$

$$\frac{\infty}{987654321} = \infty, \quad \infty + \infty = \infty .$$

Euklid je u prvoj knjizi *Elemenata* izložio aksiomu koja glasi: "*Cjelina je veća od (svog) dijela*". Ova, na prvi pogled, jednostavna tvrdnja ne važi za beskonačne skupove.

Skup pozitivnih parnih brojeva 2, 4, 6, 8, 10, ... je dio (podskup) skupa prirodnih brojeva 1, 2, 3, 4, 5, ... Ako bi uvažili navedenu aksiomu, onda bismo mogli reći da je skup prirodnih brojeva veći od skupa pozitivnih parnih brojeva. Ovaj zaključak je pogrešan, jer radi se o beskonačnim skupovima.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots & n\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10\ldots & 2n\ldots \end{array}$$

Tačan odgovor je: *pozitivnih parnih brojeva ima isto toliko koliko i prirodnih brojeva*, jer svakom prirodnom broju n odgovara paran broj $2n$, i obrnuto svakom parnom broju $2n$ na ovaj način može da se pridruži prirodan broj n.

*Nula**

Stari Egipćani su imali znak (hijeroglif) za nulu, ali kako njihov sistem pisanja nije bio pozicioni to ovaj simbol nije imao značenje cifre. Vavilonci su u 2. vijeku p.n.e. prilikom zapisivanja brojeva u šezdesetičnom sistemu imali znak za nulu i koristili su ga samo na kraju broja.

---

* Iako nula ne spada u skup prirodnih brojeva mišljenja smo da je dati sadržaj prikladnije izložiti na ovom mjestu nego u okviru izlaganja o cijelim brojevima. Pogotovo što je ovdje više riječ o nuli kao cifri nego kao broju.

Vidjeli smo da su Maje imali znak za cifru nula:

Taj simbol nije predstavljao nulu kao broj. Slično je bilo i kod drugih naroda koji su upotrebljavali pozicioni sistem zapisivanja brojeva. Tako, na primjer, da bi se zapisao broj *tri stotine pet* trebalo je u zapisu naznačiti da taj broj nema desetica te se između stotina i jedinica stavljao neki znak da bi se "popunilo prazno mjesto". Dakle u početku *nula* je bila samo znak za *ništa*, a označavana je tačkom (Indija), kružićem koji podsjeća na slovo o (Arapi); aleksandrijski astronom Ptolemej (oko 150. godine nove ere) koristi slovo o (omikron) - prvo slovo grčke riječi *ništa* U kineskim rukopisima prazno mjesto je bilo naznaka za nulu. Današnji simbol za nulu je indijsko-arapskog porijekla. Najstariji pisani dokument sa znakom za nulu potiče iz 9. vijeka.

Indijci su nulu nazivali *sunja* što znači prazno. Ovaj naziv Arapi su izgovarali kao *sifr* da bi se kasnije ta riječ transformisala u *cifra*. Riječ *cifra* je bila naziv za nulu sve do druge polovine 16. vijeka da bi se od tada upotrebljavala kao naziv za sve znamenke. Pa ipak neki matematičari 16. i 17. vijeku rečju *cifra* su nazivali *nulu*.

Ovo je samo jedan primjer koji ukazuje koliko je vremena potrebno da bi se neki pojam transformisao od svog nastanka do konačnog (današnjeg) značenja.

Za grčkog matematičara Nikomaha nula nije broj:

"Broj *jedan* s jedne strane nema susjeda."

I grčki matematičar Diofant nije shvatao *nulu* kao broj. Za njega jednačina $12x+10=3x+10$, čije je jedinstveno rešenje 0, nema rešenja. Ovakvo shvatanje nalazimo sve do 16. vijeka kada se *nula* počinje interpretirati kao razlika dva jednaka broja. Tek pojavom Dekartove *Geometrije* (1637) *nula* je postala ravnopravna sa ostalim brojevima.

Koliko je

$$1-1+1-1+1-1+\ldots?$$

Ovo pitanje se javlja u 17. vijeku i prijetilo je da uzdrma zgradu matematike.

Ako navedeni "zbir" prikažemo

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0+0+0+\ldots,$$

onda je njegova vrijednost 0. Ali, ako brojni izraz

$$1-1+1-1+1-1+\ldots$$

pišemo

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots=1-0-0-0-\ldots,$$

onda je zbir jednak 1. Postojala je i treća grupa matematičara, koja je bila za "kompromis" i predlagala je da traženi zbir ne bude ni 0 ni 1 nego da se on nalazi negde na "sredini" tj. da iznosi ½.

Saznanje da vrijednost izraza zavisi od toga kako ćemo ga transformisati prijetilo je da dovede u sumnju cijelu matematičku zgradu, koja je izgrađivana hiljadama godina. Na izgled jednostavno pitanje prijetilo je da uništi nešto što je do tada izgledalo stabilno i postojano.

Ovaj problem je zadavao velike poteškoće mnogim matematičarima i istovremeno izazivao interesantne rasprave. Tek kada se pojam beskonačnosti počeo sistematičnije izučavati došlo se do odgovora. Traženi "zbir" nije nijedan od dobijenih rezultata, jer zbir se može odrediti samo za konačno mnogo sabiraka.

4. RAZLOMCI

Razlomci nisu nastali kao rezultat računske operacije dijeljenja nego se pojavljuju kao posebne kategorije brojeva koje karakterišu određeno kvantitativno svojstvo *jednog dijela* posmatranog realnog objekta.

Pojam razlomka je prvo izražen u pojmu tzv. *prirodnih razlomaka*: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$. Kod starih civilizacija za ove razlomke su postojali posebni znaci i nazivi. U početku oni nisu imali veze sa simbolima i nazivima prirodnih brojeva.

Egipat

Egipćani su veoma rano upoznali *prirodne razlomke*, da bi kasnije upotrebljavali samo *osnovne razlomke*, tj. razlomke oblika $\frac{1}{n}$. Ostale razlomke su predstavljali pomoću osnovnih razlomaka. Tako u Rajndovom papirusu, pisanom oko 1650. godine prije nove ere, nalazimo tablicu u kojoj su razlomci oblika $\frac{2}{2n+1}$, za $n=2,3,4,\ldots,50$, razloženi na osnovne razlomke.

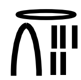
❒ **Primjer.**

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}; \quad \frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}; \quad \frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}.$$ ❒

Nije nam poznato na koji način su vršena razlaganja običnih razlomaka na osnovne razlomke, ali je sigurno da su Egipćani imali izgrađen postupak za njihovo izračunavanje.

> Egipćani su koristili poseban simbol za razlomak $\frac{2}{3}$:  .

Jedan od razloga zašto su Egipćani koristili samo osnovne razlomke vjerovatno je i taj što nisu pronašli pogodnu simboliku za zapisivanje razlomaka. Osnovne razlomke su označavali tako što su pisali samo imenilac i iznad njega stavljali poseban znak u obliku ovala: .

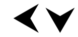
 $= \dfrac{1}{15}$

Osnovne razlomke ćemo označavati tako da umjesto egipatskog znaka u obliku ovala stavljamo crticu. Tako, na primjer, razlomke $\dfrac{1}{10}$, $\dfrac{1}{17}$, $\dfrac{1}{36}$ ćemo redom označavati $\overline{10}, \overline{17}, \overline{36}$. Jedini izuzetak kod ovakvog zapisivanja osnovnih razlomaka je broj $\dfrac{1}{2}$ koji je kao i $\dfrac{2}{3}$ imao svoj posebni simbol.

Ako je trebalo zapisati rezultat dijeljenja 2 sa 17, onda se razlomak $\dfrac{2}{17}$ predstavljao kao zbir razlomaka: $\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{51} + \dfrac{1}{68}$, ili prema egipatskom načinu pisanja imenioci osnovnih razlomaka su ispisivani jedan do drugog, a iznad svakog od njih stavljana je crtica:

$$\frac{2}{17} \quad = \quad \overline{12}\ \overline{51}\ \overline{68}.$$

Vavilon Vavilonci su i pri pisanju razlomaka upotrebljavali šezdesetični pozicioni sistem. Na primjer, broj $\dfrac{3}{5}$ pisali su tako što bi prvo osnovni razlomak $\dfrac{1}{5}$ pretvarali u *šezdesetični razlomak* $\dfrac{12}{60}$ i zatim ga povećali tri puta: $\dfrac{36}{60}$.

Kao što smo ranije izložili, vavilonski zapis  se mogao interpretarali kao 11 ili 11×60 ili $\frac{11}{60}$. Po prirodi konkretnog zadatka određivalo se o kojem se broju radi. Ovakav način zapisivanja brojeva omogućavao je Vaviloncima da ne prave suštinsku razliku između razlomaka i prirodnih brojeva.

Grčka

Grci razlomke nisu smatrali brojevima, jer u osnovi njihovog shvatanja broja bila je teza o nedjeljivosti jedinice. Pa ipak, problemi nastali u svakodnevnom životu i praksi su ih upućivali na upotrebu razlomaka. Oni su u praktičnom računanju primjenjivali egipatske osnovne razlomke, a u ostalim slučajevima vavilonski šezdesetični pozicioni sistem. Nije bio rijedak slučaj da su za označavanje razlomaka koristili i oznake koje su bile u skladu sa njihovim oznakama za prirodne brojeve.

Na primjer, razlomak $\frac{1}{4}$ su pisali Δ'', dok je razlomak $\frac{1}{3}$ imao oznaku Γ''.

Usavršavajući egipatski način računanja sa razlomcima Grci su uočili da se oni mogu jednostavnije sabirati, ako se svi sabirci svedu na jednake imenioce. Operaciju sabiranja razlomaka nazivali su *spajanje*.

Još su pitagorejci upotrebljavali ne samo osnovne razlomke već i razlomke gde je brojilac veći od imenioca. Za razlomke $\frac{4}{3}$ i $\frac{9}{8}$ su imali posebne nazive; $\frac{4}{3}$ su nazivali "velika trećina", a $\frac{9}{8}$ "velika osmina".

Indija

U Indiji se od 7. vijeka razlomci označavaju na sličan način kao što se to i danas čini ali bez razlomačke crte. *Tri osmine* su pisali $\begin{matrix}3\\8\end{matrix}$, a mješoviti broj $4\frac{3}{8}$ zapisivan je $\begin{matrix}4\\3\\8\end{matrix}$. Na ovaj način razlomke su pisali Brahmagupta (oko 628) i Bhaskara (oko 1150). U Grčkoj je pronađen jedan matematički spis iz 1. vijeka nove ere gdje se razlomci pišu na sličan način.

Indijci su veoma dobro računali sa razlomcima. Oni su i cijeli broj, ako bi se pojavio sa razlomcima, smatrali razlomkom čiji je imenilac 1.

Rim

Rimljani, koji su u matematici bili učenici Grka, zapisivali su razlomke sa osnovom 12. Izbjegavali su pisanje razlomaka pomoću simbola. Koristili su posebne nazive za razlomke:

$$\frac{1}{24}, \frac{1}{36}, \frac{1}{48}, \frac{1}{72}, \frac{1}{144}, \frac{1}{288}.$$

Kina

Kinezi nisu imali posebne oznake za razlomke nego su ih pisali riječima. Tako, na primjer, razlomak $\frac{m}{n}$ su pisali "n *ispod* m". Za neke razlomke su imali posebne znakove kao i posebne nazive. Tako su broj $\frac{1}{2}$ nazivali *polovina*, $\frac{1}{3}$ - *mala polovina*, a $\frac{2}{3}$ - *velika polovina*.

U čuvenom kineskom djelu *Matematika u devet knjiga* izložene su računske operacije sa razlomcima. Razlomke su sabirali tako da su ih svodili na zajednički imenilac koji je bio jednak proizvodu imenilaca sabiraka. Takođe, Kinezi su znali dijeliti cijeli broj razlomkom. Poznavali su i pravila za skraćivanje razlomaka.

Desetični razlomci se prvi put javljaju u Kini kao rezultat desetičnog sistema mjera, koji se u Kini upotrebljava od 2. vijeka p. n. e. Interesantno je da su evropski matematičari prihvatili desetične razlomke tek u 16. vijeku.

Arapi

Arapski matematičar al-Horezmi je u svom djelu *Aritmetika* sabrao i sredio mnoga znanja o razlomcima. Za razlomke sa brojiocem 1, i to od $\frac{1}{2}$ do $\frac{1}{10}$, koristi posebne nazive. Ostali razlomci su iskazivani u drugom obliku; na primjer, $\frac{1}{13}$ je *dio od trinaest dijelova*, a $\frac{3}{17}$ su *tri dijela od* 17. Al-Horezmijeva *Aritmetika*, gdje su razlomci predstavljani u sistemu sa bazom 60, je izvršila veliki uticaj na evropske matematičare.

Drugi arapski matematičar Abu-al-Vafa (10. vijek) je izvršio klasifikaciju razlomaka:

1. Razlomke oblika $\frac{1}{n}$, gdje je $n=2,3,4...,10$, naziva *glavnim*;
2. Razlomke oblika $\frac{m}{n}$, gdje je $m<n\leq 10$, naziva *sastavnim*;
3. Razlomke koji se mogu izraziti kao proizvod glavnih razlomaka naziva *sjedinjenim*.

One razlomke koji se mogu izraziti kao zbir ili proizvod razlomaka oblika $\frac{1}{n}$, gdje je $1<n\leq 10$, naziva *izrazivim*, a ostale *neizrazivim*.

Arapi su usavršili tehniku računanja sa razlomcima; zahvaljujući njima u Evropu je dospjelo sistematizovano učenje o razlomcima. U tom smislu treba spomenuti al-Kašijevu knjigu *Ključ aritmetike* (15. vijek), koja je bila jedan veoma dobar vodič kroz elementarnu matematiku.

Arapi su uveli razlomačku crtu, koja se u Evropi pojavila zahvaljujući Italijanu Leonardu iz Pize, poznatijem kao Fibonači (sin Bonača). On je koristi u svom čuvenom delu *Knjiga o abaku* (1202). U nekim knjigama štampanim tri vijeka kasnije razlomačka crta se izostavlja te se, na primjer, razlomak $\frac{2}{3}$ piše $\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3}$. Osim razlomačke crte često se koristio i simbol **:** te se, na primjer, broj *tri četvrtine* zapisuje $3:4$.

U periodu renesanse bilo je uobičajeno da se razlomci pišu i pomoću rimskih cifara; na primjer, *devet jedanaestina* je zapisivano

$$\frac{\mathrm{IX}}{\mathrm{XI}}.$$

Evropa od 16. vijeka

U periodu od 14. do 16. vijeka desetični razlomci se sve češće pojavljuju u djelima pojedinih autora. Neki od njih ističu da se do desetičnih razlomaka može doći "ako se jedinica podijeli na deset jednakih djelova, a svaki taj deseti dio se dalje dijeli na deset jednakih dijelova itd". Evropski matematičari su počeli ne samo da prihvataju i proučavaju arapsko učenje o brojevima nego i da doprinose njegovom daljem razvoju. Iz ovoga perioda posebno treba istaći flamanskog matematičara i inženjera Simona Stevina koji je u djelu *Deseta* (1585) uveo desetične razlomke i izložio koliko su oni u primjenama praktičniji od drugih razlomaka. Ovaj rad je predstavljao osnovu za unifikaciju cjelokupnog sistema mjera na desetičnoj osnovi.

Interesantno da 150 godina prije Stevinove knjige al-Kaši u djelu *Ključ aritmetike* izlaže učenje o decimalnim brojevima. Ova knjiga je dugo ostala nepoznata te Stevin nije mogao znati za nju.

Pravila za množenje razlomaka bila su poznata evropskim matematičarima srednjeg vijeka. Sve do Štifela (oko 1486-1567) dijeljenje razlomaka izvodilo se tako što su proširivani sve do dovođenja na jednake imenioce. Na taj način dijeljenje razlomaka se svodilo na dijeljenje brojilaca.

❒ **Primjer.**

$$\frac{2}{7}:\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 5}{7\cdot 5}:\frac{4\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{10}{35}:\frac{28}{35}=10:28\ .$$ ❒

Naravno, do novih saznanja se dolazilo sporo i poslije mnogo diskusija, prepiski pa i sukoba. Neke činjenice nisu bile odmah prihvaćene, jer su se protivile dotadašnjim saznanjima i iskustvima.

Danas je jasno da je proizvod razlomaka $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{5}$ manji od svakog od datih činilaca:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{15}\ ; \qquad \frac{2}{15}<\frac{1}{3} \quad \text{i} \quad \frac{2}{15}<\frac{2}{5}.$$

Mnoge evropske matematičare srednjeg vijeka je zbunjivala ova činjenica pa su joj pripisivali i mistično značenje. To je vjerovatno bila posljedica znanja o množenju prirodnih brojeva, gdje je proizvod veći ili jednak od svakog činioca.

Uvođenje pozicionog sistema brojeva je doprinijelo daljoj izgradnji decimalnih razlomaka. Već u 15. vijeku javljaju se tablice u kojima se koriste decimalni razlomci. U periodu od 15. do 16. vijeka decimalni razlomci su sve prisutniji u matematičkim knjigama.

Tek poslije objavljivanja Stevinovog djela *Deseta,* decimalni razlomci se počinju u većoj mjeri primjenjivati u Evropi. Škotski matematičar Neper (1550-1617) je zaslužan za konačno uobličavanje načina pisanja desetičnih razlomaka. On je, pored ostalog, uveo desetičnu zapetu. Prije toga, na primjer, Stevin desetični razlomak 2,856 piše 2856③, dok engleski matematičar Rudolf (16. vijek) za isti broj ima svoju notaciju: 2|856.

Uvođenjem decimalnih razlomaka završen je proces izgradnje desetičnog pozicionog brojevnog sistema.

Žan de Mer (16. vijek) navodi da se $\sqrt{2}$ može napisati kao 1414 ako se prvi broj smatra cijelim, a naredni brojevi kao deseti dijelovi prethodnih.

Procent

Riječ procent potiče od latinskih riječi *pro centum* što znači "od stotine". U 15. vijeku procenti su zapisivani na različite načine.

20% se pisalo:

"20 p 100" ; "XX. p. c." ili "XX. p cento".

Pretpostavlja se da današnji znak za procent potiče iz jednog anonimnog italijanskog rukopisa iz 1425. godine.

5. CIJELI BROJEVI

Oduzimajući brojevi

Negativni brojevi se prvi put javljaju u Kini u osmoj knjizi djela *Matematika u devet knjiga* (oko 200. godine prije nove ere). Kinezi pozitivne brojeve nazivaju *pravilnim*, a negativne *dugom*, *nedostatkom*, odnosno *lažnim* brojevima.

Evropski matematičari starog vijeka pod *brojem* podrazumijevaju samo pozitivne cijele brojeve. Za njih negativni brojevi nisu ravnopravni sa prirodnim brojevima te ih nazivaju *nepravi, lažni* pa čak i *besmisleni brojevi*. Ako bi, na primjer, od 5 trebalo oduzeti 8, onda oni nisu znali izračunati razliku tih brojeva, a intuitivno su osjećali da bi ona trebala biti broj. U tom slučaju rezultat oduzimanja je prikazivan kao brojevni izraz $5-8$.

Grčki matematičar Diofant je u skladu sa tadašnjim razvojem matematike pod pojmom *broj* podrazumijevao samo cijele pozitivne brojeve. To mu nije smetalo da u praksi računa sa pozitivnim razlomcima kao i sa negativnim brojevima. Za njega je jednačina $4x+20=0$ besmislena, jer je rešenje negativan broj. On pozitivne brojeve naziva *brojevi za sabiranje* (sabirajući brojevi), a negativne - *brojevi za oduzimanje* (oduzimajući brojevi) i navodi pravila za njihovo množenje:

> *Broj za oduzimanje pomnožen s brojem za oduzimanje daje broj za sabiranje; broj za oduzimanje pomnožen s brojem za sabiranje daje broj za oduzimanje.*

Svakodnevna ljudska djelatnost je dovodila do saznanja da je potrebno istaći suprotnosti između imetka i duga, smjera napred i nazad i sl. Tako, na primjer, indijski matematičar Brahmagupta (7. v.) pozitivne brojeve predstavlja kao imetak, a negativne kao dug te navodi pravila za sabiranje:

> *Zbir dva imetka je imetak, dva duga - dug, imetka i duga - njihova razlika, a ako su jednaki - nula. Zbir nule i duga je dug, imetka i nule - imetak, a dvije nule - nula.*

Kod pravila za oduzimanje negativnih brojeva Brahmagupta govori o *manjim* i *većim* negativnim brojevima misleći pri tome na njihove apsolutne vrijednosti.

Indijski matematičar Bhaskara (12. vijek) negativan broj označava tako da iznad njega stavlja tačku. On je dao pravila za množenje i dijeljenje negativnih brojeva:

> *Proizvod dva imetka ili dva duga je imetak, proizvod imetka i duga je dug, a tako isto je i u dijeljenju.*

Proširujući ova pravila i na kvadratne korijene, on ističe njihovu dvoznačnost:

> "*Imetak ima dva korijena*:
> *jedan imetak, a drugi dug*."

Ako se izuzme Diofant, može se reći da Grci nisu znali za negativne brojeve. To je jedan od glavnih razloga što Arapi, koji su najvećim dijelom slijedili grčku matematiku i grčko učenje o brojevima, nisu prihvatali računanje sa pozitivnim i negativnim brojevima. Spominjanje negativnih veličina u arapskoj matematičkoj literaturi se nalazi jedino kod Abu-al-Vafa (10. v.), koji je do tih saznanja najverovatnije došao proučavajući indijske matematičke zapise.

Ovo je jedan od razloga što Arapi učenje o negativnim brojevima nisu donijeli u Evropu kao što su to učinili sa mnogim saznanjima grčke matematike. Trebalo je čekati da u srednjem vijeku dođe do razvoja trgovine i pomorstva kao i do otkrivanja novih puteva na Istok pa da u Evropu dospije učenje o negativnim brojevima.

Pojava negativnih brojeva u Evropi

U 12. i 13. vijeku u Italiji nastaju trgovački gradovi (Đenova, Venecija, Firenca, Piza i dr.). Dolazi do putovanja na Istok radi trgovine. Istovremeno je prisutna i želja da se upozna nauka i umjetnost azijskih civilizacija.

Jedan od prvih italijanskih trgovaca koji je pokazao interes za matematiku bio je Fibonači. Putovao je po sredozemnim zemljama gdje je bio pod uticajem vizantijskog i arapskog matematičkog nasljeđa. Po povratku sa tih putovanja objavljuje matematičke radove. Zahvaljujući njemu u Evropi, prva polovina 13. vijeka, nailazimo na prve značajnije tragove o negativnim brojevima. Fibonači u *Knjizi o abaku* rješava sistem jednačina i zaključuje da je on nerješiv jer je jedno rješenje *dug* (negativni broj).

Kako se upotreba negativnih brojeva u konkretnim računskim problemima nije mogla izbjeći to oni bivaju sve više prisutni u djelima evropskih matematičara. Sve smjelije se operiše sa negativnim brojevima. Javljaju se matematičari koji smatraju da su negativni i pozitivni brojevi ravnopravni. Francuski matematičar Šike (oko 1500. godine) broj 20 rastavlja na dva sabirka:

$$27\frac{3}{11} \quad \text{i} \quad -7\frac{3}{11}$$

naglašavajući da neki matematičari ovaj drugi broj smatraju nemogućim. Štifel (prva polovina 16. vijeka) negativne brojeve naziva *apsurdnim* i ističe da su oni manji od nule, te da se nula nalazi desno od njih.

Drugačiji pristup negativnim brojevima imao je čuveni francuski matematičar Vijet (16. vijek); on ih ne priznaje za rješenja jednačina.

Do afirmacije negativnih brojeva dolazi tek u 17. vijeku zahvaljujući radovima dvojice matematičara: Žirara i Dekarta. Oni su uveli slovo kao oznaku za broj. To je omogućilo lakše usvajanje pojma negativnog broja. Dekart smješta negativne brojeve na brojevnu osu lijevo od nule. Na taj način ih tretira ravnopravno sa pozitivnim brojevima. Do potpune ravnopravnosti negativnih i pozitivnih brojeva dolazi tek početkom 19. vijeka.

Njutn interpretira pozitivne i negativne brojeve kao veličine koje su suprotno orijentisane. Jednu orijentaciju naziva pozitivnom, a drugu negativnom. On, u skladu sa tim, *imetak* smatra pozitivnim, a *dug* negativnim brojem i sugeriše da se pozitivne veličine označavaju znakom +, a da se ispred negativnih stavlja znak –.

Zajedno sa nastankom negativnih brojeva mijenjao se i njihov naziv. Za jedne su bili *besmisleni, oduzimajući, fiktivni, apsurdni brojevi,* a za druge *dug, manjak,* da bi najzad dobili današnje ime *negativni brojevi*. Nazivi *pozitivan* i *negativan* po prvi put se pojavljuju u radu jednog Vijetovog učenika. Za ove dvije vrste brojeva upotrebljavale su se i riječi *primitiv* i *afirmativ*. Tek u 19. vijeku termini *pozitivan* i *negativan broj* su postali opšteprihvaćeni.

Za matematičara Žirara (17. vijek) negativni korijeni jednačine se mogu predstaviti "geometrijski kao kretanje natrag".

Zapisivanje negativnih brojeva

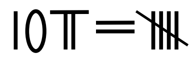
Zapisivanja negativnih brojeva kroz istoriju bila su različita. Mnogi matematičari su ih prikazivali kao brojevne izraze. Na primjer, Diofant negativan broj -3 predstavlja u obliku razlike 5-8.

Kinezi su pozitivne brojeve označavali crvenom bojom, a negativne crnom. Matematičar Li (13. vijek) negativne brojeve zapisuje tako što precrtava posljednje znakove broja.

❐ **Primjer.**

Broj 10 724 Li je zapisivao

a broj –10 724:

 ❐

Kod Indijaca su pronađeni zapisi u kojima su negativni brojevi pisani tako što je iznad njegove cifre stavljana tačka. Znaci + i − ne dovode se u vezu sa negativnim brojevima prije 15. vijeka. Tek sa uvođenjem slova kao simbola za broj stvara se pogodno tlo za današnji način zapisivanja brojeva. Tome je svakako doprinijela interpretacija pozitivnih brojeva kao imetka, a negativnih kao duga.

6. IRACIONALNI BROJEVI

Dugo je trebalo da se *iracionalni brojevi* nastane u zgradu matematike. Za grčke matematičare $\sqrt{2}$ nije bio broj, nego geometrijski omjer dijagonale i stranice kvadrata. Takođe, iracionalni broj, koji danas označavamo sa π, nije bio ništa drugo nego omjer obima kruga i njegovog prečnika. U grčkoj matematici broj je značio prirodan broj iako su Grci u praksi računali i sa razlomcima i sa približnim vrijednostima korijena. Takav odnos prema iracionalnim brojevima bio je prisutan i u srednjem vijeku. Tek mnogo kasnije počeli su se omjeri nesamjerljivih duži shvatati kao brojevi koji su "približno" poznati.

Egipatski matematičari su se veoma rano sreli sa iracionalnim brojem; prilikom rješavanja praktičnih geometrijskih problema nailazili su, pored ostalog, i na potrebu da izračunavaju površinu kruga. Umjesto iracionalnih koristili su racionalne brojeve kao njihove približne vrijednosti.

Vavilonski matematičari, kao i egipatski, se nisu posebno interesovali za prirodu iracionalnog broja. Bilo im je važno da što tačnije riješe praktične zadatke. Pri tome su nailazili na problem kako da odrede približnu vrijednost iracionalnih brojeva. Da bi pojednostavili računanje sastavljali su tablice množenja, recipročnih vrijednosti, kvadrata te kvadratnih i kubnih korijena. Za određivanje približnih vrijednosti kvadratnog korijena pronašli su postupak (algoritam) koji se zasnivao na primjeni formule

$$\sqrt{a^2 \pm b} \approx a \pm \frac{b}{2a}$$

❒ **Primjer.**

$$\sqrt{1700} = \sqrt{1600 + 100} = \sqrt{40^2 + 100} \approx 40 + \frac{100}{2 \cdot 40} = 41\frac{1}{4}.$$

❒

Bilo bi pogrešno iz naprijed izloženog zaključiti da su Egipćani i Vavilonci znali za pojam iracionalnog broja. Oni su uslijed nepoznavanja iracionalnih brojeva nailazili na teškoće pri rješavanju problema iz prakse. Istovremeno, iskustva iz dotadašnje prakse upućivala su ih da se i novi slični problemi mogu riješiti pomoću racionalnih brojeva čija je vrijednost približno jednaka vrijednosti konkretnog iracionalnog broja.

Egipćani su došli do saznanja da je površina kruga približno jednaka površini kvadrata čija je stranica $\frac{8}{9}$ *prečnika tog kruga:* $P = \left(\frac{8}{9} \cdot 2r\right)^2$, *gdje je* r *poluprečnik kruga. Kako je površina kruga* $P = r^2\pi$ *to se iz ove dvije jednakosti dobije* $r^2\pi = \left(\frac{8}{9} \cdot 2r\right)^2$, *odnosno* $\pi \approx 3{,}16$.

Grci su brojeve interpretirali koristeći geometrijske veličine. Ako, na primjer, duž AB sadrži četiri puta duž CD, onda je odnos između duži AB i CD izražen brojem 4. Ako duž CD smatramo jedinicom, onda je dužina duži AB jednaka 4.

Arhimed za određivanje približne vrijednosti iracionalnog broja $\sqrt{3}$ koristi nejednakosti:

$$\frac{1351}{780} < \sqrt{3} < \frac{265}{133}$$

Na sličan način mogu se odrediti duži čiji je omjer izražen razlomkom. Na primjer, broj $\frac{3}{2}$ se može predstaviti pomoću duži čije se dužine odnose kao $3:2$. Ovakav način razmatranja naveo je grčke matematičare na pogrešan zaključak da se omjer bilo koje dvije duži može predstaviti razlomkom. Kasnije su otkrili da se omjer dužine dijagonale kvadrata i dužine njegove stranice ne može izraziti razlomkom ili, drugačije rečeno, dužina dijagonale kvadrata se ne može izmjeriti njenom stranicom.

U ovom slučaju omjer se ne izražava ne pomoću dva prirodna broja nego pomoću beskonačnog niza prirodnih brojeva, koji zapravo predstavljaju iracionalan broj.

Broj $\sqrt{2}$ je iracionalan broj koji se može predstaviti kao beskonačan razlomak:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

Uobičajeno je, naročito u nastavi matematike, da se iracionalni brojevi predstavljaju racionalnim brojevima čija je vrijednost približno jednaka vrijednosti tog iracionalnog broja.

Italijan Pjetro Kataldi (17. vijek) je broj $\sqrt{2}$ predstavio razlomkom:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$$

koji je zapisao $\sqrt{2}=1.\&\frac{1}{2}.\&\frac{1}{2}.\&\frac{1}{2}.\&\frac{1}{2}.$

Iz Kataldijevog prikaza broja $\sqrt{2}$ može se odrediti njegova približna vrijednost:

$$\sqrt{2}\approx 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{4+1}{2}}=1+\frac{2}{5}=1{,}4$$

Grci su se u rješavanju praktičnih zadataka rano susreli sa iracionalnim brojevima. Interesantno je da su za njihovo otkriće najviše zaslužni upravo Grci, odnosno, tačnije rečeno, pitagorejci. Oni su naslutili prirodu iracionalnog broja rješavanjem zadataka iz teorije muzike kao i prilikom određivanja omjera stranice i dijagonale kvadrata. Zapazili su da se omjer dužine dijagonale i stranice kvadrata ne može izraziti prirodnim brojevima; ove duži su nazivali *nemjerljivim*. Na taj način su došli do omjera $\sqrt{2}:1$, dnosno broja $\sqrt{2}$.

U Vavilonu je pronađena glinena pločica na kojoj je nacrtan kvadrat sa dijagonalama i napisana približna vrijednost broja $\sqrt{2}$ u šezdesetičnom sistemu (sl. 27).

Sl. 27.

Radovi grčkih matematičara Eudoksa (?408-?355) i Euklida (?365-?300) su bili od velikog značaja za izgradnju teorije iracionalnih brojeva. Euklid je u *Elementima* izložio sva dotadašnja saznanja o iracionalnim brojevima.

Kineski i indijski matematičari su nailazili na probleme vezane za iracionalne brojeve rješavajući praktične i teorijske zadatke. I oni su tragali za algoritmima pomoću kojih će dobiti što tačnije približne vrijednosti iracionalnih brojeva; Indijci su, na primjer, određivali vrijednost broja π pomoću beskonačnih brojevnih redova.

Arapski matematičari su se susretali sa iracionalnim brojevima rješavajući mnogobrojne probleme iz trigonometrije i geometrije. Takođe, upoznajući se sa Euklidovim *Elementima*, prihvatili su Eudoksovu teoriju razmjera kao interpretaciju iracionalnosti dužima i pravougaonicima. U peroidu od 10. do 12. vijeka mnogi arapski matematičari su dali doprinos daljem razvoju pojma iracionalnog broja. Spomenimo samo neke od njih: al-Biruni, al-Nairizi, Sabit ibn Kora i Omar Hajam.

Evropski matematičari srednjeg vijeka iracionalne brojeve nazivaju *zamišljenim, nijemim* ili *neizrazivim brojevima* želeći i na ovaj način istaći razliku između njih i racionalnih brojeva. U 12. vijeku za ove brojeve se koristi naziv *numeri irationales*. Štifel 1544. godine u svom djelu *Arithmetica integra* upotrebljava izraz *iracionalni brojevi*, ali i on tvrdi da to nisu pravi brojevi.

U 15. vijeku za iracionalne brojeve se zanima italijanski matematičar Luka Pačoli. Dekart je prvi ispravno shvatio suštinu iracionalnog broja. On ističe da je broj "*sve što se odnosi prema jedinici kao jedna duž prema drugoj*". Interesantno da i on ove brojeve naziva *neizrazivim*. Kasnije će engleski matematičar i fizičar Njutn (1707) razraditi Dekartovu definiciju iracionalnog broja.

Bilo je matematičara čiji se pristup pojmu iracionalnog broja razlikovao od drugih. Tako, na primjer, francuski matematičar

Dalamber (18. vijek) ističe da se $\sqrt{2}$ može interpretirati samo geometrijski.

Savremena teorija iracionalnih brojeva dobija svoju konačnu formu tek u 19. vijeku u djelima Vajerštrasa, Kantora i Dedekinda.

7. KORJENOVANJE

Egipćani su znali za kvadratni korijen. Imali su i posebnu oznaku za njega. U jednom papirusu, koji potiče iz starog Egipta, nalazi se sistem jednačina gdje se broj $\sqrt{\frac{25}{16}}$ javlja kao rješenje. Ovo nam nagovještava da su Egipćani imali predstavu o kvadratnom korjenu te je veoma vjerovatno da su to svoje znanje primenjivali i na slučajeve kad podkorjena veličina nije kvadrat cijelog broja.

Vavilonci su pronašli postupak za određivanje vrijednosti kvadratnog korijena. Posjedovali su tablice za kvadratni i kubni korijen napisane u šezdesetičnom brojevnom sistemu. Za izračunavanje približne vrijednosti kvadratnog korijena koristili su određene algoritme. Jedan od njih se zasnivao na već navedenoj formuli

$$\sqrt{a^2 \pm b} \approx a \pm \frac{b}{2a},$$

koja je bila poznata grčkom matematičaru Heronu (oko 100. godine nove ere) kao i indijskim matematičarima Ariabhati (1. vijek nove ere) i Brahmagupti (7. vijek).

❒ **Primjer.**

$$\sqrt{71} = \sqrt{64+7} \approx 8 + \frac{7}{2 \cdot 8} = 8{,}4375,$$

$$\sqrt{95} = \sqrt{100-5} \approx 10 - \frac{5}{2 \cdot 10} = 9{,}75. \quad ❒$$

Vavilonci su za izračunavanje kvadratnog korijena koristili metodu iteracije. Na Jelskom univerzitetu se čuvaju glinene pločice sa klinastim pismom iz 17. vijeka p.n.e. na kojima je izložen postupak određivanja dijagonale kvadrata stranice 30.

Arapskom matematičaru al-Karadžiju (10/11. vijek) pripisuje se sljedeća metoda za određivanje kvadratnog korijena:

$$\sqrt{N} = a + \frac{N - a^2}{2a + 1}, \quad a^2 < N < (a+1)^2 .$$

• **Primjer.**

$$\sqrt{71} = \sqrt{64 + 7} = 8 + \frac{71 - 64}{2 \cdot 8 + 1} = 8{,}412 . \bullet$$

Kvadratni korijeni nekih prostih brojeva bili su poznati i Indijcima. Oni su, već u 8. vijeku, prilikom gradnji hramova primjenjivali specijalne slučajeve Pitagorine teoreme. Takođe, koristili su približne vrijednosti:

$$\sqrt{2} \approx \frac{17}{12}, \qquad \sqrt{2} \approx \frac{577}{408} .$$

U 5. vijeku indijski matematičar Ariabhata II je izgradio metodu izračunavanja kvadratnog korijena dijeleći podkorjenu veličinu na grupe od po dvije cifre.

Arapski matematičari su oko 850. godine ovu metodu usavršili sa ciljem da dobiju tačnije približne vrijednosti, a u 12. vijeku izračunavaju i korijene višeg stepena.

Sve do pred kraj 15. vijeka bilo je različitih naziva za kvadratni korijen kao i za njegovo obilježavanje. Nikomah za kvadratni korijen upotrebljava riječ *polazni broj*. U Indiji se koristi riječ *karana*; oznaka *ka* 3 znači $\sqrt{3}$.

> Dubrovački matematičar Marin Getaldić (16. vijek) pored simbola $\sqrt{\ }$ za korijen koristi i oznaku L.V. što dolazi od latinskih riječi *latus universale.*

U latinskom jeziku *radix* je naziv za *korijen* te Fibonači za označavanje korijena koristi veliko početno slovo ove riječi: ℞ . Rudolf (1505) upotrebljava $\sqrt{\ }$ kao znak za korijen što je ustvari transformisano latinsko slovo r. On uvodi pravilo za udvajanje korijena prema kojem bi se današnja oznaka $\sqrt[9]{4}$ pisala $\sqrt{}\sqrt{}^{3}4$. Ovakav način označavanja korijena koristi i matematičar Stevin.

Oznake za korijen su vremenom pretrpjele određene izmjene, te su postajale funkcionalnije. Tako, na primjer, Žirar je $\sqrt[3]{4}$ označavao $\sqrt[3]{\ }4$ što se i danas može naći u nekim matematičkim knjigama.

Današnju oznaku za korijen uveo je Dekart, koja se najzad ustalila zahvaljujući Njutnu.

V. 2-	Dekart	$\sqrt{2}$
V. ℘	Stevin	$\sqrt[4]{\ }$
VqqA	Outred	$\sqrt{A}$
℞ 38	Fibonači	$\sqrt{38}$
℞℞7	Pačoli	$\sqrt[4]{7}$
℞ cuba de 7	Leonardo da Vinči	$\sqrt[3]{7}$
℞^{3} 11	Šike	$\sqrt[3]{11}$
L.V. A	Getaldić	$\sqrt{A}$

Operacije sa korijenima, mada u primitivnijem obliku, nlazimo već kod Fibonačija. U 15. i 16. vijeku dolazi do daljeg usavršavanja operacija sa korijenima. Za to su najzaslužniji matematičari Rize, Štifel i Rudolf.

8. DJELJIVOST

Prva sistematizovana saznanja o djeljivosti brojeva dao je Euklid u sedmoj knjizi *Elemenata* gdje, pored ostalog, ispituje djeljivost i svojstva prostih brojeva, kvadrata, kubova i uopšte stepena brojeva.

Izlaganja u sedmoj knjizi *Elemenata* započinje definicijama:

(i) *Paran je onaj broj koji je djeljiv na dva jednaka dijela.*

(ii) *Neparan broj je onaj koji nije djeljiv na dva jednaka dijela.*

(iii) *Prost broj je onaj koji se mjeri samo jedinicom.*

(iv) *Složen broj je onaj koji se mjeri nekim brojem.*

(v) *Međusobno prosti brojevi su oni koji imaju kao zajedničku mjeru samo jedinicu.*

Euklid među parnim brojevima razlikuje *parno-parne* i *parno-neparne* brojeve. Govoreći o djeljivosti broja a brojem b on zapravo pokazuje koliko se puta dužina b, kao jedinica mjere, sadrži u dužini a.

Brojeve interpretira pomoću geometrijskih objekata. Rezultat množenja dva broja Euklid naziva *površinskim*, a njegove činioce *stranicama*; rezultat množenja tri broja je *zapreminski* broj, a njegovi činioci su *ivice*. Izlaganje stavova iz teorije brojeva je zasnovano na primjeni geometrijskih metoda te se ovako geometrizovana teorija brojeva često naziva Euklidova *geometrijska teoriji brojeva*.

Ne samo u definicijama nego i u tvrdnjama je prisutan geometrijski način mišljenja. Na to pored ostalog ukazuje i riječ "*mjeriti*". Ovakav pristup je uticao na dalji razvoj teorije brojeva.

Današnja teorija brojeva se oslobodila geometrijske interpretacije pa ipak se još uvijek može naići na neke od pojmova prethodnog perioda kao što je, na primjer, *najveća zajednička mjera*.

Među tvrdnjama koje je Euklid dokazao ne može se izdvojiti najznačajnija, ali svakako treba istaći *Euklidov algoritam* (postupak za određivanje najvećeg zajedničkog djelioca).

❐ **Primjer.**

Odrediti najveći zajednički djelilac brojeva 270 i 57.

Obavimo sljedeći niz dijeljenja:

27:57=4 ; (42)	$270=57\cdot 4+42$
57:42=1 ; (15)	$57=42\cdot 1+15$
42:15=2 ; (12)	$42=15\cdot 2+12$
15:12=1 ; (3)	$15=12\cdot 1+3$
12:4=3.	$12=3\cdot 4$

Kako je u posljednjem dijeljenju 3 sadržan u 12, to je sadržan i u 15, jer je $15=12\cdot 1+3$. Odavde dalje slijedi da je 3, redom, sadržan u 42, 57 i 270. Dakle, najveći zajednički djelilac brojeva 270 i 57 je 3. ❐

I ovdje je Euklid dosljedan svom načinu izlaganja, ne riješava nijedan praktičan zadatak kao što je to bilo uobičajeno u Egiptu.

Grčkom matematičaru Teonu iz Smirne (oko 125. godine nove ere) se pripisuju dokazi sljedećih stavova o djeljivosti brojeva:

(i) Ako je n *prirodan broj, onda je* n^2 *ili* n^2-1 *djeljiv sa* 3, *sa* 4 *ili i sa* 3 *i sa* 4.

(ii) Ako je kvadrat prirodnog broja n *djeljiv sa* 3, *a nije djeljiv sa* 4, *onda je* n^2-1 *djeljiv sa* 4.

Nikomah je u djelu *Uvod u aritmetiku* sistematski izložio sva ona učenja iz teorije brojeva koja su do tada u grčkoj matematici bila poznata.

Grci su za teoriju brojeva koristili naziv *aritmetika*, dok su vještinu računanja nazivali *logistika*. Od 16. vijeka logistika i aritmetika su objedinjeni u aritmetiku.

Egipćani su znali odrediti da li je neki broj djeljiv sa 2, a Grci su poznavali pravilo djeljivosti brojeva sa 9. Interesantno je da se do kriterija djeljivosti sa 3 došlo tek u 13. vijeku. Arapi su ispitivali djeljivost brojeva sa 8, 7 i 11.

Arapski matematičar, fizičar, ljekar, filozof i astronom Abu Ali ibn Sina (980-1039) u svom enciklopedijskom djelu *Knjiga iscjeljenja* izlaže neke stavove o djeljivosti:

1. *Ako neki broj dijeljenjem sa* 9 *daje ostatak* 1 *ili* 8, *onda kvadrat tog broja podijeljen sa* 9 *daje ostatak* 1.
   Ako neki broj dijeljenjem sa 9 *daje ostatak* 2 *ili* 7, *onda kvadrat tog broja podijeljen sa* 9 *daje ostatak* 4.
   Ako neki broj dijeljenjem sa 9 *daje ostatak* 4 *ili* 5, *onda kvadrat tog broja podijeljenjen sa* 9 *daje ostatak* 7.
   Na kraju, ako neki broj dijeljenjem sa 9 *daje ostatak* 3, 6 *ili* 0, *onda kvadrat tog broja podijeljen sa* 9 *daje ostatak* 0.

2. *Ako broj dijeljenjem sa* 9 *daje ostatak* 1, 4 *ili* 7, *onda njegov kub podijeljen sa* 9 *daje ostatak* 1.
   Ako broj dijeljenjem sa 9 *daje ostatak* 2, 5 *ili* 8, *onda njegov kub podijeljen sa* 9 *daje ostatak* 8.
   I ako broj dijeljenjem sa 9 *daje ostatak* 3, 6 *ili* 0, *onda njegov kub podijeljen sa* 9 *daje ostatak* 0.

Hobi Johana Bernulija

Švajcarski matematičar Johan Bernuli (1667-1748) rastavljao je na proste činioce prirodne brojeve koji se zapisuju samo pomoću jedinicama. U Berlinskoj akademiji je objavio tablicu prostih djelitelja brojeva napisanih sa n jedinica, gdje je $n=1,2,3,...,31$:

$$
\begin{aligned}
111 &= 3 \cdot 37\\
1111 &= 11 \cdot 101\\
11111 &= 41 \cdot 271\\
111111 &= 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37\\
1111111 &= 239 \cdot 4649\\
11111111 &= 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Ona nije bila potpuna jer za neke brojeve nije uspio naći proste djelitelje; tri broja nije rastavio do prostih činilaca, dok je kod nekih brojeva pogriješio.

DRUGA GLAVA

A L G E B R A

1. U V O D

Riječ *algebra* potiče od riječi *al-džabr* koja se kod arapskog matematičara al-Horezmija nalazi u naslovu knjige *Hisab al-džabr val-mukabala* (*Učenje o svođenju i o dvostrukom oduzimanju*), koja je u Evropi postala popularna preko latinskog prevoda i dugo vremena je služila kao jedini priručnik algebre.

U istorijskom razvoju algebarskog načina izražavanja ističu se tri perioda. U prvom dominira usmeno izražavanje bez ikakvih simbola. Na ovom stepenu razvoja nalazili su se, na primer, Grci sve do 1. vijeka. Algebra ovog perioda naziva se *retoričkom.*

Pojava Diofantove *Aritmetike* (3. vijek) predstavlja značajan moment u daljem razvoju algebarske simbolike. Ovim djelom započinje period tzv. *sinkopatske algebre* u kojem se pojedini pojmovi i operacije označavaju skraćenicama. Diofant primjenjuje posebne skraćenice za nepoznate veličine, za stepene, razlomke i sl. Sinkopatska algebra je dugo egzistirala zajedno sa retoričkom. Tek u 15. vijeku javljaju se pokušaji da se nastavi sa onim što je započeo Diofant prije više od hiljadu godina. Uvode se posebni simboli za algebarske pojmove, operacije, relacije i sl.

Najviše zasluga za uvođenje savremene algebarske simbolike ima francuski matematičar Vijet. Algebra trećeg perioda naziva se *simbolička algebra.*

2. RAČUNSKE OPERACIJE

U najstarijim matematičkim rukopisim nailazimo na različite metode koje su primjenjivane pri računanju. Vidjeli smo da se u početku računalo na primitivan način uz upotrebu kamenčića, školjki ili prstiju, bez ikakvog zapisivanja brojeva i oznaka za računske operacije. Kasnije se kod prvih civilizacija pojavljuju specijalne tablice za računanje tzv. *abaci.*

Vavilonci nisu imali znak za sabiranje, jednostavno su brojeve koje treba sabrati pisali jedan do drugog. U Rajndovom papirusu nailazimo na znak za sabiranje: raskoračene noge u smjeru pisanja. Ako je kretanje bilo naznačeno u suprotnom smjeru od smjera pisanja, onda je to značilo oduzimanje. Slične pristupe u označavanju *sabiranja* i *oduzimanja* nailazimo i u drugim matematičkim rukopisima; koriste se određeni znaci ili riječi za označavanje pojedinih računskih operacija. Da bi se došlo do današnjeg načina pismenog računanja trebalo je da prođe više od sedamnaest vjekova.

U 15. vijeku bilo je poznato osam osnovnih računskih operacija među koje su pored uobičajenih ubrajani *udvajanje (duplikacija)* i *polovljenje.*

Množenje u sistemima koji nisu apsolutno pozicioni je dosta komplikovano. Navodimo primjer množenja brojeva zapisanih pomoću rimskih cifara. (Rimljanin koji je znao množiti bio je, u svoje vrijeme, matematički veoma obrazovan). Množenje se svodi na uzastopna sabiranja (radi lakšeg praćenja s desne strane je prikazan postupak u indijsko-arapskom dekadnom zapisu).

XLIII · XIII		43 · 13	
XLIII	(I puta)	43	(2^0 puta)
+ XLIII		+ 43	
LXXXVI	(II puta)	86	(2^1 puta)
+ LXXXVI		+ 86	
CLXXII	(IV puta)	172	(2^2 puta)
+ CLXXII		+172	
CCCXLIV	(VIII puta)	344	(2^3 puta)
CLXXII	(IV puta)	172	(2^2 puta)
+ XVIII	(I puta)	+ 43	(2^0 puta)
DLIX	(XIII puta)	559	(13 puta)

Današnji način množenja vodi porijeklo iz Indije. U Evropu su ga prenijeli Arapi. Najveći problem je bio pronaći jednostavan način zapisivanja brojeva, odnosno računskih operacija množenja i dijeljenja. To je bio jedan od razloga što su matematičari pribjegavali sastavljanju raznih tablica. Tako je, na primjer, al-Kaši (14/15. vijek) u djelu *Ključ aritmetike* izložio tablicu množenja brojeva od 1×1 do 59×59.

Do mnogih tačnih rezultata se dolazilo na neobičan način. Na primjer, al-Kaši množeći $153\ \frac{1}{2}$ sa $16\frac{1}{4}$ zamjenjuje $\frac{1}{2}$ sa 5, a $\frac{1}{4}$ sa 25 što zapravo možemo interpretirati kao decimalni zapis ovih brojeva: $\frac{1}{2} = 0{,}5$ i $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

U prošlom vijeku u Rusiji je korišćena metoda množenja slična metodi *udvajanja,* koju su upotrebljavali Egipćani.

48 X 26	
48	26
24	52
12	104
6	208
3	416
1	832

Lijevi broj dijelimo, a desni množimo sa 2. Rezultat pišemo kako je pokazano u tabeli. Ako se dijeli neparan broj, onda se piše cijeli dio od traženog količnika. Postupak ponavljamo dok u lijevom stupcu ne dobijemo 1.

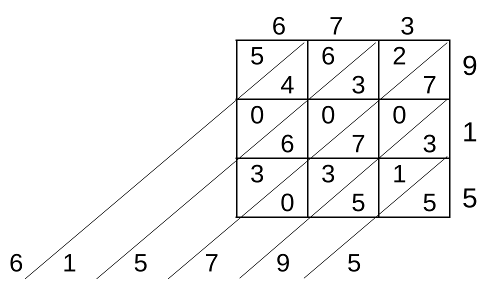
48 X 26	
48	~~26~~
24	~~52~~
12	~~104~~
6	~~208~~
3	416
1	832
	1248

Zatim se u desnoj koloni precrtaju svi brojevi čiji su parovi u lijevoj koloni parni. Rezultat proizvoda je zbir neprecrtanih brojeva u desnoj koloni.

Primjer.

Luka Pačoli je 1494. godine u jednom svom djelu naveo način množenja koji su koristili stari Indijci.

673 X 915



Ova metoda je poslužila Neperu kao ideja za izradu proste mehaničke računske mašine za množenje poznate pod imenom *Neperovi štapići.*

Tek od druge polovine 19. vijeka u četiri osnovne računske operacije spadaju: sabiranje, oduzimanje, množenje i dijeljenje.

Fibonači je za osnovne računske operacije smatrao sabiranje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, operacije sa razlomcima, proporcije i korjenovanje.

Na simbole matematičkih operacija čekalo se dugo. U 15. i 16. vijeku kao znak za sabiranje koristi se slovo **p** (početno slovo riječi ***plus***). U nekim rukopisima se kao oznaka za sabiranje upotrebljava latinska riječ **et** (veznik ***i***). Za oduzimanje se koristi slovo **m**, početno slovo latinske riječi ***minus***. Znak za sabiranje + i oduzimanje **–** prvo se nalaze kod Fibonačija odakle su prenešeni u Njemačku gdje se pojavljuju u rukopisima, na primjer, *Drezdenska zbirka* (1481). Ovi simboli su prvi put štampani u *Računici* Jana Vidmana (1489). Ovo nikako ne znači da se od navedenih godina oni koriste isključivo kao znaci za sabiranje i oduzimanje. Tako, na primjer, u 17. vijeku kod nekih matematičara nailazimo i na druge oznake.

Kako se površina pravougaonika određuje množenjem dva broja to se u nekim rukopisima slika pravougaonika koristila kao znak za množenje. Na primjer, proizvod brojeva 53 i 13 je zapisivan 53 13. Njemački matematičat Štifel kao znak za množenje koristi slovo M, prvo slovo glagola ***Multiplicare*** (množiti) i piše 4M6=24. Znak x kao znak za množenje prvi je uveo Outred u djelu *Ključ matematike,* objavljenom 1631. godine u Londonu. Ovaj znak je dobio ime *krst svetog Andreja.* Tačka • kao znak za množenje potiče od Lajbnica (1698). On u jednom pismu Johanu Bernuliju piše:

"Ne sviđa mi se x kao oznaka za množenje. Radije koristim tačku kao znak za množenje,

> što je u skladu sa simbolom **:** koji koristim za dijeljenje."

Od Lajbnicova vremena za množenje brojeva a i b ne koristi se nikakav znak nego se piše samo ab, što se i danas čini.

Zvjezdicu * kao znak za množenje uveo je Johan Ran 1659. godine.

U nekim knjigama namijenjenim čitaocima skromnijeg matematičkog znanja izostavlja se matematička simbolika nego se koriste riječi. Na primjer, 4 *puta* 8 *čini* 32. Ovo nalazimo u knjigama Zapadne Evrope, Rusije i kod nas.

Znak dijeljenja **:** prvi put se pojavljuje 1633. godine u Džonsonovoj *Aritmetici* i služi za označavanje razlomaka. On ovaj znak koristi umjesto razlomačke crte. Označavanje dijeljenja pomoću razlomačke crte je veoma staro; kod matematičara na zapadu javlja se tek kod Fibonačija (1228).

Johan Ran je prvi koristio oznaku ÷ kao znak za dijeljenje (1659).

Devetična proba

Za provjeru ispravnosti sabiranja i množenja korišćeni su razni postupci. Oni su se uglavnom zasnivali na poznatim činjenicama kao što su:

> *Dijeljenjem proizvoljnog broja sa* 9 *dobije se isti ostatak kao kad se zbir cifara tog broja podijeli sa* 9. (Na primjer, pri dijeljenju broja 1387 sa 9 dobije se ostatak 1. Zbir cifara broja 1387 je 19 (=1+3+8+7) i dijeljenjem 19 sa 9 ostatak je 1.)
>
> *Dijeljenjem zbira brojeva proizvoljnim brojem dobije se ostatak koji je jednak zbiru ostataka pri dijeljenju svakog od sabiraka tim istim brojem.*

Ovo svojstvo je korišćeno za provjeru ispravnosti sabiranja. Nalazimo ga kod indijskih i arapskih matematičara, a kasnije i kod Fibonačija.

Primjer.

Provjerimo tačnost sabiranja:

$$\begin{array}{r} 23 \\ +\ 85 \\ 115 \\ \hline 223 \end{array}$$

Dijeljenjem 23 sa 7 dobije se ostatak 2
Dijeljenjem 85 sa 7 dobije se ostatak 1 (2+1+3=)
Dijeljenjem 115 sa 7 dobije se ostatak 3

Dijeljenjem 223 sa 7 dobije se ostatak 6

Primjer.

Provjerimo tačnost sabiranja:

$$\begin{array}{rccc} & 2 & 3 & 5 \\ + & 1 & 2 & 8 \\ & 3 & 5 & 1 \\ \hline & 7 & 1 & 4 \end{array}$$

Dijeljenjem 235 sa 8 dobije se ostatak 3
Dijeljenjem 128 sa 8 dobije se ostatak 0
Dijeljenjem 351 sa 8 dobije se ostatak 7

Dijeljenjem 714 sa 8 dobije se ostatak 2

Dijeljenjem 10 (=3+0+7) sa 8 dobije se isti ostatak 2 kao i pri dijeljenju 714 sa 8.

Ovaj postupak se može skraćeno pisati:

$$
\begin{array}{r|l}
2\;\;3\;\;5 & 3 \\
+1\;\;2\;\;8 & 0 \\
3\;\;5\;\;1 & 7 \\ \cline{1-1} \cline{2-2}
7\;\;1\;\;4 & 2
\end{array}
$$

Jedna od metoda provjeravanja tačnosti obavljenog množenja je tzv. *devetična proba*. Nalazimo je kod al-Horezmija, Fibonačija, Rize i drugih. Objasnićemo je na sljedećem primjeru.

Primjer.

Devetična proba proizvoda 347×267.

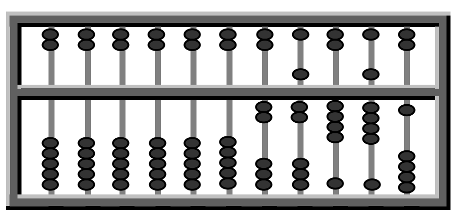
$\begin{array}{rrrrr\|rr} & & 3 & 4 & 7 & & 5 \\ & \times & 2 & 6 & 7 & \times & 6 \\ \hline & 2 & 4 & 2 & 9 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 2 & & & \\ 6 & 9 & 4 & & & & \\ \hline 9 & 2 & 6 & 4 & 9 & & 3. \end{array}$	Zbir cifara broja 347 je 14. Podijelimo 14 sa 9; ostatak je 5. Zbir cifara broja 267 je 15. Podijelimo 15 sa 9; ostatak je 6. Zbir cifara broja 30 (=5x6) je 3. Podijelimo 3 sa 9; ostatak je 3. Zbir cifara broja 92649 je 30. Podijelimo 30 sa 9; ostatak je 3.

Abakus

Prva računaljka, koju je upotrebljavao čovjek bili su prsti na rukama. Pomoću njih je mogao sabirati, oduzimati i množiti. U predstavljanju brojeva pomoću prstiju na ruci stari narodi su pokazali naročitu vještinu. U 15. i 16. vijeku trgovci iz Firence su bili čuveni po vještini računanja pomoću prstiju na rukama. Kada je čovjek prestao da zapisuje brojeve na drvetu ili kostima pomoću urezanih žljebova, prešao je na upotrebu kameničića ili školjki, koji su mogli biti brzo rastureni i ponovo upotrebljeni.

Prva računaljka poznata pod imenom *abakus* je bila poznata Vaviloncima, Kinezima, Japancima i Hindusima. Rimljani su je preuzeli od Etruraca, a Meksikanci i Peruanci su se služili abakusom kada su Španci došli u Ameriku. Abakus je uređaj za računanje pomoću koga se aritmetičke operacije izvode po žici ili šipki. Prvi abakusi su se sastojali iz glatke ploče posute pjeskom na kojoj se pisalo prstom ili tankim štapićem. Naziv abakus dolazi od hebrejske riječi *abaq* što znači prah.

U početku su na ploči bile nacrtane vodoravne crte na koje su stavljani kamenčići od pijeska nazivani *kalkule*. Po njima je računanje dobilo naziv kalkulus (*calculus*), odnosno kalkulacija. Današnji abakus potiče iz Kine, a usavršavali su ga Japanci i Korejanci. Sastavljen je iz okvira unutar kojeg se nalaze žice sa kuglicama. Kod Asteka (10/11. vijek) abakus se sastojao od zrna kukuruza nanizanih na konac koji je učvršćen na drveni ram. U ramu abakusa se nalazi serija vertikalnih šipki (jedno vrijeme su pravljene od bambusa) na kojima su bile nanizane drvene kuglice. Horizontalne šipke su dijelile ram na dva dijela, poznata kao gornja i donja "paluba" (sl. 28).



Sl. 28. Abakus

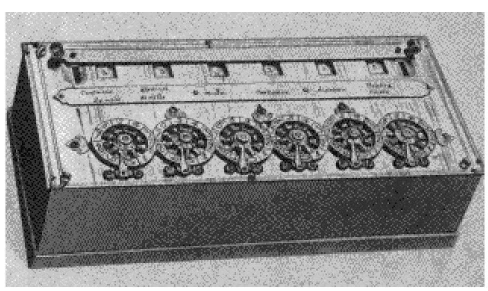
Abakus se postavljao na ravnu površinu i zatim su izvođene računske operacije pomjeranjem kuglica. Svaka vertikalna šipka gornje "palube" ima vrijednost 5, a donje "palube" vrijednost 1. Zadnja desna kolona je kolona jedinica, zatim slijedi kolona desetica, pa stotina itd. Šipke se smatraju prebrojanima kada kuglice pomjerimo prema prečki koja dijeli ove dvije "palube". Na slici 28 je zapisan broj 27491.

Problem pri računanju sa abakusom je u tome što se pri svakoj njegovoj upotrebi treba poništiti prijašnji dobiveni rezultati. Pristalice računanja sa abakusom nazivali su se *abakisti*. Protivnici abakista bili su *algoristi* koji su zagovarali pismeno računanje.

Abakus, koji se smatra pretečom današnjih kompjutera, je i danas u upotrebi u Aziji; koriste ga i kineski trgovci u Sjevernoj Americi. Takođe, pogodan je za obučavanje slijepe djece u nastavi matematike.

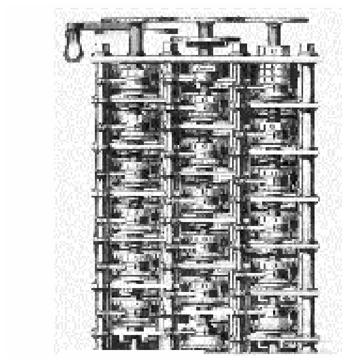
Prostiju polumehaničku računaljku sačinio je Neper (16/17. v.) poznatu pod nazivom *Neperovi štapići*. Pomoću nje mogli su se množiti višecifreni brojevi. Poslije njega engleski matematičar Outred konstruiše logaritamsko računalo (1622).

Prvu mehaničku računsku mašinu sačinio je 1642. godine Blez Paskal koji je tada imao 19 godina (sl. 29). Ona je mogla obavljati sabiranje i oduzimanje šestocifrenih brojeva. Lajbnic je 1673. godine konstruisao računsku mašinu koja je mogla sabirati, oduzimati, množiti i dijeliti. U 19. vijeku ruski matematičar Čebišev (1821-1894) je konstruisao računsku mašinu koja je takođe obavljala četiri računske operacije.



Sl. 29. Paskalova računska mašina

Čarls Bebidž, profesor matematike na univerzitetu u Kembridžu konstruisao je 1833. računsku mašinu koja je mogla izvoditi čitav niz računskih operacija po unaprijed predviđenom programu (sl. 30).



Sl. 30. Bebidžova računska mašina

Prototip prvog elektronskog računara sačinili su 1946. godine američki inženjeri Ekert i Mokli i matematičar mađarskog porijekla Nojman. Bio je težak 30 tona, sastavljen od oko 18000 elektronskih cijevi i rasprostirao se na 200 kvadratnih metara. Serijska proizvodnja računara je počela 1958. godine. Danas su u svakodnevnoj upotrebi džepni računari, kao i moderni superračunari sa nevjerovatnim sposobnostima.

Naš matematičar Mihailo Petrović (1868-1943), profesor matematike na Beogradskom univerzitetu, autor mnogih naučnih radova, poznat je i kao jedan od začetnika analognih računskih mašina. On je 1897. konstruisao hidrointegrator, analognu računsku mašinu, za koju je 1900. godine nagrađen na Svjetskoj izložbi u Parizu

2. RELACIJSKI SIMBOLI

Oznaka = za *jednako* pojavljuje se prvi put 1557. godine u *Algebri* Engleza Roberta Rekorda da bi konačno bila prihvaćena tek u 18. vijeku. Zanimljivo da je ovaj znak pronađen u biblioteci Univerziteta u Bolonji u jednom rukopisu koji je pisan između 1550. i 1568. godine.

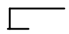
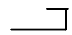
Mnogi matematičari su koristili oznake čije je značenje bilo samo njima poznato. Dekart je, na primjer, za *jednako* koristio znak $\propto$ koji je izveo iz slova æ kao početnih slova latinske riječi *jednak* (*aequalis*). Simbol = za *jednako* uslovljava formiranje znaka za *različito*; ako dva broja (izraza) nisu jednaka, onda je najnormalnije da se znak za jednakost = precrta da bi se naznačila netačnost te relacije. Time smo dobili simbol $\neq$ za *različito.*

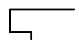
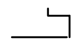
Simbol za *približno* $\doteq$ potiče od Antona Štajnhauzera (1875). Interesantno je da Farkaš Boljai, otac čuvenog mađarskog matematičara Janoša Boljaija, koristi ovaj znak za apsolutnu vrijednost.

Put do ovih oznaka je bio dug; nastanku svakog od ovih simbola često bi prethodile duge polemike, ubjeđivanja pa i prepirke. Često su pojedini izumitelji određenih simbola ili pak njihove pristalice bile primorane da ih brane i da druge uvjeravaju kako oni zapravo najbolje odražavaju operaciju ili relaciju koju predstavljaju. Tako je, na primjer, za znak jednakosti = rečeno da nije ništa tako "*jednako kao što su to dvije paralelne linije*".

Oznake za veće > i manje < uveo je Tomas Hariot (1631). Neki istoričari matematike smatraju da su ovi znaci nastali primenom polumetafore na znak za relaciju jednakosti =, tako što je jedan njen kraj "pritisnut" i spojen sa jedne strane.

Prije toga da bi se označilo da je a veće od b pisalo se a3/b2. Ovdje su brojevi 3 i 2 trebali poslužiti kao orijentacija za čitanje napisane relacije (3 je veće od 2). Slično, a2/b3 znači: a je manje od b. Prije Hariotovih simbola upotrebljavane su različite i nefunkcionalne oznake kao na primjer:

 za veći;  za manji;

 ne veći;  ne manji.

Navedene oznake potiču od engleskog matematičara Outreda .

Simbole $\leq$, $\geq$ kao i neke njihove varijante ($\leqq$, $\geqq$, $\lesseqgtr$, $\gtreqless$) uvodi Pjer Buger (1734).

3. ZAGRADE

Kada su se matematički izrazi počeli zapisivati slovima, a ne samo riječima uočena je potreba da se oni grupišu. Danas se to radi pomoću zagrada. Njima su prethodili različiti simboli. Italijanski matematičar Bombeli u svojoj *Algebri* (1572) za zagrade koristi slovo $\lfloor$ kao početak današnje tzv. srednje (uglaste) zagrade, koju zatvara znakom $\rfloor$ izvedenim od znaka $\lfloor$. Iz ovih oznaka izvedeni su današnji simboli za uglaste zagrade.

Njutn stavlja vodoravnu crtu iznad izraza koji bi, prema današnjem načinu zapisivanja, trebao biti u zagradi.

Primjer.

Koristeći Njutnov način grupisanja izraza jednačina

$$\left(\left((a+2)\; a-4\right) a+9\right)\; a-1=0$$

bi se zapisivala

$$\overline{\overline{\overline{a+2}\ \mathrm{x}\ a-4}\ \mathrm{x}\ a+9}\ \mathrm{x}\ a-1=0\ .$$

Sličan način grupisanja koristi i Frans van Šauten (17. vijek); on izraz $B(D^2+BD)$ piše

$$B\ \text{in}\ \overline{D\ \text{quad.}+B\ \text{in}\ D}\ .$$

Neki matematičari su takođe koristili horizontalnu crtu, ali su je pisali ispod izraza. Šike je izraz $\sqrt{14+\sqrt{180}}$ pisao

$$\text{℞}^2\underline{.14.\overline{\text{P.}}\ \text{℞}^2.180.}\ .$$

Matematičari Outred (1631) i Hariot (1631) su za grupisanje koristili tačke te su, na primjer, izraz

$$\sqrt{a+b}\quad \text{pisali}\quad V:a+b:\ .$$

Ovi znaci nisu bili prikladni te je trebalo iznalaziti nove funkcionalnije. Ta nastojanja su dovela do današnjih simbola.

Okrugle (male) zagrade $(\ )$ koristili su u 16. vijeku Štifel, Tartalja i drugi; velike zagrade $\{\ \}$ upotrebljava Vijet (1593), a uglaste (srednje) $[\ ]$ Bombeli i Žirar (1629). Vijet je prvi počeo da koristi različite zagrade.

4. SIMBOLIČKA ALGEBRA

U starom vijeku matematički problemi iskazivani su riječima, kratko, te se na isti način riječima i rješavaju. U algebri se ne koriste slova niti neki drugi znaci za računske operacije i relacije.

Primjer.

Evo kako glasi jedan zadatak iz Rajndovog papirusa:

Broj i njegova sedmina sabrani daju devetnaest. Koji je to broj? Pretpostavimo da je to broj sedam. Tada jedan i sedam je osam, pa koliko puta po osam čine devetnaest, toliko puta se mora uzeti sedam da se dobije traženi broj. I kako je dva puta osam jednako 16*, četvrtina od* 8 *je* 2*; osmina od* 8 *je* 1*, ukupno* 19*. To je traženi broj* $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ (pri tome se umjesto $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ piše $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$).

Cijeli zadatak sa rješenjem se objašnjava riječima, *retorički*. Sve ovo izgleda komplikovano i na momente nejasno.

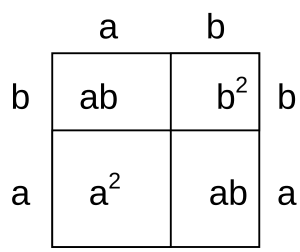
Ovakav način zapisivanja matematičkih zadataka bio je nepodesan, rješenja su bila duga; neke riječi su se u samom tekstu pojavljivale po nekoliko puta. Da bi se to izbjeglo matematičari počinju da izostavljaju pojedina slova i uvode skraćenice. Na taj

Diofantove skraćenice
(sinkope)

X	ζ	X^{-1}	ζ^{χ}
X^2	Δ^Y	X^{-2}	$\Delta^{Y\chi}$
X^3	K^Y	X^{-3}	$K^{Y\chi}$
X^4	$\Delta^Y\Delta$	X^{-4}	$\Delta^{Y\chi}$
X^5	ΔK^Y	X^{-5}	$\Delta K^{Y\chi}$
X^6	K^YK	X^{-6}	K^YK^{χ}

način pojedine rečenice se stežu na kraći oblik. Grčki matematičar Diofant je bio prvi koji primjenjuje skraćivanje, te na primjer x^3 piše K^Y gdje prva dva slova označavaju *kub* (od grčke riječi kubos), a x^2 označava Δ^Y što zapravo predstavlja prva dva slova od grčke riječi *dinamis* (sila, stepen). Ove skraćenice nisu prihvatili drugi grčki matematičari tako da je Diofant ostao usamljen u svom nastojanju uvođenja skraćenog načina zapisivanja algebarskih veličina.

Već smo istakli da Grci nisu poznavali realne brojeve. Probleme su rješavali pomoću geometrijske algebre. Kvadrat zbira $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ su interpretirali kao površinu kvadrata (sl. 31). Izrazi oblika a^3, a^2b, abc su posmatrani kao zapremine tijela.



Sl. 31.

Diofant stavlja oznake jednu do druge bez posebnog znaka za sabiranje . Tako, na primjer, izraz

$$x^3+13x^2+5x \quad \text{piše} \quad K^Y\alpha\Delta^Y\iota\gamma\varsigma\varepsilon,$$

gdje prva dva slova označavaju x^3 treće slovo (α) je grčki znak za 1, četvrto i peto slovo označavaju kvadrat, šesto i sedmo slovo ($\iota\gamma$) označavaju 13, znak ς predstavlja nepoznatu , a ε je 5.

Kao kod Arapa tako i kod prvih evropskih algebrista nije bilo slovne simbolike. Formule su iskazivane riječima. Algebarska simbolika se počinje razvijati tek krajem 15. vijeka. Put do savremene simbolike bio je dug. Tako, na primjer, Štifel umjesto A^3 piše AAA ; Englez Hariot upotrebljava zapis aaaa za a^4. Slično radi i Outred koristeći pri tome slova za brojeve:

A^2	Aq	q je oznaka za broj 2; uzeta kao početno slovo latinske riječi *quadratum.*
A^3	Ac	c je oznaka za broj 3; uzeta kao početno slovo latinske riječi *cubus.*
A^5	Aqc	Oznake za 4 i 5 nastaju kombinovanjem ovih slova.
A^4	Aqq	

Francuski matematičar Vijet izraz

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

piše:

a cubus + b in a quadr 3 + a in b quadr 3 + b cubo .

Belgijski matematičar Simon Stevin umjesto današnjeg zapisa

$$4x^6z^2:13xy^5z^7$$

piše:

4⑥Msec③ter②D13①sec⑤ter⑦,

gdje je simbolom ⑥ predstavljeno x^6, dok se y javlja u istom obliku samo se ispred kružića stavlja oznaka sec; sa ter je predstavljena treća veličina z. Slovo M predstavlja znak za množenje, a D za dijeljenje.

Ovakav način zapisivanja je bio nepogodan za rješavanje jednačina.

Savremena simbolička algebra je stvarana postupno; upotrebljavane kratice su usavršavane, pomaci su bili mali. Tako, na primjer, Pjer Erigon (1634) stepene zapisuje a2, a3, a4,..., što je veoma blizu današnjeg načina njihovog predstavljanja: a^2, a^3, a^4,...

Na kraju navodimo neke od načina obilježavanja stepena sa negativnim, odnosno racionalnim izložiocem. Šike u jednom djelu iz 1484. godine izraz

$$12x^{-1} \quad \text{piše} \quad 12x^{\overline{1m}}.$$

Nikol Orem (14. vijek) koristi

$$\frac{1}{3} \cdot 9^{p} \quad \text{da bi zapisao} \quad 9^{\frac{1}{3}}.$$

Stepen sa negativnim i racionalnim izložiocem u modernoj notaciji prvi put piše Njutn 1676. godine.

Odlučan i značajan doprinos stvaranju simboličke algebre dao je francuski matematičar Vijet (XVI vijek). Kod njega ne nalazimo skraćenice već slova kao simbole koji predstavljaju matematičke veličine - geometrijske ili algebarske. On koeficijente obilježava suglasnicima B,C,D,..., a nepoznate veličine samoglasnicima A,E,I,...

Današnje označavanje koeficijenata početnim slovima a,b,c,... a nepoznanice završnim slovima x, y, z,.... abecede uveo je Dekart (1637).

Označavanje algebarskih veličina slovima doprinijelo je shvatanju algebre kao nadgradnje aritmetici.

4⑥Msec③ter②D13①sec⑤ter⑦$=4x^6z^2:13xy^5z^7$

6. JEDNAČINE

U 15. vijeku pojavljuju se rukopisi u kojima se često upotrebljavani izrazi pišu skraćeno na način kako je to radio Diofant prije više od hiljadu godina. Regiomontanus (oko 1463) umjesto nepoznate veličine koristi oznaku R, prvo slovo latinske riječi *res* (stvar), dok za drugi stepen nepoznate upotrebljava skraćenicu ce. Jednačine se iskazuju u sinkopatskom obliku. Sinkopatska algebra nije u potpunosti napuštena sve do 17. vijeka.

Za opšti razvoj simbolike jednačina najzaslužniji su Dekart, Vijet, Lajbnic, Njutn i Ojler. Put od sinkopatskog do simboličkog oblika iskazivanja jednačina bio je dug što se može vidjeti iz sljedećih primjera:

Kardano (1545):	cub^9 p : 6 reb^9 aeqlis 20;
savremena simbolika:	$x^3+6x=20$.
Vijet (oko1590):	QC-15QQ+85C-225Q+247N aequatur 120;
savremena simbolika:	$x^5-15x^4+85x^3-225x^2+274x=120$.
Žirar (1629):	1(4)+35(2)+24=10(3)+50(1);
savremena simbolika:	$x^4+35x^2+24=10x^3+50x$.
Dekart (1637):	$yy \propto cy-\frac{cx}{b}y+ay-ac$;
savremena simbolika:	$y^2=cy-\frac{cx}{b}y+ay-ac$.
Valis (1693):	$x^4+bx^3+cxx+dx+e=0$;
savremena simbolika:	$x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$.
Ojler (1798):	$xx+yy=n$;
savremena simbolika:	$x^2+y^2=n$.

Linearne jednačine

U rukopisima Egipćana i Vavilonaca nalazimo primjere rješavanja jednačina. Egipćani su imali poseban znak (hijeroglif) i ime za nepoznatu veličinu - zvali su je *hau*, što znači hrpa, gomila. Kod Indijaca nepoznata se nazivala *ša* (stvar). U nekim rukopisima nepoznate veličine su označavane pomoću boja.

❒ **Primjer.**

U Rajndovom papirusu se nalazi zadatak, koji je iskazan riječima te se tako i rješava:

Gomila, računata dva puta zajedno, sa još jednom gomilom, dostiže devet. Koje je ime te gomile?

Računaj zbir te jedne gomile zajedno sa te dve.

Računaj sa te tri da bi dobio devet. Nastaje tri. Gle, ime te gomile je tri.

Navedimo još jednom ovaj zadatak kao i način njegovog rješavanja zajedno sa današnjim načinom zapisivanja jednačina:

Gomila, računata dva puta zajedno sa još jednom gomilom, dostiže devet.	$2x+x=9$
Koje je ime te gomile?	$x=?$
Računaj zbir te jedne gomile zajedno sa te dvije	$2x+x=3x$
Računaj sa te tri da bi dobio devet	$3x=9$
Gle, ime gomile je tri. *Tačno si našao*	$x=3$ ❒

Zadaci u Rajndovom papirusu se odnose na praktične probleme iz oblasti građevinarstva, ekonomije i slično.

Neki radnik mora za transport hljeba iz pekare koristiti korpe, veće u koje može stati 5 hljebova i manje sa četiri hljeba. Koliki će se rad izvršiti u oba slučaja?

(Rajndov papirus)

Nije jasno kako su Egipćani i Vavilonci došli do rješenja navedenih i sličnih problema. Najvjerovatnije da se zadatak, koji je bio iz svakodnevnog života, rješavao mnogo puta sve dok se ne bi dobilo rješenje koje je odgovaralo realnosti. Redosljed računskih operacija koji dovodi do tačnog rezultata postaje *radno pravilo*. Na taj način se mogu rješavati i slični problemi. Svakako da ovi postupci nisu bili racionalni, ali u ono vrijeme su bili jedini način da se dođe do potrebnog rješenja.

Dakle, za rješavanje jednačina ne koristi se jedan opšti metod (algoritam) nego se za svaku konkretnu jednačinu koriste poseban postupak. Ne uočava se sličnost u metodama rješavanja jednačina što je preduslov za izgrađivanje jedne opšte metode. Pa i pored svega toga, saznanja Egipćana o jednačinama predstavljaju osnovu za dalju izgradnju algebarske metode njihovog rješavanja. Trebalo je proći skoro dvije hiljade godina da bi se učinio pomak u daljem usavršavanju algebarske metode rješavanja jednačina. Za to je najzaslužniji Diofant.

Prije njega Grci nisu poznavali algebarske metode rješavanja jednačina nego su ih rješavali koristeći znanja iz geometrije. U Grčkoj je bila razvijena nauka o proporcijama što je Grcima omogućilo da proporcije budu zamjena za jednačine.

Diofant uočava pojedina pravila za transformacije jednačina i u djelu *Aritmetika* ih navodi zajedno sa primjerima:

1. *Ako je na objema stranama jednačine isti stepen nepoznate, ali sa raznim koeficijentima, mora se istoimeno od istoimenog oduzeti, dok ne postane jedan član jednak jednom članu.*

$$8x = 3x - 10$$
$$8x - 3x = 3x - 3x + 10$$
$$5x = 10$$

2. *Ako su, međutim, na jednoj ili na obje strane pojedini članovi negativni, treba objema stranama dodati pozitivne brojeve sve dok ovi članovi ne postanu pozitivni.*

$$5x - 11 = 4$$
$$5x - 11 + 11 = 4 + 11$$
$$5x = 15$$

3. *Zatim, treba opet oduzeti istoimeno od istoimenog dok na svakoj strani ne bude samo jedan član.*

$$8x + 9 = 6x + 17$$
$$8x + 9 - 6x = 6x - 6x + 17$$
$$2x + 9 = 17$$
$$2x + 9 - 9 = 17 - 9$$
$$2x = 8$$

Diofant za nepoznatu koristi izraz "*neodređen broj jedinica*" i označava je grčkim slovom sigma.

Diofantova *Aritmetika* je zbirka zadataka sa dvanaest poglavlja od kojih je sačuvano samo šest. Zadaci su formulisani u skraćenom obliku, nema saopštavanja zadataka u formi mitoloških priča što je do tada bila uobičajeno. Rješenje zadataka se traže samo u skupu prirodnih odnosno racionalnih brojeva. Diofant je u *Aritmetici* izložio i jednačine sa više nepoznatih, tzv. "*neodređene jednačine*" koje još nazivamo i *Diofantove jednačine*.

Jednačina $3x+4y=10$ u skupu realnih brojeva ima beskonačno mnogo rješenja, jer za svako x postoji y tako da je $3x+4y=10$. Ali, Diofant zahtjeva da su rješenja cijeli pozitivni brojevi. U našem slučaju jedno takvo rješenje date jednačine je $x=2$ i $y=1$. To se može najlakše vidjeti ako u pravouglom koordinatnom sistemu nacrtamo pravu koja je zadana relacijom $3x+4y=10$, tada su uređeni parovi (x,y), određeni navedenom formulom, koordinate tačaka te prave. Tražimo li da ove vrijednosti budu cijeli brojevi, mi zapravo određujemo tačke čije su koordinate cijeli brojevi. To su, na primjer, tačke $(2,1)$, $(-2,4)$, $(6,-2)$. Diofant traži da su rješenja prirodni brojevi te je uređeni par $(2,1)$ rješenje date jednačine.

Indusima, koji su od Grka primili osnovne pojmove o linearnim jednačinama, rješavanje linearnih jednačna je bilo olakšano zbog primjene podesnijeg načina zapisivanja brojeva kao i zbog poznavanja negativnih brojeva.

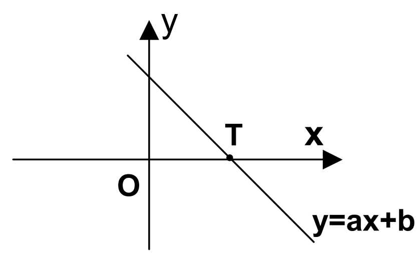
Arapski matematičar al-Horezmi je svojim djelom *Učenje o svođenju i o dvostrukom oduzimanju* znatno uticao na razvoj matematike u Evropi u srednjem vijeku. Interesantno je da al-Horezmi u navedenom djelu linearne i kvadratne jednačine rješava retorički.

Zahvaljujući Dekartu i njegovoj metodi koordinata, koju je izložio u *Geometriji* (1637), opšti oblik jednačine s jednom nepoznatom se zapisuje u obliku

$$ax+b=0, \quad \text{gdje je } a \neq 0.$$

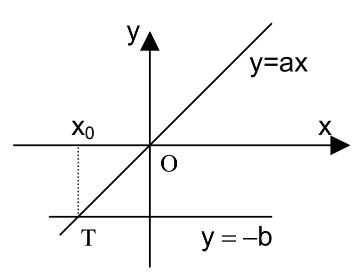
Do tada su jednačine zapisivane samo sa pozitivnim koeficijentima; dijelovi jednačina sa negativnim koeficijentima "su prenošeni" na drugu stranu jednakosti.

Uspostavivši vezu između algebre i geometrije, Dekart ističe da se $x = -\frac{b}{a}$, rješenje jednačine $ax+b=0$, može geometrijski predstaviti tačkom T, koja je presjek prave $y=ax+b$ i ose Ox (sl. 32). Na taj način on ukazuje da zavisnost između veličina x i y određuje položaj tačke u ravni. Metodu koordinata nezavisno od Dekarta otkrio je Pjer Ferma.



Sl. 32.

Ako jednačinu $ax+b=0$ predstavimo u obliku $ax = -b$, tada se njen korijen $x = -\frac{b}{a}$ može odrediti kao apscisa tačke T u kojoj se sijeku prave $y=ax$ i $y=-b$ (sl. 33).



Sl. 33.

Sistemi jednačina Sistemi jednačina sa više nepoznatih javljaju se kod Egipćana, Vavilonaca, kao i u grčkim, indijskim i kineskim matematičkim rukopisima. Na primjer, u sedmoj i osmoj knjizi čuvenog kineskog djela *Matematika u devet knjiga* nalaze se sistemi jednačina sa kratkim pravilima njihovog rješavanja. Pa ipak sve je to u jednoj prikrivenoj formi. Sisteme jednačina u današnjem obliku po prvi put susrećemo kod Diofanta. On rješava sisteme jednačina oblika:

$$\begin{array}{l} x+y=a \\ x-y=b \end{array}; \quad \begin{array}{l} x+y=a \\ x=by \end{array}; \quad \begin{array}{l} \dfrac{x+30}{x-30}=2 \\ \dfrac{y+50}{x-50}=3 \end{array}; \quad \begin{array}{l} x+y=20 \\ y+z=30 \\ y+x=40. \end{array}$$

U sedmoj knjizi *Matematika u devet knjiga* nalaze se sistemi od pet jednačina sa pet nepoznatih koji su rješavani po tačno određenom algoritmu.

I Arapi su se bavili rješavanjem jednačine i sistema jednačina. Uglavnom su to bili radovi po uzoru na grčke matematičare poslije Diofanta. Prvu nepoznatu nazivaju *stvar* (*ša*), a drugu *mjera* (*sen*).

U djelu *Algebra* al-Horezmi rješava, pored ostalog, sistem jednačina:

$$\begin{array}{l} x-y=2 \\ \dfrac{x}{y}=2. \end{array}$$

U Evropi se sve do kraja 15. vijeka rijetko nailazi na sisteme kvadratnih jednačina. Tek se Italijan Kardano (1539) ozbiljnije bavi sistemom linearnih jednačina. On proučava sisteme jednačina oblika

$$\begin{array}{l} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{array},$$

te daje njihova rješenja:

$$x = \frac{\frac{c_1 b_2}{b_1} - c_2}{\frac{a_1 b_2}{b_1} - a_2} \quad \text{i} \quad y = \frac{\frac{c_1 a_2}{a_1} - c_2}{\frac{a_2 b_1}{b_2} - a_1} .$$

Za dalji doprinos rješavanju sistema jednačina zaslužni su Štifel i Rudolf, koji u Njemačkoj prvi predaje o jednačinama sa dvije nepoznate.

Rješavanja sistema od dvije linearne jednačine sa dvije nepoznate *metodom jednakih koeficijenata*, odnosno *metodom supstitucije* uvode, redom, Njutn (1685) i Lajbnic. *Metodu supstitucije* je objavio jedan Njutnov slušalac tek 1707. godine.

Pojam *eliminisati nepoznatu* uveo je Ojler umjesto dotadašnjih Njutnovih pojmova *iskorijeniti, zatirati*.

Lajbnic je bio prvi koji je, 1676. godine, uočio da se pri opštem rješavanju sistema linearnih jednačina javljaju karakteristične kombinacije koeficijenata jednačina te se njihovo rješenje može izraziti pomoću tih koeficijenata. O tome je sljedeće godine napisao raspravu pod nazivom *Uzorak nove analize kojom se uklanjaju pogreške, koja kao rukom vodi duh i kojom se lako nalazi napredak*.

Arapski matematičar Abu Kamil (9/10. vijek) rješava sistem jednačina

$$x+y+z=100$$

$$5x + \frac{y}{20} + z = 100$$

tako što eliminacijom nepoznate z dobija

$$y = 4x + \frac{4}{19}x,$$

odakle zaključuje da je $x=19$, $y=80$ i $z=1$.

Kvadratne jednačine

Grci su za rješavanje kvadratnih jednačina koristili geometrijsku metodu. Oni su, pošto nisu poznavali negativne brojeve, dopuštali samo pozitivna rješenja. Zato su izbjegavali slučaj kada su u kvadratnoj jednačini $ax^2+bx+c=0$ sva tri koeficijenta a,b,c pozitivna; u tom slučaju jednačina ne može imati pozitivna rješenja.

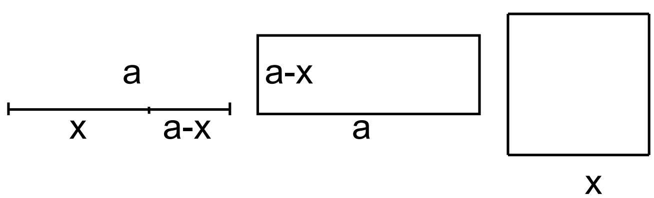
Euklid (3. vijek p.n.e.) i Hiparh (2. vijek p.n.e.) rješavali su kvadratne jednačine geometrijski, a Heron (2. vijek p.n.e.) i Diofant (3. vijek) računski (algebarski). Kod Euklida nalazimo jednačine oblika

$$x^2+px=p^2; \qquad x^2+q^2=px; \qquad x^2=px+q^2.$$

Heron rješava kvadratne jednačine metodom nadopunjavanja na kvadrat. Kod njega nalazimo jednačinu $x(14-x)=\frac{6720}{144}$ za koju daje približno rješenje $x \approx 8\frac{1}{2}$.

❒ **Primjer.**

Dužinu a *podijeliti na dva dijela tako da pravougaonik čija je osnovica* a*, a visina jednaka jednom odresku, bude jednaka kvadratu nad drugim odreskom*



$$a\,(a-x)=x^2$$

Ovo je prvi primjer geometrijskog rješavanja kvadratne jednačine u istoriji matematike. ❒

U Indiji Brahmagupta (7. vijek) rješava jednačine s negativnim koeficijentima, mada dopušta samo pozitivna rješenja.

Bhaskara (12. vijek) poboljšava Heronovu *metodu nadopunjavanja na kvadrat* i rješava kvadratne jednačine kao što se i danas čini. Zato se ova metoda još naziva i *indijskom*.

Al-Horezmi je dao veliki doprinos sistematizaciji kvadratnih jednačina. Izložio je postupke svođenja kvadratnih jednačina na neki od sljedećih oblika:

1. $ax^2=bx$, kvadrati su jednaki korijenima;
2. $ax^2=c$, kvadrati jednaki broju;
3. $ax^2+bx=c$, kvadrati i korijeni jednaki broju;
4. $ax^2+c=bx$, kvadrati i broj jednaki korijenima;
5. $bx+c=ax^2$, korijeni i brojevi jednaki kvadratima.

Arapi su u 9. vijeku primjenjivali obrazac za rješavanje nekih tipova kvadratne jednačine $x^2+px+q=0$ koji se i danas koristi:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\,.$$

Omar Hajam (11. vijek) interpretira i rješava kvadratne jednačine i algebarski i geometrijski.

Od evropskih matematičara treba spomenuti Štifela i Stevina. Prvi je dao jedinstveno pravilo za rješavanje kvadratnih jednačina. Ali ni on ne dopušta negativna rješenja. Simon Stevin je razradio nauku o jednačinama ne zanemarujući negativne korijene. Na taj način je pripremio teren za formiranje rješenja kvadratnih jednačina opšteg tipa.

Tek je Vijet dao jednu dublju analizu kvadratnih jednačina. Od njega potiče rješavanje jednačine $ax^2+bx+c=0$ supstitucijom $x=y+t$. Interesantno je da i on ne dopušta negativna rješenja jednačina.

S kvadratnim jednačinama usko su povezani kompleksni brojevi. Tek kad je Italijan Kardano u djelu *Velika vještina* (*Ars magna*, 1545) obrađivao negativne i kompleksne brojeve, bilo je moguće riješiti opštu kvadratnu jednačinu.

Grci, Arapi i Indijci su kvadratnu jednačinu uglavnom izražavali riječima. Tako je, na primjer, umjesto današnjeg zapisa $x^2+3x=16$ ova jednačina predstavljana rečenicom:

Jedan kvadrat i tri broja jednaki su 16.

Bhaskara jednačinu $5x^2-3x+17=12$ piše

Ja bha **5**	Ja **3**	Ru **17**
Ja bha **0**	Ja **0**	Ru **12**

Štifel je koristio svoju simboliku za jednačine te jednačinu $8x^2+15x=48$ zapisuje: 8z+15x *jednako* 48.

U 16. i 17. vijeku način zapisivanja kvadratnih jednačina se sve više usavršava. Ali trebalo je da prođe oko sto godina da bi se došlo do savremene algebarske simbolike.

Italijanski matematičar Nikolo Tartalja (1500-1559) je pronašao metodu za rješavanje jednačina trećeg stepena. Nije je javno saopštio, nego je učestvujući na takmičenjima u rješavanju matematičkih zadataka izazivao divljenja prisutnih. Drugi italijanski matematičar Kardano je molio Tartalju da mu saopšti metodu rješavanja kubnih jednačina, da bi njome obogatio svoju knjigu *Velika vještina*. Poslije Kardanovog obećanja da je neće nikome saopštiti Tartalja mu otkriva tajnu. Uskoro Kardano u saradnji sa svojim učenikom Ferarijem proširuje Tartaljina pravila i na jednačine četvrtog stepena i požuri da to objavi. Tartalja je nezadovoljan ovakvim postupkom Kardana i poziva ga u Milano na javno na takmičenje. Ovaj ne odlazi nego šalje Ferarija.

Formule za rješavanje kubnih jednačina ne nose ime svoga pravog tvorca Tartalje već Kardana.

7. TEORIJA SKUPOVA I MATEMATIČKA LOGIKA

Teorija skupova

Teorija skupova je novija matematička disciplina. Njen osnivač je njemački matematičar Georg Kantor (1845-1918). On pod pojmom skupa podrazumijeva kolekciju određenih objekata o kojoj znamo da li je neki objekt element tog skupa ili nije. Mnogi pojmovi teorije skupova bili su prisutni u matematici prvih civilizacija; Euklid dokazuje da je skup prostih brojeva beskonačan, geometrijske krive se definišu kao skupovi tačaka itd.

Rječnik pojmova iz teorije skupova je postao zajednički svim matematičarima; pokazao se korisnim i u primjeni u nastavi matematike za sve uzraste učenika.

Znak $\{\ \}$ za označavanje skupova potiču od Kantora. Uopšte, zagrade $\{\ \}$ se u savremenoj matematici skoro isključivo koriste za označavanje skupova.

Znak $\in$ koristi se kao zamjena za riječ *je element*. Potiče od Peana (1895), koji je zapravo koristio grčko slovo ε (epsilon). Današnja stilizacija ovog grčkog slova je djelo engleskog filozofa i matematičara Bertrana Rasela. Prvi put se pojavljuje u njegovom djelu *Principi matematike* (1903).

Relacijski simboli u teoriji skupova $\subset$ i $\subseteq$ potiču od Peana; najvjerovatnije ih je izveo iz relacijskih znakova za brojeve $<$ i $\leq$.

Znaci $\notin$, $\not\subset$ i $\nsubseteq$ su nastaju kao logična transformacija simbola: $\in$, $\subset$, $\subseteq$.

Oznaku $\varnothing$ za prazan skup uvodi Andre Vejl (1906-1998); Ona vodi porijeklo iz norveškog odnosno danskog pisma.

Simboli $\cup$, $\cap$ za skupovne operacije *unija* odnosno *presjek* potiču od italijanskog matematičara Peana (1858-1932). Interesantno da je ovaj posljednji znak koristio Lajbnic za množenje.

Kako se u teoriji skupova veoma često spominju skupovi svih prirodnih, cijelih, racionalnih odnosno realnih brojeva to je bilo neophodno da se uvedu jedinstvene oznake za njih. Dedekind je skup racionalnih brojeva označavao sa R, a skup realnih brojeva gotičkim slovom $\mathfrak{R}$ (1872).

Njemački matematičar Helmut Has (1898-1979) skup cijelih brojeva označava grčkim slovom Γ (gama), a skup racionalnih brojeva velikim grčkim slovom P (ro).

Oto Haupt skup cijelih brojeva obilježava G^0, a skup racionalnih brojeva P^0 (1929). U kasnijem izdanju navedeni simboli su, redom, zamijenjeni sa Z i Q.

Današnje oznake $\mathbb{Z}$ za skup cijelih, odnosno $\mathbb{Q}$ za skup racionalnih brojeva potiču od Burbakija.

Kantor je 1893. godine uveo oznaku $\aleph_0$ (alef nula) za kardinalni broj skupa prirodnih brojeva.

Matematička logika

Na razvoj evropske matematike i mišljenja uopše jedinstveno je djelovala grčka matematika i filozofija. Grci su prvi koristili metode rasuđivanja kojima još i danas operišemo. Među prve grčke logičare spadaju Zenon, Sokrat, Platon, Euklid i Aristotel. Dokazi koje nalazimo kod grčkih matematičara Euklida, Arhimeda i Apolonija u logičkom smislu odgovaraju današnjim.

Aristotel je prvi ukazao na potrebu da se objasni i sistematizuje izvjestan broj logičkih načela i postupaka.

Za osnivača savremene logike smatra se Džordž Bul (1815-1864) čiji su prethodnici bili Hamilton i de Morgan.

Oznake p, q, r za *iskaze* potiču od Vajtheda i Rasela (1910). Oni su uveli i simbol $\sim$ za negaciju te negaciju iskaza p označavaju $\sim p$. Za složeni iskaz p *ili* q koriste oznaku $p \vee q$, dok rečenicu p *i* q zapisuju $p \wedge q$.

Relativno kasno je primjećeno kako se često u matematici, pored nekih drugih riječi, pojavljuju i neodređene zamjenice: *svaki* i *neki*. Danas su o njima stečena nova saznanja, koja su našla primjenu u matematici. *Neki* se naziva egzistencijalni kvantifikator, jer njime se ukazuje na postojanje određenih matematičkih objekata. Oznaku $\exists$ za *neki (postoji)* uveo je Peano u jednom svom djelu objavljenom 1897. To je zapravo transformisano prvo slovo riječi EXIST (postoji). Neki istoričari matematike navode da je prije Peana ovaj znak upotrebljavao Rasel.

Simbol $\forall$ za univerzalni kvantifikator *svaki* potiče od Gerharda Gencena, koji ga je uzeo po analogiji za znak $\exists$, kao prvo slovo riječi ALL (svi).

Paradoksi koji su se u matematici javili na prelazu iz 19. u 20. vijek bili su jedan od glavnih razloga da se matematičko mišljenje podvrgne kritici i reviziji. Jedan od njih je poznat pod imenom *paradoks berberina*.

> *U nekom selu bio je samo jedan berberin, koji je brijao sve one (i samo one) stanovnike sela, koji se nisu brijali sami. Da li je berberin brijao sebe?*

Ako bi se berberin brijao, onda bi on bio jedan od onih stanovnika koji se briju sami, pa se ne bi smio brijati. Ako se pak ne bi brijao, onda bi on bio jedan od stanovnika sela koji se ne briju sami, pa bi se morao brijati.

TREĆA G L A V A

G E O M E T R I J A

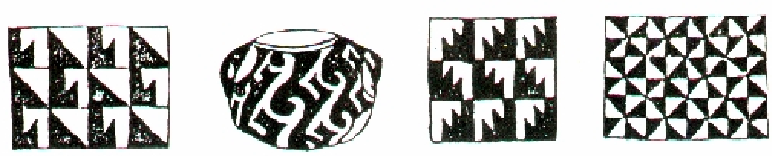
1. UVOD

Geometrija je jedna od najstarijih nauka. Ne može se precizno utvrditi vrijeme nastanka prvih geometrijskih znanja. Ona se javljaju u najstarijoj istoriji ljudskog društva kada se, pod uticajem i usljed potreba svakodnevnog života, kod čovjeka počinju stvarati predstave o količinskim odnosima i prostornim oblicima. Prije toga čovjek je sticao određena iskustva i pamtio ih. Ona najupečatljivija je nastojao da ovjekovječi crtežima. U pećinama na kamenim stijenama pronađeni su crteži od prije deset hiljada godina gdje su prikazani događaji iz svakodnevnog života. Ovi crteži su označavali novu kvalitetu ljudskog pamćenja i mišljenja koja je ukazivala na to kako se mogu evidentirati, sačuvati i razvrstati iskustva.

Bavljenjem zemljoradnjom čovjek mijenja svoj način mišljenja, on više ne skuplja ono što nalazi u prirodi nego počinje svjesno da proizvodi ono što mu je neophodno. Ljudi zemljoradnici su ostajali na jednom mjestu sve dok je zemlja bila plodna i gradili domove u kojima su živjeli duže vremena. Stvaraju se sela, razvijaju se jednostavniji zanati, nastaje trgovina. Sve ovo utiče na formiranje jezika, odnosno na stvaranje riječi za jednostavnije numeričke pojmove i za neke prostorne oblike. Na taj način su stvoreni uslovi za formiranje pojma broja. Sa nastankom brojeva javlja se potreba da se oni zapišu. U početku čovjek koristi crte-duži. Na taj način duž predstavlja broj, a broj duž; geometrija i aritmetika čine cjelinu i tek kasnije će se izdvojiti u dvije matematičke discipline.

Povlačeći linije ljudi su ulazili u svijet geometrije. Nastaju prave i krive linije, tačke i druge figure. Još od vremena paleolita čovjek bilježi određene znakove (simbole) na kamenju, na koštanim alatkama bilo u magijske bilo u praktične svrhe. U pećinama su otkriveni mnogi crteži iz paleolita koji su sačinjeni od kombinacija pravih i krivih linija. U Ukrajini na kostima ubijenih životinja su pronađeni crteži stari oko 20000 godina.

Prvi crteži su bili jednostavni da bi kasnije nastajale skladnije i potpunije slike. Vremenom čovjek, da bi ukrasio posuđe, oružje i zidove hramova, počinje stvarati crteže sa dosta simetrije i pravilnosti. Oni su u umjetnosti poznati pod nazivom *ornamenti*. Na keramičkim posudama iz petog milenijuma nalaze se razne forme tzv. *tekuće spirale*. Svi ovi crteži spadaju u domen planimetrije. Sklad i ljepota ornamenata upućuju na zaključak da su njihovi autori morali posjedovati određeno geometrijsko znanje.



Sl. 34. Primjeri ornamenata iz neolita
(oko 5000-4000 g. p.n.e.)

Ornamentima su se isticale egipatske građevine iz perioda izgradnje piramida. U njihovom usavršavanju najdalje su otišli Arapi. O tome svjedoče crteži na građevinama, raznim predmetima za svakodnevnu upotrebu i rukopisima. Njihovi ornamenti,

Sl. 35.Geometrijski ukrasi na antičkoj posudi

poznatim pod imenom *arabeske*, predstavljali su stilizovane crteže biljaka; Arapima je religija zabranjivala da crtaju ljude i životinje.

Prva geometrijska znanja nastaju kao rezultat rješavanja praktičnih problema. Da bi se obavili meliracioni radovi bilo je potrebno premjeriti zemljište i odrediti njegovu površinu. Ako se računala površina trougla, onda se radilo o površini konkretnog zemljišta trougaonog oblika. Mjerenja u građevinarstvu i arhitekturi se obavljaju prema mjerama čovječijeg tijela. Sva tako stečena geometrijska saznanja su zasnovana na eksperimentu i spadaju u intuitivnu geometriju.

U Rajndovom papirusu je naznačeno da je površina trougla stranice a i visine h jednaka polovini proizvoda dužine stranice a i visine h; površina kruga prečnika d, zapisana u uobičajenoj simbolici, je $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$. Odavde se dobija da je $3,16$ približna vrijedniost broja π.

Kinezi su znali za odnos stranica pravouglog trougla. Nije poznato kako su došli do tog saznanja. Kod njih nema dokaza geometrijskih stavova. I u Indiji su saznanja bazirana na iskustvu; nema induktivnih dokaza. Stari Rimljani se interesuju i za praktičnu primjenu geometrije kao što je mjerenje zemljišta i izvođenje inžinjerijskih radova. Geometriji pristupaju intuitivno.

Rješavanjem praktičnih zadataka čovjek stiče nova geometrijska znanja i na osnovu njih počinje formirati radna pravila šta treba činiti da bi se ponovo uspješno riješio sličan problem. Dolazi se do novih činjenica, ali se ne pokušava tražiti uzročna veza među njima. Ovo je karakteristično za prve civilizacije.

Zahvaljujući arheološkim nalazima na područjima gdje su živjele prve civilizacije dolazi se do podataka o počecima razvoja geometrije. Kinezi su, da bi sagradili astronomske opseratorije, morali posjedovati određena geometrijska znanja. Indijcima je za gradnju hramova bilo potrebno poznavanje konstrukcije pravouglog trougla, izračunavanje površine jednakokrakog trapeza ili pretvaranje pravougaonika u kvadrat jednake površine.

Stari narodi u dolini rijeka Tigrisa i Eufrata su posmatranje i tumačenje nebeskih pojava zasnivali na znanjima iz geometrije. U građevinarstvu je do izražaja došlo njihovo poznavanje praktične geometrije.

Egipćani su u premjeravanju zemljišta i građenju piramida ispoljili visoki nivo poznavanja geometrije. O tome svjedoče rukopisi sa matematičkim sadržajima (zadacima) stari preko tri hiljade godina. Osim pisanih dokumenata uvid u razvoj geometrije starih naroda može se steći na osnovu njene praktične primjene u građevinarstvu, arhitekturi i astronomiji.

Grčki istoričar Herodot (5. vijek p.n.e) ističe da je geometrija nastala u Egiptu usljed stalne potrebe da se poslije poplava brzo i pouzdano odrede granice nekog zemljišta. Neki istoričari matematike smatraju da se ova konstatacija mora uzeti sa rezervom, jer počeci geometrije u Mezopotamiji i Kini su stari bar toliko koliko i u Egiptu. Svakako da su geometrijska znanja nastala u starom Egiptu poslužila kao podloga na kojoj su stari Grci počeli sistematski izgrađivati geometriju zasnovanu na deduktivnoj metodi.

Tek kod Grka nailazimo na zanimanje za apstraktni, a ne konkretni trougao. Oni su bili prvi koji su nastojali sistematizovati, apstrahovati i generalisati mnoštvo nepovezanih geometrijskih činjenica da bi iz njih dedukcijom došli do drugih odnosa, koji su u skladu s novim iskustvima.

Prvi dokazi u geometriji javljaju se kod Talesa. Doprinos Talesa nije u otkrivanju teorema nego u njihovu dokazu. Aksiomatsko zasnivanje geometrije se prvi put javlja u Euklidovim *Elementima*. Za Grke geometrija je bila mnogo više od zemljomjerstva. Najveći doprinos razvoju geometrije Grci su dali u periodu od 6. do 2. vijeka p.n.e, koja se u tom vremenu izgrađuje samostalno i nezavisno od primjene. Geometrijski sadržaji se izlažu sistematski uz uvažavanje deduktivne metode. Ovako izgrađena geometrija postala je model kako se jedna nauka aksiomatski zasniva. Mnogi od matematičkih termina dolaze iz latinskog jezika, kao što su *planimetrija*, *figura*, *linija*, *bisektrisa*, *centar*, *radijus*, ili iz grčkog jezika: *dijametar*, *sfera*, *simetrija*, *dijagonala, stereometrija* i drugi.

Euklid je geometrijska znanja koja su Demokrit, Hipokrat i Eudoks izlagali u svojim filozofskim školama dopunio i deduktivno izložio u trinaest knjiga *Elemenata*. Skoro dvije hiljade godina *Elementi* su, uz izvjesne dodatke i komentare, bili glavni udžbenik iz kojeg se učila geometrija.

U prve četiri knjige Euklid razmatra geometriju u ravni. U petoj i šestoj knjizi izložena je teorija proporcija kao i njena primjena. U sljedeće tri knjige *Elemenata* izložena je teorija brojeva. Deseta knjiga sadrži dosta opširnu teoriju nesamjerljivih veličina. U posljednje tri knjige izlaže se geometrija u prostoru, stereometrija.

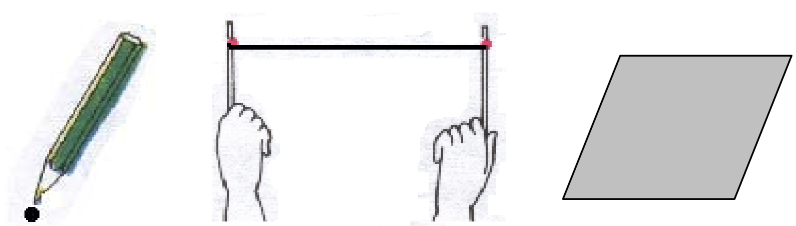
Smatra se da su *Elementi* poslije *Biblije* knjiga koja je na Zapadu doživjela najveći broj izdanja. Do 1450. godina bilo ih je preko 500 da bi se poslije otkrića štamparije pojavilo više od hiljadu izdanja *Elemenata*. Srpska akademija nauka je u periodu od 1949. do 1957. godine objavila Euklidove *Elemente*, koje je sa starogrčkog na srpski jezik preveo i obogatio svojim naučnim i istorijskim komentarima matematičar Anton Bilimovič.

Euklid je geometriju postavio na aksiomatske temelje koji su izdržali više od dvije hiljade godina, sve do 1899. godine kada ih je modernizovao i poboljšao njemački matematičar David Hilbert i objavio u sada već čuvenoj knjizi *Osnove geometrije*.

2. TAČKA, PRAVA I RAVAN

Geometrija, kao i druge matematičke teorije, je izgrađena od *aksioma*, *teorema* i *definicija*. Na početku se odaberu *osnovni pojmovi* koje ne definišemo. Neka njihova svojstva se uzimaju kao tačni polazni stavovi - *aksiome*, koje ne dokazujemo. Iz njih se izvode logičke posljedice - *teoreme*. Teorema posjeduje najmanje jedan *dokaz* u kojem se koriste: aksiome, ranije dokazane teoreme i razni logički zakoni. *Definicijama* se na izvjestan način određuju novi geometrijski pojmovi i njihova svojstva.

Tačka, *prava* i *ravan* spadaju u osnovne geometrijske (objekte) pojmove i kao takve ih ne definišemo. Tako nije bilo uvijek. Euklid i matematičari koji su bili pod njegovim uticajem pokušavali su da ih definišu. Te definicije su u stvari više bile rečenice kojima su se ovi pojmovi opisivali. Geometrijske pojmove predstavljamo pomoću modela. Na slici 36. su dati primjeri modela osnovnih geometrijskih pojmova: tačke, prave i ravni.



Sl. 36.

Tačka

Pitagorejci definišu tačku kao "*jedinicu (nedjeljivi sastojak) koja ima položaj*". Ovu definiciju je prihvatio i Aristotel. Platon naziva tačku *početkom linije*. Za grčkog matematičara Simplicija (6. vijek), tačka je nedjeljiva i predstavlja početak veličina koje iz nje rastu (povećavaju se). Euklid kaže da je tačka "*ono što nema dijelova*". Kod nekih prevodilaca Euklidovih *Elemenata* ova definicija glasi:

Tačka je ono čiji je dio ništa.

Za Euklida i Herona "*tačka je kraj linije*". Euklidove definicije tačke nisu prave logičke definicije već opisi i objašnjenja, koja su pored ostalog nejasna i maglovita te nije moguće objasniti šta autor njima želi reći. Čitalac je naprosto zbunjen i ne zna kako da shvati šta je to "*što nema dijelova*" ili "*čiji je dio ništa*" kao i šta bi sve moglo biti ono čiji je dio *ništa*. Analizirajući ovu definiciju srpski matematičar Radojčić kaže: "I samo *ništa* je nešto čemu je deo ništa".

Linija

Predstavnici Platonove škole definišu *liniju* kao *dužinu bez širine* što prihvata i Euklid. Ni ova definicija ne ispunjava osnovne zahtjeve definisanja, jer jedan pojam (linija) se definiše pomoću dva složenija pojma (dužine i širine). Proklo daje modifikaciju Aristotelove definicije linije i kaže da je linija tok ili putanja tačke.

Prava.

Za Euklida *prava linija je ona, koja za tačke na njoj podjednako leži*. Neki komentatori njegovih *Elemenata* smatraju da bi se ovako mogla definisati i kružna linija. Za Platona *prava je linija kod koje krajevi pokrivaju sve tačke među njima*.

Arhimed pod pravom podrazumijeva *najkraću liniju od svih koje se mogu povući između dvije tačke*. Heronova definicija sadrži elemente kretanja: *Prava je linija koja ne mijenja svoj položaj kada se vrti oko svoje dvije nepomične tačke*. I arapski matematičar i fizičar Sabit ibn Kora je pristalica uvođenja kretanja u geometriji. Prema njemu proizvoljna tačka pri *prostom* kretanju u nekom smjeru opisuje, u tom smjeru, pravu liniju.

Grci su pod pravom podrazumijevali i polupravu i duž. Ovo je posljedica shvatanja tadašnjih geometara koji pravu ne smatraju beskonačnom nego konačnom linijom, koja se po potrebi može produžavati.

Ravan

Pojam ravni je najneposrednije vezan za pojam površine. To se uočava i kod Euklida: *Ravan je površina koja za prave na njoj podjednako leži*. On pod površinom podrazumijeva površ. Ova definicija je u skladu sa njegovom definicijom prave. Nešto jasniju i "konkretniju" definiciju dao je Smirnski (1. vijek):

> *Ravan je površina koja sadrži svaku pravu što sa njom ima dvije zajedničke tačke.*

Dokazujući geometrijske tvrdnje Euklid ne koristi definicije tačke, prave i ravni, te prema tome one u njegovim *Elementima* ne čine neku čvršću vezu sa ostalim sadržajima. Njegove definicije osnovnih pojmova imaju samo istorijski značaj; treba ih smatrati samo opisom potrebnih elementarnih geometrijskih pojmova.

Pogrešno je smatrati da je definisanje osnovnih geometrijskih pojmova odlika matematičara starog vijeka. Tih pokušaja je bilo mnogo i kasnije. Za njemačkog matematičara Lajbnica *ravan je geometrijsko mjesto tačaka jednako udaljenih od dvije tačke*. Furije (oko 1810.) za definiciju ravni koristi, u jednoj drugoj formi, Euklidovu teoremu (XI knjiga, peta teorema):

> *Tri prave sa zajedničkom tačkom su u istoj ravni, ako postoji prava koja prolazi kroz tu zajedničku tačku i normalna je na svakoj od tih pravih.*

Krajem 19. vijeka matematičar David Hilbert je poboljšao grčka dostignuća u geometriji.

3. PARALELNE PRAVE

Za Euklida "*paralelne su one prave, koje se nalaze u istoj ravni i koje se produžene u beskrajnost na obe strane, ne sijeku jedna sa drugom*". Pojam *beskrajnost* je zbunjivala grčke matematičare i komentatore Euklidovih djela. Oni se nisu mogli složiti kako da provjere da li su dvije prave paralelne, tj. ne sijeku li se one možda "negdje daleko". Pojam *beskonačnosti* je u mnogim fazama razvoja matematike opasno uzdrmao zgradu matematike i ne rijetko je izgledalo da će je srušiti. To se nije dogodilo, jer matematičari su bili ti koji su u zgradu matematike unosili nova saznanja, i na taj način otklanjali problem, doprinoseći da ona postane stabilnija, veća i privlačnija.

Navedenom definicijom kod Euklida počinje *teorija paralelnih linija,* koja je bila predmet mnogih rasprava. Grčki matematičari Posidonije, Simplicije i Aganis definišu paralelnim one *prave koje su jednako udaljene jedna od druge*. Mnogi su smatrali prihvatljivom ovu definiciju tako da je nalazimo i kod Klavija (1574), Borelija (1658) kao i u udžbenicima geometrije 17. i 18. vijeka.

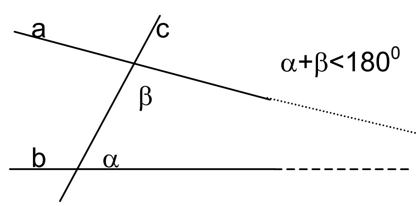
Arapski matematičar Sabit ibn Kora ne koristi termin *paralela* nego govori o pravama koje se *ne približavaju i ne udaljavaju jedna od druge ni u jednom od dva smjera*. Dubrovčanin Ruđer Bošković u udžbeniku *Planimetrija* (1754) *paralele* definiše kao *prave koje se u beskonačnosti produžene nikada ne sastaju niti se jedna drugoj približavaju*.

Bilo je definicija prema kojima se paralelne prave sijeku u beskonačnosti (Kepler), odnosno imaju zajedničku beskonačno daleku tačku (Dezarg).

Definicije paralelnih pravih moguće je podijeliti u tri grupe. U prvoj su one koje ističu da paralelne prave nemaju zajedničkih tačaka; u drugu grupu spadaju definicije prema kojima paralelne prave imaju isti pravac. Posljednja, treća grupa definicija se zasniva na tvrdnji da su paralelne prave podjednako udaljene jedna od druge.

S problemom paralelnih prava vezan je *Euklidov peti postulat*, kojim se tvrdi:

> *Ako dvije prave* a *i* b *siječe prava* c *i ako je zbir unutrašnjih uglova sa iste strane prave* c *manji od dva prava ugla, onda se prave* a *i* b *sijeku sa one strane prave* c *sa koje su ovi uglovi manji od dva prava* (sl. 37.).



Sl. 37.

Ova, na prvi pogled, geometrijski očigledna tvrdnja stvarala je poteškoće matematičarima preko dvije hiljade godina.

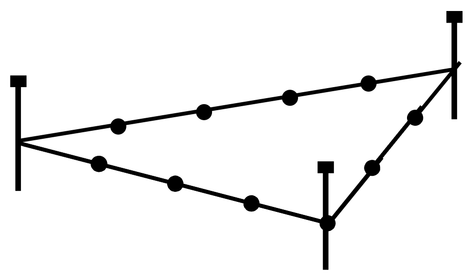
Ako se, na primjer, umjesto ovog postulata kao aksioma prihvati iskaz "*Kroz svaku tačku van date prave u datoj ravni prolazi tačno jedna prava, paralelna sa datom pravom*" neće se narušiti ostali dio sistema Euklidovog izlaganja.

Samim izostavljanjem *petog postulata* dobija se tzv. apsolutna geometrija, koju su, nezavisno jedan od drugog, prvi izlagali ruski matematičar Nikolaj Lobačevski i mađarski matematičar Janoš Boljai.

Heron je za paralelne prave koristio oznaku $=$. Isti simbol nalazimo i kod Papusa. Današnja oznaka za parelelne prave $\|$ potiče od Outreda.

4. UGAO

Egipćani i Vavilonci su sa zadivljujućom preciznošću gradili hramove, piramide i druge građevine. Visine predmeta su mjerili pomoću dužine njihove sjenke i ugla pod kojim su Sunčeve zrake padale na Zemlju. Njima je bio poznat pojam ugla kao i vrste uglova. Vavilonci su znali da konstruišu ugao od 60°. Da bi se konstruisao prav ugao bilo je potrebno sačiniti trougao od tri konopca čije su dužine bile redom 3, 4 i 5 jedinica mjere, kao što je prikazano na slici 38, onda je ugao nasuprot najveće stranice tako dobijenog trougla prav. Ovaj način dobijanja pravog ugla su poznavali Egipćani, Vavilonci i Kinezi.



Sl. 38. Konstrukcija pravog ugla pomoću *egipatskog trougla*

> *Ugao u ravni je uzajamni nagib dvaju linija u ravni, koje se stiču i koje ne leže u istoj pravoj.*
>
> *Ako su linije koje obrazuju ugao prave, ugao se zove pravolinijski.*
>
> Euklid (*Elementi*, I knjiga)

Za Ležandra ugao je razlika dvaju prava, dok je za Bezua "*veličina okretanja, koja dovodi jedan krak u položaj drugog*".

Grci su izvršili podjelu uglova na *oštre*, *tupe* i *prave*. Ovoj podjeli je prethodilo uočavanje položaja vertikalne poluprave u odnosu na horizont, što je u najužoj vezi sa pravim uglom. Tek kasnije se ostali uglovi upoređuju sa pravim:

> Danas se u školskim udžbenicima *ugao* definiše *kao unija ugaone linije i skupa svih tačaka u ravni koje su sa iste strane*

"*Tup ugao je onaj, koji je veći od pravog.*

Oštar ugao je onaj koji je manji od pravog".

Talesu se pripisuje otkriće i dokaz teoreme o jednakosti pravih uglova.

Znak $\angle$ za ugao je u 17. vijeku uveo francuski matematičar Erigon. Od njega potiče simbol za *normalnost* prava $\perp$ kao i simbol $\lrcorner$ za *prav ugao*. Papus prvi koristi oznaku $\llcorner$ za *prav ugao*.

5. TROUGAO

Trougao susrećemo kod prvih civilizacija. Zadaci o trouglu se nalaze u papirusima iz Egipta, u indijskim knjigama kao i drugim starim rukopisima. Egipćani su znali konstruisati prav ugao pomoću trougla čije su stranice, sačinjene od užeta, dužine 3, 4 i 5. Taj posao su obavljali geometri, koji su se zvali *harpendonapti* - zatezači užeta. Egipćani su smatrali da trougao sa stranicama dužine 3, 4 i 5 ima tajnovitu moć te su u hramovima i piramidama gradili prostorije tako da su njihova visina, širina i dužina odnose kao ti brojevi. Izračunavali su površinu trougla kao polovinu proizvoda osnovice i njene visine. Ovo pravilo je bilo poznato i Vaviloncima. Sva saznanja o trouglovima koja potiču od egipatske i vavilonske civilizacija su u funkciji praktičnih i konkretnih zadataka. Učenja o trouglu pojavila su se u Jonskoj školi (7. vijek p.n.e.) čiji je osnivač Tales, kod Pitagore i dugih. O trouglu je detaljno izloženo u prvoj knjizi Euklidovih *Elelemenata*.

Uglovi na osnovici jednakokrakog trougla međusobno su jednaki.
Tales

Neka saznanja o jednakokrakom i pravouglom trouglu nalaze se i u Rajndovom papirusu. Stav o jednakosti uglova na osnovici jednakokrakog trougla bio je poznat Vaviloncima prije 4000 godina.

Heron je za trougao koristio simbol ∇. Obilježavanje trougla slovima nalazimo kod Grka; Euklidova simbolika za trougao je slična današnjoj.

Englez Ričard Rolinson je stranice trougla označavao slovima A, B, C tako da je A bila najduža, a C najkraća stranica. Uglove nasuprot stranica A, B, C obilježavao je redom a, b, c.

Grci su se veoma rano počeli zanimati za svojstva trougla kao što su, na primjer, jednakost uglova na osnovici jednakokrakog trougla, zbir uglova u trouglu itd. Teorema o zbiru uglova u trouglu dugo se smatrala jednom od najvažnijih teorema. Ona se pripisuje Pitagori iako neki istoričari geometrije tvrde da je bila poznata i Talesu, koji je boraveći u Egiptu upoznao metode za premjeravanje zemljišta, usavršio ih i dao im oblik sistematskog teorijskog znanja.

Euklid je sistematizovao znanja o trouglu. Od njega potiče podjela trouglova na jednakostranične, jednakokrake i raznostranične:

- trougao
  - jednakostranični
  - jednakokraki
  - raznostranični

Iz ove klasifikacije proizlazi da jednakostranični trougao nije jednakokraki. Danas je uobičajena sljedeća podjela trouglova:

- trougao
  - jednakokraki
    - jednakokraki (sa dvije jednake strane)
    - jednakostranični
  - raznostranični

Ovom podjelom je obezbijeđeno da svi stavovi o jednakokrakom trouglu važe i za jednakostranični.

Euklid dijeli trouglove i prema vrsti uglova:

- trougao
  - pravougli
  - kosougli
    - oštrougli
    - tupougli

Navedene podjele trouglova najvjerovatnije potiču od Egipćana.

Euklid je u *Elementima*, pored ostalog, izložio i stavove o odnosu stranica trougla, o odnosu uglova trougla kao i o odnosu između stranica i uglova. Nalazimo ih i kod Aristotela.

> *Ako su u trouglu međusobno jednaka dva ugla, onda moraju biti međusobno jednake i stranice koje leže naspram jednakih uglova.*
>
> *Euklid*

Podudarnost trouglova

Euklid u prvoj knjizi *Elemenata* definiše podudarnost figura pomoću kretanja: "*Ono što se može poklopiti, jednako je među sobom*" kao i stavove o podudarnosti trougla.

> *Ako dva trougla imaju jednake po jednu stranicu i na njoj dva nalegla ugla, onda su ta dva trougla podudarna.*
>
> Proklo, komentator Euklidovih *Elemenata*, navodi da je Tales koristio ovaj stav da bi izračunao udaljenost broda od kopna. Ovu teoremu Euklid je iskazao u mnogo komplikovanijem obliku nego što je to do tada činjeno. Dokaz ove teoreme dao je i al-Nairizi (oko 910.). I kasnije se ova teorema koristila za praktična mjerenja terena. Postoji priča prema kojoj je jedan od Napoleonovih inženjera koristeći ovu teoremu omogućio prebacivanje vojske preko rijeke.

Euklid je u *Elementima* izložio tri stava o podudarnosti trouglova dok se četvrti stav pojavljuje tek u 18. vijeku kod matematičara Volfa.

Lajbnic u jednom neobjavljenom rukopisu iz 1679. godine uvodi oznaku za podudarnost $\simeq$. Od Karla Molvejda (1824) potiče simbol $\cong$ za podudarnost geometrijskih figura koji se i danas koristi.

Stav o podudarnosti trouglova kojima su jednake sve tri stranice skraćeno nazivamo stav SSS. Slično, ostali stavovi imaju oznake SUS, USU i SSU. Njih je uveo Julius Vorpicki, profesor gimnazije u Berlinu.

Obrazac za izračunavanje površine trougla kome su poznate tri stranice a, b i c dao je Heron:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. Arapi su ovu formulu pripisivali Arhimedu.

Arhimed u svojim radovima spominje težište i težišnu liniju. Heron je u *Mehanici* iskazao stav da težište dijeli težišnu liniju u omjeru $2:1$. Ova teorema tek u 19. vijeku ulazi u sastav elementarne geometrije. Stav o sjecištu visina trougla prvi izlaže Arhimed, a stav o sjecištu simetrala uglova i simetrala stranica trougla dao je Euklid.

U prvoj knjizi *Elemenata* se po prvi put sistematski izlažu zadaci o osnovnim geometrijskim konstrukcijama kao što su: konstruisati jednakostranični trougao, upisati i opisati krug datom trougao, itd. Interesantno je da Euklid u *Elementima* ne govori o tome da se visine trougla sijeku u jednoj tački - ortocentru. Za ovu činjenicu su znali Arhimed, Papus i Proklo.

Primjena formule

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

zahtjeva određivanje kvadratnog korijena konkretnog broja. To je navelo Herona da formuliše zadatak: "*Naći sve trouglove s cjelobrojnim stranicama čija je površina takođe izražena cijelim brojem*".

Rješenje ovog problema su, na primjer, trouglovi sa stranicama:

$a=6,\ b=15,\ c=20;$

$a=9,\ b=10,\ c=17;$

$a=13,\ b=14,\ c=15.$

U starom vijeku nisu razmatrane karakteristične tačke trougla. To se radi tek kasnije; Ojler 1765. godine rješava zadatak:

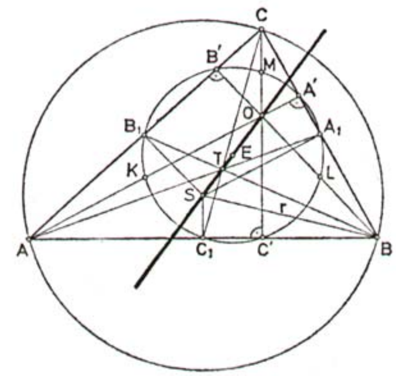
> *Ako je zadano središte upisane kružnice, težište i sjecište visina, treba konstriusati trougao*.

U 19. vijeku dolazi do novih saznanja o trouglu. Fojerbah je 1822. godine izložio teoremu o *kružnici devet tačaka* (*Fojerbahova kružnica*): *Središte stranica trougla* (A_1, B_1, C_1); *podnožja visina* (A', B', C'), *i središta odrezaka visina od ortocentra* O *do tjemena* (K, L, M) *leže na jednoj kružnici* (sl. 39).

Ovaj stav je bio poznat i francuskim matematičarima Ponsleu i Brianšonu (19. vijek).

Ojler je dokazao da u svakom trouglu ortocentar O, težište T i centar S opisane kružnice leže na istoj pravi, koju zovemo *Ojlerova prava* i da važi $2|ST| = |TO|$. Fojerbah je pokazao da se centar E *kružnice devet tačaka* nalazi na Ojlerovoj pravi (sl. 39).

Škotski matematičar Robert Simson (1687-1768) dokazao je da podnožja normala spuštenih na stranice datog trougla iz proizvoljne tačke kružnice, opisane oko tog trougla leže na pravi, koju nazivamo *Simsonova prava*. Ovaj stav prije Simsona dokazao je engleski matematičar Valis.



Sl. 39. Fojerbahova kružnica

6. PITAGORINA TEOREMA

> *Kod pravouglog trougla je kvadrat na strani spram pravog ugla (na hipotenuzi) jednak kvadratima na stranama koje obrazuju prav ugao (na katetama).*
>
> *Ako je kod trougla kvadrat na jednoj strani jednak kvadratima na ostalim dvema stranama, onda je ugao koji obrazuju ove dve strane prav.*
>
> 47. i 48. stav prve knjige *Elemenata*

Pitagorina teorema je učenicima jedna od najpoznatijih teorema. Iako se pripisuje Pitagori, bila je poznata Egipćanima, Vaviloncima, Kinezima i Indijcima.

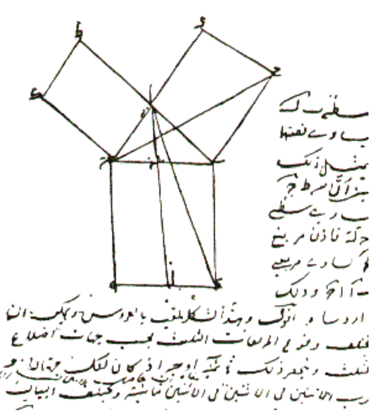
Ako se, na primjer, prilikom gradnje hramova ili piramida trebao konstruisati prav ugao, onda je to činjeno pomoću "egipatskog trougla" - trougla čije su stranice dužine 3, 4 i 5. Takođe, stari narodi su znali konstruisati pravougli trougao sa stranicama dužina 6, 8 i 10; 9, 12 i 15; 12, 16 i 20, odnosno 15, 36 i 39. Na ovaj način je uvedena veza između figure i broja, tj. između geometrije i algebre.

Grci su znali primijeniti Pitagorinu teoremu na kvadrat. Broj $\sqrt{2}$ su predstavljali dijagonalom kvadrata stranice 1. Vavilonci su znali primjeniti Pitagorinu teoremu na kvadrat i pravougaonik.

Smatra se da prvi dokaz Pitagorine teoreme potiče od Pitagore. Prema legendi on je u znak zahvalnosti što je dokazao teoremu bogovima prinio stotinu volova. Do danas su poznati mnogi njeni dokazi. Poznatiji dokazi ove teoreme potiču od arapskih matematičara Bhaskare i Hajama. Interesantno je da jedan dokaz ove teoreme potiče i od američkog predsjednika Garfilda. Euklid prvu knjigu *Elemenata* završava dokazom Pitagorine teoreme.

Nazivi *hipotenuza* za najdužu stranicu pravouglog trougla i *kateta* za stranice između kojih je prav ugao potiče od Grka.

Naveli smo da su stari Egipćani primjenjivali Pitagorinu teoremu pri konstrukciji pravog ugla pomoću trougla čije su stranice dužine 3, 4 i 5. Trojku prirodnih brojeva koji su mjerni brojevi dužine stranica pravouglog trougla nazivamo *Pitagorini brojevi*.



Sl. 40. Dokaz Pitagorine teoreme
(arapski rukopis iz 14. vijeka)

7. ČETVEROUGLOVI I MNOGOUGLOVI

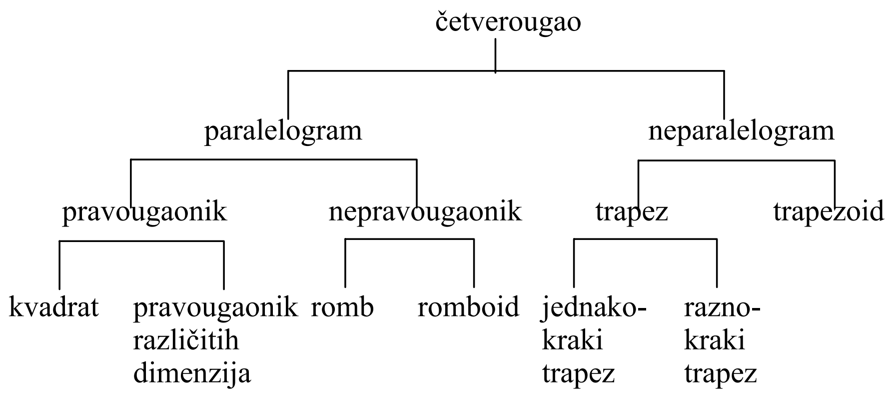
Egipćani i Vavilonci su od četverouglova poznavali kvadrat, pravougaonik, jednakokraki i pravougli trapez. Prema Proklu, Euklid prvi proučava paralelogram iako je izvjesno da je za neka njegova svojstva znao i Pitagora.

U prvoj knjizi *Elemenata* od četverouglova definisani su kvadrat, pravougaonik, romb, romboid i trapez:

> *Od četverostranih figura kvadrat je jednakostran i sa pravim uglovima; pravougaonik je sa pravim uglovima, no nije sa jednakim stranama; romb sa jednakim stranama, no nije sa pravim uglovima; romboid sa jednakim naspramnim stranama i sa jednakim naspramnim uglovima, no nije ni jednakostran ni sa pravim uglovima. Ostale četverostrane figure neka se zovu trapezi.*

Iz ovih definicija proizlazi da kvadrat nije ni pravougaonik ni romb. Paralelogram se pojavljuje u prvoj knjizi *Elemenata* iako ga Euklid nije definisao. Neki istoričari matematike smatraju da je on svjesno izostavio definiciju paralelograma, jer ta riječ u grčkom jeziku je građena tako da je potpuno jasna već iz svoje gramatičke forme. Tek u 19. vijeku paralelogram dobija ravnopravan status sa ostalim četverouglovima.

Iz Euklidovih definicija četverouglova proizlazi njihova klasifikacija u kojoj nema paralelograma. Pretpostavlja se da ona potiče od Egipćana. Heron je dao podjelu četverouglova, sličnu Euklidovoj, ali je u nju uključio i paralelogram:



Euklid pod trapezom podrazumijeva četverouglove koji nisu paralelogrami. Naziv *trapez* u današnjem smislu prvi je upotrebio starogrčki matematičar Posidonije (1. vijek), a tek u 18. vijeku taj pojam poprima značenje koje ima i danas.

Stav o srednjoj liniji trapeza bio je poznat Egipćanima i Vaviloncima; od Grka za nju je znao Heron.

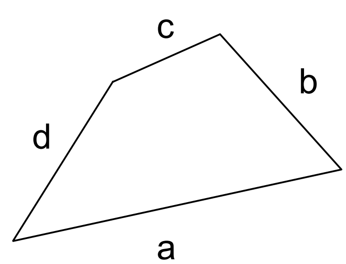
Grci su koristili oznake za geometrijske figure; Papus je, na primjer, četverougao obilježavao □, dok je Heron za pravougaonik koristio simbol ▭ .

Pitagorejci su poznavali odnos površina paralelograma i trougla. Takođe, bavili su se problemom pretvaranja jedne geometrijske figure u neku drugu figuru jednake površine.

Stavovi o svojstvima dijagonala i uglova javljaju se kasnije (Proklo - 5. vijek, Klavije - 16. vijek). Euklid je u *Elementima* dokazao stav o zbiru uglova u četverouglu. Proklo određuje zbir uglova pojedinih četverouglova. U 15. vijeku Regiomontanus je dokazao stavove o zbiru unutrašnjih i vanjskih uglova n-tougla.

Površina

Egipćani su prije 4000 godina znali odrediti površinu pravouglog trougla i trapeza. U Egiptu se i poslije Euklida površina četverougla određivala kao proizvod poluzbira suprotnih stranica: $S=\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}$ (sl. 41). Ova formula važi za pravougaonik dok primjenjena na proizvoljan četverougao daje rezultat koji sadrži grešku. Egipćani su koristili poseban metod za smanjenje te greške.



Sl. 41.

Brahmagupta (7. vijek) i Mahavira (9. vijek) su izračunavali površinu konveksnog četverougla koristeći formulu $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, gdje je s poluobim četvorougla sa stranicama a, b, c, d. Ovaj obrazac važi samo ako je četvorougao tetivni; za $d=0$ dobije se Heronov obrazac za površinu trougla.

Brahmagupta i Mahavira za računanje dužina dijagonala m, n četvorougla sa stranicama a, b, c, d primjenjuju formule:

$$m=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}, \quad m=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ab+cd}}.$$

Početkom 17. vijeka do ovog obrasca došao je Snel, holandski matematičar i astronom.

Mnogouglovi

Konstrukcija pravilnih mnogouglova bila je poznata Pitagorejcima. Euklid je u *Elementima* dao konstrukcije pravilnog trougla, četverougla, petougla, šestougla i petnaestougla. On ne koristi termine *mnogougao* i *pravilan mnogougao*. Pravilan petougao naziva petougao sa jednakim stranicama i jednakim uglovima; slično je ako se radi o pravilnom šestouglu itd.

Heron je odredio površine pravilnih mnogouglova, proučavao odnos između stranice i poluprečnika opisane, odnosno upisane kružnice.

Poslije zatišja od oko 1000 godina zahvaljujući Arapima ova i druga znanja o pravilnim mnogouglovima, do kojih su došli Grci, prenose se u Evropu. Sa njima se upoznaju i razrađuju ih mnogi matematičari kao na primjer Nemorari (13. vijek), Snel (17. vijek) i Ležandr (18. vijek).

Evropski matematičari su poklanjali veliku pažnju problemu kostrukcije pravilnog n-tougla. Rješenje ovoga zadatka se svodilo na dijeljenje kružnice na n jednakih dijelova. Renesansni umjetnik i naučnik Leonardo da Vinči proučava kako geometrija može koristiti ciljevima slikarstva i pri tome navodi konstrukcije nekih pravilnih mnogouglova.

Osnovno pitanje vezano za konstrukciju pravilnih mnogouglova bilo je:

Koji pravilni mnogouglovi se mogu konstruisati samo lenjirom i šestarom?

Odgovor je pronašao devetnaestogodišnji Gaus, jedan od najvećih matematičar svih vremena. On je dokazao sljedeću teoremu:

Pravilan mnogougao sa n *stranica može se konstruisati šestarom i lenjirom ako i samo ako je* $n=2^s p_1 p_2 \ldots p_k$ *, gdje je* s *nenegativan cijeli broj a* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *različiti Fermaovi prosti brojevi* ($k>0$) *ili je* $n=2^s$, *gdje je* s *cijeli broj veći od* 1.

Fermaovi brojevi su brojevi oblika $F_n=2^{2^n}+1$, gdje je n proizvoljan cijeli nenegativan broj. Ovo Gausovo otkriće uticalo je na to da se poveća interes za izučavanje Fermaovih brojeva. Međutim, sve do danas nije pronađen ni jedan prost Fermaov broj veći od $F_4=65537$.

Poslije Gausovog otkrića bilo je jasno da se, pored već poznatih konstrukcija pravilnih mnogouglova (na primjer, sa 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 stranica), mogu lenjirom i šestarom konstruisati pravilni mnogouglovi sa 17, 34, 68, 126, 252, 257,... stranica. Takođe, zahvaljujući Gausu bilo je jasno da se lenjirom i šestarom ne mogu konstruisati pravilni mnogouglovi čiji je broj stranica: 7, 9,11,13,14,18,19,...

Stari Grci su došli do približnih konstrukcija nekih pravilnih mnogouglova. Heron je pronašao približnu konstrukciju pravilnog devetougla.

Karl Fridrih Gaus (1777-1855), jedan od najvećih matematičara svih vremena, je 1796. godine pokazao da se pravilni sedamnaestougao može konstruisati samo pomoću lenjira i šestara. Ovo otkriće devetnaestogodišnjeg Gausa izazvalo je senzaciju. Poslije toga Gaus je odlučio da se posveti matematici.

8. KRUŽNICA I KRUG

> *Kružnica je ravna figura omeđena takvom jedinom linijom (koja se zove periferija), da su sve prave povučene od jedne tačke, koja se nalazi u samoj figuri, prema toj liniji (prema periferiji kruga) međusobno jednake.*
>
> *Prečnik kruga je svaka prava što prolazi kroz središte kruga a ograničena je sa svake strane periferijom kruga; on polovi krug.*
>
> *Euklid*

Euklid kružnu liniju odnosno kružni luk naziva *periferija kruga*. On umjesto poluprečnika govori o *pravcu iz centra* ili *otvor šestara*. U njegovo vrijeme stavovi o krugu su iskazivani pomoću prečnika, a ne kao što je danas uobičajeno pomoću poluprečnika. Tako je bilo sve do početka srednjeg vijeka. Termin *poluprečnik* prvi je upotrijebio Boecije (oko 510. godine). Euklid za *tetivu* koristu naziv "*prava u krugu*" misleći pri tome na odsječak prave, tj. na duž. Papus (3. vijek) i Erigon (17. vijek) upotrebljavaju jednostavnu oznaku za krug: $\bigcirc$. Simbol $\frown$ za *kružni luk* uveo je Erigon.

Arhimed u svome djelu *O mjerenju kruga* određuje obim i površinu kruga. Ono se sastoji od tri teoreme:

(i) *Svaki krug jednak je pravouglom trouglu, pri čemu je poluprečnik kruga jednak jednoj kateti (uspravnoj), a obim kruga drugoj kateti (osnovici) trougla.*

(ii) *Krug prema kvadratu nad prečnikom odnosi se kao 11 prema 14.*

(iii) *Obim svakog kruga jednak je trostrukom prečniku s dodatkom koji je manji od sedmog dijela, a veći od deset sedamdesetprvih prethodnog.*

Proklo pripisuje Talesu otkriće i dokaz teoreme da dijametar polovi krug.

Grčki matematičari su poznavali *kružni isječak* (Euklid ga naziva *sektor*), *odsječak*, *centralni* i *periferijski ugao*, *tangentu* te *dиralište*. Euklid je stavove o kružnici izložio u trećoj knjizi *Elemenata*. Grci su znali i stavove o *tangentnom* i *tetivnom četverouglu*. Obratne teoreme ovih stavova daju Klavije (1574) i Vijet (1595). Indijci (12. vijek) su znali za tetivni i tangentni četverougao. U to vrijeme kod Indijaca, a kasnije i na Zapadu, proučavaju se svojstva kružnice, određuje njena površina i rješavaju konstruktivni zadaci u vezi sa kružicom.

π

Omjer obima kruga i njegovog prečnika je konstantan. Za oznaku ovog omjera koristi se π, prvo slovo grčke riječi *periferija* (περιφερια) i naziva se *Ludolfov broj* prema Ludolfu van Cojlenu (1540-1610), holandskom profesoru matematike. On je odredio π sa tačnošću na 35 decimala. Na njegovom nadgrobnom spomeniku je uklesan taj broj. Engleski matematičar Vilijam Džons je 1706. godine predložio da se za omjer obima kruga i njegovog prečnika koristi simbol π. Ojler je prihvatio ovu oznaku, koja je prvi put štampana u jednom njegovom radu 1737. godine Od tada je stalno u upotrebi.

Johan Bernuli je 1739. u pismu Ojleru koristi oznaku c, da bi sljedeće godine u pismu upotrebljavao simbol π.

Vrijednost za π Egipćani su uzimali $\left(\frac{16}{9}\right)^2$. U Rajndovom papirusu ističe se da je površina kruga jednaka površini kvadrata čija je stranica $\frac{8}{9}$ promjera kruga, tj.

$$\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3{,}16\,.$$

Osnova Keopsove piramide je kvadrat stranice 230m; *njena visina je* 147m. *Omjer obima osnove piramide i njegove visine je približno jednak* 2π:

$$\frac{\text{obim osnove}}{\text{visina}} = \frac{4 \cdot 230}{147} = 6{,}26$$

Vavilonci su za približnu vrijednost broja π uzimali 3, a Heron $\frac{22}{7}$. Arhimed određuje obime krugu upisanih i opisanih pravilnih mnogouglova sa 6, 12, 24, 28, 48 i 96 strana te nalazi $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Ova aproksimacija prelazi i u kulture drugih zemalja (Indija, Kina, Japan) i dugo se smatralo tačnom vrijednošću broja π.

U *Bibliji* je opisana Solomonova gradnja bazena u Jeruzalemu :

> *deset lakata bješe mu od jednog kraja do drugoga, okruglo unaokolo i pet lakata bješe visoko a uokolo mu bješe trideset lakata.*

Iz navedenih podataka (prečnik bazena je 10, a obim 30) dobije se da je $\pi = 3$. Ova približna vrijednost za π naziva se *biblijskom*.

Neke približne vrijednosti broja π kroz istoriju:

Ptolomej (150)	$\frac{377}{120}=3{,}1416$
Kineski matematičari:	
Čang Hong (78-139)	$\sqrt{10}$
Van Fan (229-267)	$\frac{142}{45}=3{,}1555$
Indijski matematičari:	
Ariabhata (530)	$\frac{62832}{20000}=3{,}1416$
Bhaskara (1150)	$\frac{3927}{1250}=3{,}1416$
Evropski matematičari:	
Tiho Brahe (1580)	$\frac{88}{\sqrt{785}}=3{,}1409$
Fibonači (1202)	$\frac{864}{275}=3{,}141818$
Vijet (1540-1603	$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots$
Džon Valis	$\frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\cdot\ldots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdot\ldots}$
Lajbnic	$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\ldots$

Slovenac Jurij Vega (1794) je izračunao π na 140 decimala. 1853. godine bila je poznata približna vrijednost broja π na 707 decimala.

Na svjetskoj izložbi u Parizu (1937) na kupoli matematičkog paviljona bila je ispisana tadašnja približna vrijednost broja π.

Danas se, zahvaljujući računarima, π može tačno odrediti i do stotinu miliona decimala, ali to nema nikakve praktične vrijednosti.

Bifonov problem

Broj π se može odrediti eksperimentalno na jedan, na prvi pogled, neobičan način:

Bacamo iglu na ravnu površinu, koja je ispresijecana paralelnim pravama, između kojih je širina jednaka dužini igle. Ovaj postupak ponovimo više puta i pri tome brojimo koliko je puta igla presjekla neku od prava. Broj bacanja igle se udvostruči i podijeli brojem koliko je puta igla pala na pravu. Rezultat je približna vrijednost broja π.

Matematičar Volf (1850) je izveo 5000 pokusa i dobio je vrijednost π = 3,1596.

U Parizu je izložen aparat koji demonstrira ovaj eksperiment.

9. PROPORCIONALNOST. SLIČNOST.

Ideja omjera i proporcije javila se davno. O tome svjedoče hramovi u starom Egiptu, piramide u Gazi, persijski dvorci, indijski i drugi spomenici. U Moskovskom papirusu se nalazi zadatak u kojem je razmatran omjer veće i manje katete u pravouglom trouglu.

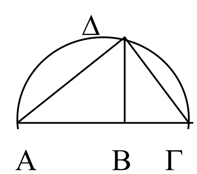
Euklid je u petoj knjizi *Elemenata* izložio teoriju proporcija. Pretpostavlja se da ona potiče od Eudoksa. Euklid algebarske veličine interpretira pomoću geometrijskih oblika i zato se sadržaji ove knjige mogu svrstati u geometrijsku algebru. U šestoj knjizi *Elemenata* teorija proporcija se primjenjuje na geometrijske figure i prema tome predstavlja izlaganje teorije sličnosti. Veći dio sadržaja ove knjige i danas se nalazi u udžbenicima geometrije.

Za pozitivne brojeve a i b *geometrijska sredina* G je definisana izrazom $G = \sqrt{a \cdot b}$. Euklid je naziva *srednja proporcionala* i izlaže je u geometrijskom obliku. U šestoj knjizi *Elemenata* rješava zadatak:

"*Za dve date duži konstruisati njihovu srednju proporcionalu*.

Neka su date dve duži ΑΒ i ΒΓ.

Treba za ΑΒ i ΒΓ naći srednju proporcionalu (sl. 42). Postavimo ih (uzastopce) na pravoj, nacrtajmo nad ΑΓ polukrug ΑΔΓ, povucimo kroz tačku Β pravu ΒΔ upravno na ΑΓ i spojimo Δ sa Α i sa Γ.



Sl. 42.

Pošto je ugao ΑΔΓ u polukrugu, on je prav. A kako je u pravouglom trouglu ΑΔΓ iz pravog ugla povučena normala ΔΒ na osnovici, ΔΒ je srednja proporcionala između odsečaka osnovice ΑΒ i ΒΓ.

Na ovaj način je za dve date prave ΑΒ i ΒΓ konstruisana srednja proporcionala ΔΒ. A to je trebalo izvesti."

Proporcionalnost odsječaka koje na dvjema pravama obrazuju dvije paralelne prave bila je poznata i Vaviloncima. Ovaj stav se pripisuje Talesu i u geometriji je poznat pod nazivom *Talesova teorema*.

Kako je Tales izmjerio visinu Keopsove piramide

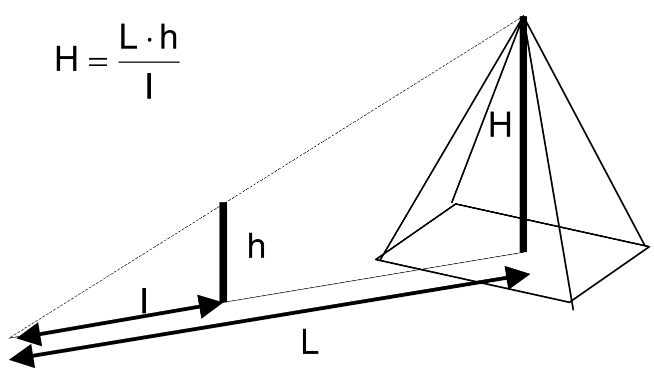
Talesa, koji se nalazio u blizini Keopsove piramide, upita jedan sveštenik: "Koliko je ona visoka?" Poslije kraćeg razmišljanja Tales odgovori da će visinu odrediti na jednostavan način.

Na pijesku je odmjerio svoju visinu, stao na kraj ove izmjerene dužine i sačekao da njegova sjenka bude duga tačno onoliko kolika je dužina njegovog tijela. U tom trenutku i dužina sjenke piramide mora biti jednaka visini piramide.

Tales je dao i uputstvo kako se može odrediti visina piramide "u ma koje doba dana": "Zabode se štap u pjesak i uporedi se dužina štapa sa dužinom njegove sjenke. Visina piramide se dobije ako se dužina sjenke piramide pomnoži s dobivenim brojem" (sl. 43).

$$l : h = L : H$$

$$H = \frac{L \cdot h}{l}$$



Sl. 43. Kako je Tales odredio visinu piramide

Svojstva sličnih figura se primjenjuju pri izradi geografskih karata, planova, crteža i sl.

Do 16. vijeka proporcije su uglavnom zapisivane riječima, u cjelosti ili skraćeno. Bilo je rijetkih pokušaja zapisivanja proporcija uvođenjem posebnih oznaka. Tako je u jednom indijskom rukopisu iz 12. vijeka proporcija $10 : \frac{163}{60} = 4 : \frac{163}{150}$ zapisana na sljedeći način:

10	163	4	163
1	60	1	150

U nekim srednjovjekovnim rukopisima na arapskom jeziku proporcija $7 : 12 = 84 : 144$ je pisana

$$144 \therefore 84 \therefore 12 \therefore 7 .$$

Dekart bi ovu proporciju pisao $7 \mid 12 \mid 84 \mid 144$.

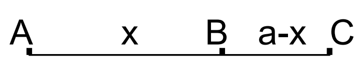
Savremeni način pisanja proporcije uveo je Lajbnic 1693. godine. I oznaka za sličnost $\sim$ potiče od njega (1679). Ovaj simbol najvjerovatnije je modifikacija prvog slova latinske riječi *similis* (sličan).

Zlatni presjek

Neka tačka B dijeli duž AC na dva dijela tako da se cijela duž AC odnosi prema većem dijelu AB=x kao njen veći dio AB prema manjem dijelu BC=a-x, tj.

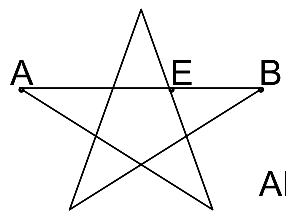
$$a:x=x:(a-x).$$

Tada kažemo da tačka B dijeli duž AC po *zlatnom presjeku* (sl. 44).



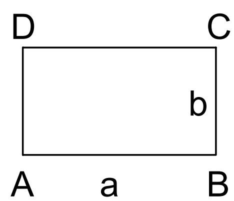
Sl. 44.

Pojam i način konstrukcije zlatnog presjeka nalazimo u Euklidovim *Elementima*. I Pitagorejci su znali za njega. Shvaćali su ga kao nešto savršeno harmonično. Njihov simbol zvjezdasti petougao ima svojstvo da svaka od pet duži, koje je obrazuju, dijeli dvije od preostalih duži po zlatnom presjeku (sl. 45).



AB:AE=AE:EB

Sl. 45. Zvjezdasti petougao



Sl. 46. Zlatni pravougaonik

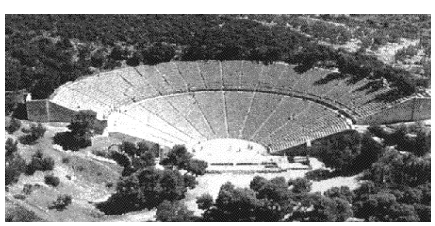
Ako za pravougaonik ABCD (sl. 46) važi

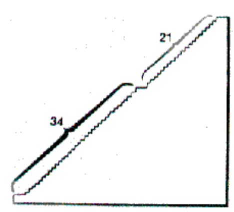
$$(a+b):a=a:b,$$

onda se on naziva *zlatni pravougaonik*.

Zlatni presjek se pojavljuje u mnogim djelima klasične arhitekture, slikarstva i umjetnosti uopšte čiji su autori, na primjer, Fidija, Ticijan i Leonardo da Vinči.

Grci su gradili amfiteatar na dva nivoa tako da su se brojevi redova odnosili po zlatnom presjeku (sl. 47).





(34+21):34=34:21

Sl. 47.

10. ANALITIČKA GEOMETRIJA

Tri momenta su značajna u razvoju analitičke geometrije:

1. pronalazak koordinatnog sistema;
2. uspostavljanje veze između algebre i geometrije;
3. grafički prikaz funkcije $y=f(x)$.

Osnivačem *analitičke geometrije* smatra se Dekart. U *Geometriji* (1637) je dao osnovne pojmove analitičke geometrije izloživši načela analitičke metode za rješavanje geometrijskih problema. Dekartova metoda sastoji se u tome što se geometrijskom objektu, posmatranom u odnosu na koordinatni sistem, dodjeljuju brojne veličine. Na taj način se operiše jednačinama u kojima se te veličine pojavljuju kao poznate ili nepoznate.

Metoda koordinata bila je poznata mnogo prije Dekarta. Egipćani su najvjerovatnije prvi koristili ovu metodu kada je poslije poplava trebalo premjeriti zemljište. Elemente koordinatnog sistema nalazimo i kod Grka. Hiparh (2. vijek p.n.e.) je određivao položaj pojedinih mjesta na Zemlji. Pri tome je uveo geografsku širinu i dužinu mjesta, što je već jedna vrsta koordinatnog sistema. Slično su postupali i grčki astronomi da bi odredili položaj zvijezda prema Zemlji. Rimski geodeti su primjenjivali pravougli koordinatni sistem prilikom premjeravanja zemljišta.

Od grčkih matematičara naročito treba spomenuti Apolonija i njegovo djelo *Konusni presjeci* gdje je elipsu, parabolu i hiperbolu definisao kao presjeke kružnog konusa. Iako Apoloniju nije bila poznata naša savremena metoda koordinata neki istoričari matematike smatraju da se u njegovom djelu nalaze nagovještaji ideja ove metode. Nazivi elipsa, parabola i hiperbola potiču od Apolonija.

Francuski matematičar Pjer Ferma se prije publikovanja Dekartove *Geometrije* koristio metodom koordinata. Samostalno i nezavisno od Dekarta došao je do osnovnih ideja analitičke geometrije. Ali prioritet se daje Dekartu jer je njegova *Geometrija* prvo štampano djelo u kojem se iznose ideje analitičke geometrije.

Već kod grčkih matematičara nalazimo rješavanje algebarskih problema geometrijskim metodama. Euklid izlaže teoriju brojeva u geometrijskom obliku. Ove ideje prihvataju i Arapi; Omar Hajam (oko 1100) u svojim radovima iz algebre koristi geometrijsku metodu. U Evropi Fibonači primjenjuje algebarske metode u rješavanju geometrijskih problema o trouglu.

Uvođenjem slova za oznaku brojeva Vijet je omogućio izgradnju simboličke algebre i njenu široku primjenu na geometrijske probleme. Dubrovčanin Marin Getaldić, savremenik Vijeta, je shvatio značaj simboličke algebre i njene primjene u geometriji. Njegovo glavno djelo *O matematičkoj analizi i sintezi* se odlikuje dosljednom primjenom algebre u geometriji. Ono je objavljeno, poslije njegove smrti, u Rimu 1630. godine i predstavlja prvu štampanu knjigu geometrijske algebre.

Nikol Orem, istaknuti predstavnik Pariske škole 14. vijeka, uvodi grafičko predstavljanje kretanja koristeći pri tome horizontalne i vertikalne duži, gdje horizontalna duž još nije shvaćena kao apscisa.

Poslije Dekarta niz istaknutih matematičara je proširio njegove ideje. Njutn 1704. godine uvodi negativne koordinate. Na taj način omogućava grafičko predstavljanje u sva četiri kvadranta što neki matematičari poslije njega nisu nikako prihvatali. Značajan doprinos sistematizaciji analitičke geometrije dao je francuski matematičar Lakroa (1765-1843).

Leonard Ojler uvodi polarni koordinatni sistem, rješava probleme transformacije koordinata i izlaže analitičku geometriju u prostoru.

Današnji nazivi koje susrećemo u analitičkoj geometriji uvođeni su postupno. Riječi *apscisa* i *ordinata* upotrebljava Apolonije ali sa sasvim drugim značenjem. Izraz *apscisa* javlja se u 17. vijeku da bi kao stalni matematički izraz u današnjem smislu bio prihvaćen tek u 18. vijeku. Naziv *ordinata* u današnjem značenju potiče od Paskala. Lajbnic je uveo izraz *koordinata* i prvi je smatrao obje koordinate potpuno ravnopravnim. *Ishodište* kao početna tačka za mjerenje apscisa upotrebljava se od kraja 17. vijeka.

11. VEKTORI

Naziv *vektor* dolazi od latinske riječi *vehere* što znači povlačiti. Žan Robert Argan (1768-1822), matematičar iz Ženeve, upotrebljava izraz *usmjerena dužina*, a Koši- *geometrijska veličina*.

Proučavajući fizičke veličine, kao što su put, brzina, sila i sl, a koje su određene sa tri podatka (intenzitetom, pravcem i smjerom) fizičari zapravo razmatraju vektore i njihova svojstva. Njutn navodeći posljedicu svog Trećeg zakona:

> *Tijelo na koje istovremeno djeluju dvije sile, opisaće dijagonalu paralelograma u isto vrijeme kao što bi opisalo njegove strane sa odvojenim silama*,

zapravo formuliše pravilo o slaganju (sabiranju) vektora koje nazivamo *pravilo paralelograma*.

Pojam vektora je u uskoj vezi sa problemima iz statike kao što je, na primjer, slaganje sila. Simon Stevin je 1587. objavio *Elemente statike*, gdje razmatra slaganje sila. Pri tome iznad slova kojom označava silu stavlja strelicu. Inače, on je prvi uveo slaganje međusobno normalnih sila.

Kasnije se vektor posmatra kao duž kod koje je jedna njena krajnja tačka početak, a druga kraj. U savremenoj matematici teorija vektora se izlaže u okviru vektorske algebre.

Teoriju vektora su razvili gotovo u isto vrijeme, nezavisno jedan od drugog, Hamilton i Grasman. Nazive *skalar* i *vektor* uveo je Hamilton u jednoj raspravi iz 1845. godine.

Uloga i pojava vektora je vezana s grafičkim predstavljanjem kompleksnih brojeva.

12. GEOMETRIJSKA TIJELA

Dio geometrije koja proučava svojstva prostornih figura naziva se *stereometrija*; riječ *stereometrija* dolazi od grčkih riječi *stereos* - prostor i *metreo* - mjeriti. Većina naziva geometrijskih tijela potiče iz grčkog jezika koji se preko latinskog prenose u mnoge evropske jezike. Za razvoj stereometrije najzaslužniji je Euklid. Do tada je planimetrija bila u prvom planu. Zato i nazivi u stereometriji nisu bili standardizovani, za razliku od planimetrije. Tako, naprimjer, naziv paralelopiped se javlja tek u vrijeme Euklida.

Egipćani i Vavilonci su znali odrediti zapremine nekih tijela pri čemu su ih uglavnom posmatrali kao konkretne posude; na primjer, namijenjene za ostavljanje žita. Proučavanje tijela se svodilo na određivanje njegove zapremine te se pod pojmom tijelo podrazumijevala zapremina. Tako je bilo i kod Euklida. Naziv zapremina (volumen) kao stručni izraz dolazi tek početkom 19. vijeka.

Prizma

Prizma je latinski oblik grčke riječi πρισμα. Površinu kocke, prizme i valjka Egipćani, Vavilonci, Kinezi i Indijci su računali množeći površinu osnove i visinu. U XI knjizi *Elemenata* Euklid, pored ostalog, navodi definicije prizme i kocke:

> *Prizma je prostorna figura sastavljena od ravni, od kojih su dvije, naspramne, jednake, slične i paralelne, a ostale su paralelogrami.*
>
> *Kub je prostorna figura obuhvaćena sa šest jednakih kvadrata.*

Euklid za kocku koristi naziv *kub*, a Heron *kub* i *heksa*.

Jedan od tri najpoznatija grčka problema je *udvajanje kocke*. Prema jednoj legendi za vrijeme epidemije kuge u Atini građani su otišli u proročište u Delosu da traže pomoć. Sveštenik im je savjetovao da Apolonov oltar, koji je bio u obliku kocke, povećaju tako da njegova zapremina bude dva puta veća. Građani Atine su otišli zadovoljni ni ne sluteći da je problem nerješiv.

Piramida

Piramida je latinski oblik grčke riječi kojom su Grci nazivali grobnice egipatskih faraona. Preuzeli su je od Egipćana. Indus Ariabhata (oko 510.) računa zapreminu piramide kao polovinu proizvoda baze i visine. Dugo vremena saznanja o piramidi su bila uglavnom ona koja je izložio Euklid u svojim *Elementima*. Tako je bilo sve do Kavaljerija (1635.) koji je uočio:

Ako dvije prostorne figure presječemo paralelnim ravnima, i ako pri tome odgovarajući presjeci imaju jednake površine, tada te figure imaju jednake zapremine.

Ovaj stav poznat pod nazivom *Kavaljerijev princip* dokazao je Ležandr (1794).

Zarubljena piramida

U 14. zadatku Moskovskog papirusa određuje se zapremina zarubljene piramide. Sličan zadatak se nalazi i u jednom vavilonskom rukopisu pisanom na papirusu. Metodu izračunavanja zarubljene piramide čija je osnova trougao ili kvadrat dao je Heron u svom djelu *Stereometrija*. Današnja formula za zapreminu $V=\frac{1}{3}H\left(B_1+B_2+\sqrt{B_1B_2}\right)$ prvi put se javlja kod Fibonačija (1220). Indijski matematičar Brahmagupta (oko 628) daje zapreminu zarubljene piramide sa osnovama kvadrata stranica a i b i visine h:

$$V = \frac{1}{3}h\left(a^2 + b^2 + ab\right).$$

Interesantno je da kod Egipćana i Vavilonaca, koji su znali odrediti zapreminu zarubljene piramide, nema primjera izračunavanja zapremine "pune" piramide.

Jedna od najpoznatijih egipatskih piramida je Keopsova. Njena visina je 147 *m*; osnova je kvadrat stranice 230 *m*. Stranice osnove su okrenute prema glavnim stranama svijeta (istok, zapad, sjever, jug). Ugao koji bočna strana gradi sa osnovom piramide iznosi približno 52^{o}.

Keopsova piramida ima čudesna svojstva. U njoj se uginule životinje ne raspadaju niti se mlijeko kvari. Ulaz u piramidu je postavljen tačno prema zvijezdi Sjevernjači. Kad svjetlosni zraci sa Siriusa padaju pod pravim uglom na južnu stranu piramide, oni prolaze kroz uski otvor za propuštanje čistog vazduha u kraljevsku sobu i osvjetljavaju glavu balzamovanog faraona.

Dužina stranice osnove piramide iznosi 365 lakata što predstavlja broj dana u godini.

U piramidu je "ugrađen" godišnji kalendar. Sjenka piramide se postepeno smanjuje u toku godine, a kada se završi godina ona nestane te se ponovo pojavi i postepeno povećava.

Engleski matematičar Tomas Simson (1710-1761) poznat je po tzv. *Simsonovoj formuli*, koja se odnosi na određivanje zapremine tijela omeđenog s dvije paralelne osnove:

$$V = \frac{H}{6}\left(Q_d + 4Q_s + Q_g\right),$$

gdje je H rastojanje između osnova, a Q_d, Q_s i Q_g su redom površine donje osnove, srednjeg presjeka te gornje osnove. Obrazac je bio poznat i prije nego ga je Simson otkrio.

Valjak

Riječ valjak (cilindar) dolazi od latinske riječi *cylindrus*, koja je opet u vezi sa grčkom riječi koja znači *kotrljati*. Egipćani su znali odrediti njegovu zapreminu. Heron je odredio površinu omotača uspravnog valjka, a Arhimed kosog valjka.

Kupa

Riječ *konus* (kupa) dolazi od grčke riječi koja značu *klip*. Euklid u XII knjizi *Elemenata* dokazuje sljedeće stavove:

Zapremina kupe jednaka je jednoj trećini zapremine valjka s jednakom osnovom i jednakom visinom.

Omjer zapremine dvije kupe s jednakim osnovama jednak je omjeru njihovih visina.

Grčki matematičari nisu znali za pojam mjere, nego su određujući zapreminu tijela ustvari računali omjer zapremina dvaju tijela.

Arhimed je u djelu *O lopti i valjku* odredio površine omotača kupe i valjka.

Zarubljena kupa Za određivanje zapremine zarubljene kupe Heron je koristio približne metode koju je vjerovatno preuzeo od Egipćana. Grci su prihvatili ovu metodu; njena primjena je pronađen među grčkim rukopisima o aritmetici koji potiču iz 4. vijeka.

Sfera Riječ *sfera* je grčkog porijekla. Arhimed je zapreminu lopte odredio na dva načina. Prvo je dokazao da se

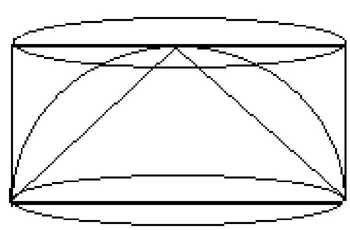
> *zapremina lopte i zapremina valjka opisanog oko te lopte odnose kao 2:3*;

da bi kasnije utvrdio da je

> *zapremina lopte četiri puta veća od zapremine upisane joj kupe*.

Arhimed je odredio površinu sferne kalote kao i zapreminu loptina odsječka čiju je današnju formulu dao Karsten (1768). Zapreminu kuglina sloja izračunao je Ležandr (1724).

Arhimedovi radovi o obrtnim tijelima podstakli su druge matematičare na proučavanje površina i zapremina rotacionih tijela. Ovim problemima bavio se Heron; Papus (3. vijek) je dao opšte pravilo za određivanje zapremine rotacionih tijela. Njegova saznanja će poslije više od 1000 godina primjeniti Kepler u djelu *Stereometrija vinskih bačvi* (1615).



Slika 48.

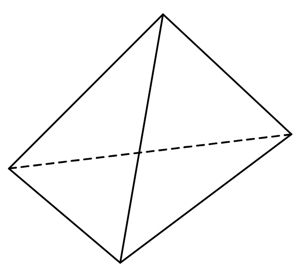
Arhimed je pokazao da za zapremine kupe (K), polulopte (L) i valjka (V) s jednakim osnovama i visinama važi

$$K : L : V = 1 : 2 : 3 .$$

13. PRAVILNI POLIEDRI

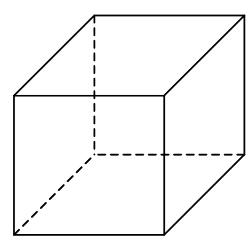
Kod Grka nema zajedničkog naziva za geometrijska tijela. Tako Euklid u tri posljednje knjige *Elemenata* izlaže o geometriji prostora, ali pri tome ne koristi zajednički naziv za tijela. Ti nazivi se javljaju mnogo kasnije.

Dio prostora ograničen sa svih strana poligonima zove se *poliedar*. Poliedar čije su sve strane podudarni pravilni poligoni i svi rogljevi podudarni nazivamo *pravilan poliedar*. Pravilnih poliedara ima svega pet: *tetraedar*, *heksaedar* (kocka), *oktaedar*, *dodekaedar* i *ikosaedar*.



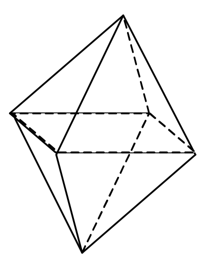
Sl. 49. Tetraedar

Strane *tetraedra* su četiri jednakostranična trougla. U svakom od četiri njegova vrha sastaju se po tri ivice.



Sl. 50. Kocka

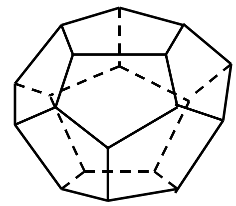
Heksaedar (kocka) je omeđen sa šest kvadrata. U svakom od osam vrhova sastaju se tri ivice, kojih je ukupno 12.



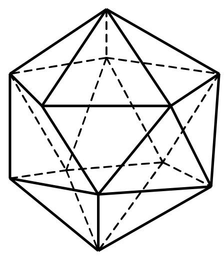
Sl. 51. Oktaedar

Oktaedar je omeđen sa osam jednakostraničnih trouglova; u svakom od šest vrhova sastaju sastaju se četiri ivice.

Dodekaedar je omeđen sa 12 pravilnih petouglova. Ima 30 ivica i 20 vrhova. U svakom vrhu se sastaju 3 ivice.



Sl. 52. Dodekaedar



Sl. 53. Ikosaedar

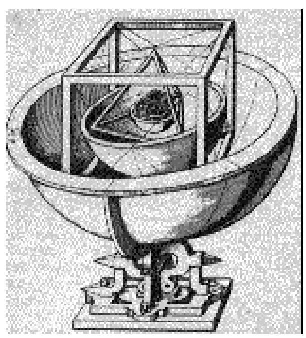
Ikosaedar je omeđen sa 20 jednakostraničnih trouglova, ima 30 ivica i 12 vrhova. U svakom vrhu se sastaje 5 ivica.

Pravilni poliedri se nalaze u prirodi kao kristali nekih hemijskih jedinjenja. Izvjesno je da su Egipćani znali za tetraedar, kocku, oktaedar i ikosaedar. Na nadgrobnim spomenicima Etruraca nađene su urezane slike dodekaedra. Pitagorejci su znali za svih pet pravilnih poliedara. Prema nekim istorijskim izvorima pravilne poliedre je ispitivao Aristej (4. vijek) koji je napisao do sada nepronađeni rad *O poliedrima*. Otkriće pravilnih poliedara se pripisuje Platonu i njegovoj školi te se još nazivaju *Platonovim tijelima*.

Kuhinjska so je sastavljena od kristala koji imaju oblik kocke; dijamant ima oblik oktaedra, a pirit kristalizira u obliku dodekaedra.

Pravilni poliedri se nazivaju i *kosmičkim tijelima*, jer su ih pitagorejci povezivali s nastankom svijeta. Prema njihovom učenju tetraedar, koji ima najmanji broj strana simbolizuje suvoću vatre. Kocka oslonjena na svoju osnovu je najstabilniji poliedar te simbolizuje zemlju. Oktaedar kao najpokretljivije tijelo, slobodno rotira oko prave koja prolazi kroz njegova dva naspramna vrha, je pridružen vazduhu. Ikosaedar ima najveći broj strana i simbolizuje vlažnost vode. Dodekaedar se najviše razlikuje od ostalih pravilnih poliedara, ima dvanaest strana koliko je i zodijačkih znakova i zato mu je kao nebeskom simbolu pridružena vasiona.

Učenje grčkih filozofa o pravilnim poliedrima prihvatio je i dalje razradio Kepler u djelu *Harmonija svijeta* (1619). On je konstruisao model Sunčevog sistema sastavljen od šest sfera i pet pravilnih poliedara, slika 54. Svaka sfera je odgovarala jednoj od šest do tada poznatih planeta: Saturnu, Jupiteru, Marsu, Zemlji, Veneri i Merkuru. Ove sfere su bile razdijeljene sa pravilnim poliedrima koji su bili u njih upisani. U to vrijeme ostale tri planete Pluton, Neptun i Uran nisu bile otkrivene.



Sl. 54. Keplerov model Sunčevog sistema

Posljednja, trinaesta, knjiga *Elemenata* je posvećena pravilnim poliedrima gdje Euklid, pored ostalog, dokazuje da postoji svega pet takvih poliedara.

Prva knjiga *Elemenata* počinje konstrukcijom pravilnog trougla, a posljednja završava konstrukcijom dodekaedra. Zato su neki matematičari mišljenja da je osnovna Euklidova ideja bila da u *Elementima* izloži sva geometrijska znanja koja su neophodna za konstrukciju i razumijevanje pet Platonovih tijela, a ne da raspravlja o osnovama geometrije.

Ojlerova teorema za poliedre

Proučavanje poliedara u grčkoj geometriji je imalo centralno mjesto. Pa ipak Dekartu i Ojleru je ostalo da otkriju jednu od najvažnijih formula koje povezuju broj tjemena (t), ivica (i), i strana (pljosni) (p) konveksnog poliedra.

Ojler polazi od poznatog izraza $(n-2)\pi$ za zbir uglova u n-touglu i pita se da li vrijedi nešto slično za poliedre? Pokušaji sa zbirom diedara te zbirom prostornih uglova ne daju rezultate. Zatim posmatra zbir $\Sigma\alpha$ svih uglova strana, provjerava taj zbir na nizu poliedara i dokazuje : $\Sigma\alpha=2\pi t-4\pi$.
Takođe, dokazuje jednakost $\Sigma\alpha=2\pi(i-p)$.

Posljedica ove dvije jednakosti je tzv. *Ojlerova teorema*:

Označimo sa t *broj tjemena, sa* i *broj ivica, a sa* p *broj strana (pljosni) poliedra. Za svaki konveksan poliedar važi* $t-i+p=2$.

Ovu relaciju prvi je dokazao Dekart 1640. godine, a 1752. je ponovo otkrio i koristio Ojler.

Provjerimo Ojlerovu teoremu za pravilne poliedre.

Pravilni poliedar	t	i	p	t-i+p
tetraedar	4	6	4	2
kocka	8	12	6	2
oktaedar	6	12	8	2
dodekaedar	20	30	12	2
ikosaedar	12	30	20	2

Ojlerova teorema spada u topologiju, matematičku disciplonu novijeg datuma, koja proučava svojstva prostora najopštijeg karaktera.

14. MJERENJE VREMENA

Sa početkom bavljenja zemljoradnjom čovjek je morao da vodi računa o godišnjim dobima. Uvidio je da se ona javljaju u pravilnim vremenskim razmacima. Prvim civilizacijama je bilo poznato da se noću sazvježđa na nebu mijenjaju prema godišnjim dobima. Znali su da prate godišnja doba tako što su raspoznavali koje se zvijezde poslije Sunčevog zalaska pojavljuju na nebu. Vavilonci su još prije 4000 godina utvrdili dužinu godine na 365 dana.

Kalendar je sistem mjerenja vremena koji dijeli vrijeme na dane, nedjelje, mjesece i godine. Kalendarske podjele su zasnovane na kretanju Zemlje oko Sunca i redovnoj pojavi Sunca i Mjeseca. *Dan* je prosječno vrijeme koje odgovara jednoj rotaciji Zemlje oko njene ose. Mjerenje godine se zasniva na jednoj revoluciji Zemlje oko Sunca i zove se *sezonska*, *tropska* ili *solarna godina*. *Solarna godina* ima 365 dana 5 časova 48 minuta i 45,5 sekundi. Stari narodi su računali mjesec kao vrijeme između dva puna mjeseca ili broja dana potrebnog da Mjesec obiđe oko Zemlje (29,5 dana). Ovo vrijeme, zvano *lunarni mjesec*, rezultira u *lunarnu godinu* od 354 dana, koja je za više od 11 dana kraća od solarne godine.

Nedjelja nije proizvod prirodnog fenomena nego je izvedena iz židovske i hrišćanske tradicije koja zahtjeva da se čovjek svaki sedmi dan odmara.

Kalendar

Kod Egipćana godina se sastojala od 12 mjeseci, svaki mjesec od 30 dana, sa pet dodatnih dana što je činilo ukupno 365 dana. Ovaj kalendar je nastao iz prosto praktičnih razloga neprestanim promatranjem i procjenjivanjem prosječne vrijednosti vremenskih intervala između uzastopnih nailazaka poplava; nadolaženje Nila je bio glavni događaj u životu Egipta. Oko 238. godine p.n.e. kralj Ptolemej je naredio da se svake četvrte godine dodaje po jedan dan.

U zemlji bez oblaka kakav je Egipat, posmatranje Sunca je bilo koristan način određivanja vremena, te stoga ne iznenađuje što je ondje nađen najstariji poznat sunčani sat. Dio egipatskog sunčanog sata koji datira iz 1500. godine p.n.e. nalazi se u jednom berlinskom muzeju. Da bi mogli mjeriti vrijeme i noću Egipćani su pronašli vodeni časovnik, tj. *klepsidru*, kako su ga kasnije nazvali Grci. Vodeni časovnik su koristili i Rimljani.

Egipćanima dugujemo podjelu dana na 24 sata, mada egipatski sati nisu bili jednake dužine, jer su u svako doba godine periodi dnevne svjetlosti bili dijeljeni na 12 sati.

Vavilon

U Egiptu je uvijek postojala mogućnost suše ili poplave. Pa ipak Nil je rijetko donosio katastrofu. Tigar i Eufrat, rijeke u Mesopotamiji, su bile daleko manje ujednačene u svom ponašanju od Nila. Zato je izgleda osnova vavilonskog kalendara uvijek bila lunarna. Vavilonski astronomi iz 4. i kasnijih vijekova p.n.e. su sa velikom pažnjom i matematičkom domišljatošću proučavali kretanje Sunca, planeta i Mjeseca.

Lunarna godina je bila kraće od solarne godine. Kako bi se spriječilo da godišnja doba odstupaju, s vremena na vrijeme ubacivan je trinaesti mjesec. Pri tome nije postojao pravilan sistem za umetanje ovog dodatnog mjeseca sve do 5. vijeka p.n.e.

Maje

U Srednjoj Americi Maje su posebnu pažnju poklanjali vremenu. Oni su kao ratarski narod osjećale potrebu za kalendarom te su bilježili dane koristeći pri tome posebne simbole. U njihovom kalendaru mjesec je imao dvadeset dana, svaki je smatran božanskim i karakterističnim. Trinaest mjeseci od po 20 dana je davao ciklus od 260 dana koji je oblikovao jezgro kalendara. To su nazivali sveta godina. Maje su imale i solarnu godinu od 365 dana koja je bila sačinjena od 18 mjeseci od po dvadeset dana i pet umetnutih dana.

Julijanski kalendar

Rimljani su pokušali da svoj građanski kalendar, koji se poput mnogih drevnih kalendara temeljio na kretanju Mjeseca, usklade sa kalendarima zasnovanim na kretanju Sunca. Ti pokušaji su zasnivani na načinu dodavanja ili umetanja jednog mjeseca svake druge godine čija dužina nije konstantna. Naš današnji kalendar je modifikacija kalendara koji je Julije Cezar uveo 1. januara 45. godine p.n.e. i koji je po njemu nazvan *Julijanskim kalendarom*.

Postupajući po savjetu grčkog astronoma Sosigenesa, Julije Cezar je naložio reformu kalendara. Godinu je fiksirao na 365 ¼ dana i uveo prestupnu godinu od 366 dana svake četvrte godine. Naredio je da januar, mart, maj, juli, septembar i novembar imaju po 31 dan, ostali mjeseci 30 dana, s izuzetkom februara, koji je trebalo da ima 29 dana, a u prestupnoj godini 30. Julijanskim kalendarom je utvrđen i redosljed mjeseci u godini i dana u nedjelji; mjesec juli je nazvan juli po Juliusu Cezaru. Kasnije je u čast rimskog cara Cezara Avgusta osmi mjesec nazvan avgust. Tom prilikom ovom mjesecu je dodijeljen isti broj dana kao prethodnom mjesecu na taj način što je februaru oduzet jedan dan. Kako bi se izjeglo da tri mjeseca od 31 dan dolaze zaredom, septembar i novembar su svedeni na 30 dana, a oktobar i decembar povećani na 31.

Prvobitno sačinjeni rimski kalendar je počinjao u proljeće 1. marta. Zato su nazivi za mjesece od septembra do decembra redom izvedeni iz latinskih naziva za brojeve 7, 8, 9 i 10. Od 153. godine p.n.e. rimski konzuli su počeli stupati na dužnost 1. januara te se taj dan računao kao početak nove godine.

Arapi

U islamskom svijeta bili su potrebni matematički obrazovani ljudi koji će biti sposobni da odrede astronomski definisana vremena molitve kao i pravac Meke.

Islamski kalendar je jedan od malobrojnih preostalih čisto lunarnih kalendara. Godina, koja ima 12 lunarnih mjeseci, je kraća od tropske godine za nešto više od deset dana. Islamska era je započela 16. jula 622. godine na prvi dan Muhamedovog bjega iz Meke u Medinu. Okolnosti pod kojima je ovo usvojeno kao početak epohe izložio je al-Biruni (973-oko 1050) u svom velikom djelu *Hronologija drevnih naroda*.

Jevreji

Jevrejski kalendar je nastao iz starog Hebrejskog kalendara i ostao je nepromijenjen do oko 900. godine. To je službeni kalendar moderne države Izrael i koriste ga Jevreji u cijelom svijetu kao religiozni kalendar. Početna godina za hebrejsku hronologiju je 3761. godina p.n.e. Židovski kalendar je lunisolarni baziran na lunarnom mjesecu od 29 dana u alternaciji sa 30 dana.

Gregorijanski kalendar

Problemi koji su se mogli dogoditi uslijed postojanja više kalendara sa različitim početkom brojanja dana u godini i različitim vremenom trajanja veoma slikovito ilustruje sljedeći tekst iz vremena o kojem govori:

> *Ako pretpostavimo da je neki putnik krenuo iz Venecije 1. marta 1245. prvog dana venecijanske godine, on bi se kad stigne u Firencu našao u 1244. Ako bi nakon kratkog boravka ondje nastavio za Pizu, tamo bi već bila započela 1246. godina. Nastavivši svoje putovanje na zapad, ponovo bi se našao u 1245. kad bi ušao u Provansu, a prispjevši u Francusku prije Uskrsa (16. aprila), još jednom bi bio u 1244. godini.*

Julijanski kalendar funkcionisao je sve dok se nije izračunalo da je godina ovog kalendara duža od tropske godine za 11 minuta i 14 sekundi. Zbog te razlike 1582. godine proljetna ravnodnevica je pala 11. marta umjesto 21. marta, tj. deset dana ranije. Da bi se kalendar doveo u sklad sa tropskom godinom papa Grgur XIII je, prema savjetu poznatih astronoma, izvršio reformu Julijanskog kalendara. Razlika od deset dana uklonjena je tako što je propisano da se iza četvrtka 4. oktobra 1582. godine naredni dan računa kao petak 15. oktobar. Da bi se u budućnosti izbjegla odstupanja kalendarske od solarne godine, propisano je da i od vjekovnih godina budu proste po tri uzastopne (npr. 1700, 1800. i 1900.), a prestupna svaka četvrta vjekovna godina, i to ona koja je djeljiva sa 400. Ovako reformisani kalendar poznat je pod nazivom *Gregorijanski kalendar*. On se još naziva i Hrišćanskim kalendarom, jer koristi rođenje Isusa Hrista kao početak računanja.

Vremenom su mnoge zemlje prešle na upotrebu Gregorijanskog kalendara, na primjer Velika Britanija 1752. godine, a Sovjetski Savez 1918. Grci su 1923. godine prihvatili Gregorijanski kalendar za civilnu upotrebu. Mnoge pravoslavne crkve su zadržale Julijanski kalendar.

U Gregorijanskom kalendaru mjeseci su neujednačene dužine te datumi i dani u sedmici variraju svake godine. Zato u novije vrijeme postoje prijedlozi da se postojeći kalendar reformiše tako da bi se dobio tzv. fiksni kalendar. Po jednom takvom prijedlogu godina bi imala 13 jednakih mjeseci i četiri identična kvartala.

ČETVRTA GLAVA

MATEMATIČKA ČITANKA

1. GEOMETRIJSKI PROBLEMI

Tri osnovna klasična geometrijska problema su:

- *udvostručavanje kocke*;
- *kvadratura kruga*;
- *trisekcija ugla*.

Na njihovo rješenje čekalo se više od dvije hiljade godina.

Prije upoznavanja ovih problema potrebno je izložiti pojam *elementarne geometrijske konstrukcije*. Rješavanje konstruktivnog zadatka se sastoji od konačno mnogo tzv. *elementarnih konstrukcija* kao što su, na primjer :

– *konstrukcija prave kroz dvije tačke;*

– *konstrukcija sjecišta dvaju prava;*

– *konstrukcija kruga kojem su dati centar i poluprečnik*.

Geometrijske konstrukcije koje se mogu izvesti samo pomoću lenjira i šestara nazivaju se *elementarne konstrukcije*.

Mnogi matematički zadaci i problemi se rješavaju geometrijski, algebarski ili metodom analitičke geometrije. Obično geometrijska konstrukcija zahtijeva i algebarsku obradu zadatka. Na taj način formiraju se jednačine u kojima se javljaju veličine koje je potrebno konstruisati. Ako je problem sveden na algebarsku jednačinu prvog ili drugog stepena, onda se promatrani zadatak može riješiti elementarnim konstrukcijama.

1.1. Udvostručavanje kocke

Problem udvostručavanja kocke sastoji se u tome da se zadanoj kocki konstruiše kocka dvostruko veće zapremine. O ovom problemu postoji nekoliko legendi. Jednu smo već naveli. Prema drugoj, kralju Ptolemeju II se spomenik njegovog sina, koji je bio sagrađen u obliku kocke, učinio odviše mali te je zatražio da se udvostruči. Graditelji su smatrali da se to može riješiti tako što će se ivica postojećeg spomenika udvostručiti.

Ako sa a označimo dužinu ivice date kocke, a sa x dužinu ivice kocke čija je zapremina dvaput veća od zapremine date kocke, onda je $x^3 = 2a^3$, odakle je $x = a\sqrt[3]{2}$. Dakle, potrebno je konstruisati (lenjirom i šestarom) duž koja je $\sqrt[3]{2}$ puta veća od duži dužine a. Na taj način stereometrijski problem je sveden na planimetrijski. Međutim, $\sqrt[3]{2}$ se ne može kontruisati samo lenjirom i šestarom, za razliku od broja $\sqrt{2}$.

Kako su Grci sve probleme rješavali geometrijski, to su i ovaj pokušali riješiti na isti način: lenjirom i šestarom. Poslije niza neuspješnih pokušaja uvidjeli su da je to nemoguće izvesti na elementaran način.

Grci su pokušali riješiti ovaj problem pomoću krivih drugog reda. Tako je Menehmo (oko 350. g. p.n.e.) dao dva rješenja: jedno pomoću dvije parabole, a drugo pomoću parabole i hiperbole. Platon je za rješenje ovog problema koristio krivu trećeg reda. Udvostručavanjem kocke bavili su se i Apolonije (265-170 p.n.e.), Heron (1. vijek), Dekart, Njutn, Maskeroni (18. vijek) i drugi.

Eratosten je konstruisao aparat za grafičko rješavanje ovog problema.

1.2. Kvadratura kruga

Kvadratura kruga je jedan od najstarijih i najpoznatijih matematičkih problema:

Konstruisati kvadrat čija
je površina jednaka
površini datog kruga.

Ako je poluprečnik zadanog kruga r, a stranica traženog kvadrata x, onda je $r^2\pi=x^2$; odakle slijedi da treba elementarno konstruisati veličinu $x = r\sqrt{\pi}$.

Problem kvadrature kruga rješavali su mnogi matematičari i amateri skoro 2500 godina. U *Rajndovom papirusu* je izloženo pravilo za približno određivanje stranice kvadrata čija je površina jednaka površini datog kruga:

Prečnik kruga treba umanjiti za devetinu i na
taj način se dobije stranica traženog kvadrata.

Grci se nisu zadovoljili sa približnim rješenjima. Prve sačuvane bilješke o problemu kvadrature kruga svjedoče da se njime bavio i Anaksagora (5. vijek p.n.e.), osnivač atinske filozofske škole. Antifon iz Atine (5. vijek p.n.e.) je izračunao površinu kruga tako što je upisivao u njega sve veće pravilne n-tougle. Vjerovao je da će na taj način pomoću lenjira i šestara naći tačnu vrijednost.

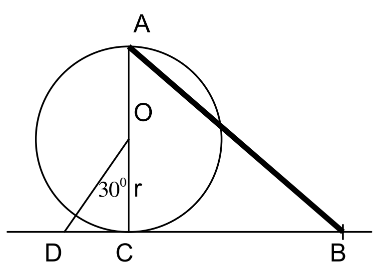
Arhimed je u *Mjerenju kruga* dokazao da je

> *obim kruga tri puta veći od prečnika, i još nešto više, naime za manje od sedmine, ali za više od deset sedamdesetjednina*.

Na taj način Arhimed dolazi do vrijednosti π=3,14.

Leonardo da Vinči je pokušao da problem kvadrature kruga rješi mehanički konstruišući uspravni valjak čija je visina bila jednaka četvrtini prečnika njegove osnove.

Svi pokušaji rješenja ovog problema ostala su bez rezultata. Mnogo kasnije njemački matematičar Lindman (1882) će pokazati da je broj π nemoguće elementarno konstruisati. Takođe, dokazao je da π nije rješenje nijedne algebarske jednačine s cjelobrojnim koeficijentima. Problem kvadrature kruga se svodio na konstrukciju broja π.



Sl. 55.

Poljski matematičar Adam Kohanski (1631-1700) je dao interesantnu konstruktivnu metodu za približno određivanje broja π (sl. 55), kojom se taj broj određuje na četiri tačne decimale.

Konstruiše se kružnica prečnika r sa centrom u tački O. Dalje, u tački C prečnika AC, konstruiše se tangenta na kojoj odredimo tačke D i B tako da je

$$\angle COD=30^0 \quad \text{i} \quad |DB|=3r.$$

Tada se može pokazati da je

$$|AB| = r \cdot 3{,}1415...$$

Za $r=1$ slijedi $|AB| \approx \pi$.

1.3. Trisekcija ugla

Problem trisekcije ugla su nametnule stvarne potrebe; Grci su svoje hramove i mnoge spomenike ukrašavali raznim ornamentima čija je konstrukcija zahtjevala dijeljenje ugla na tri podudarna ugla. Ovaj zadatak potiče od Hipije (4. vijek p.n.e.), a sastoji se u tome da se zadani ugao elementarnom geometrijskom konstrukcijom podijeli na tri jednaka dijela.

Poznato je da se ugao može podijeliti na 2^n podudarnih uglova, gdje je n prirodan broj. Ovaj postupak su pronašli Grci. Oni su znali za trisekciju nekih uglova. Ovaj problem se svodi na rješavanje jednačine trećeg stepena

$$x^3-3ax^2-3x+a=0.$$

Interesantnu ideju rješenja trisekcije ugla dao je Hipija pomoću krive linije koja se naziva *kvadratrisa*. Ovim problemom su se bavili Arhimed, Nikomah, Dekart i drugi.

Gaus je dokazao da se u opštem slučaju ovaj konstruktivni problem ne može riješiti na elementaran način.

Uz trisekciju ugla spomenimo i problem konstrukcije pravilnog mnogougla, tj. podjele kružnice na jednake dijelove. Vavilonci su veoma dobro znali približno podijeliti kružnicu na sedam jednakih dijelova; Grci su elementarno dijelili kružnicu na 2, 3, 4, 5, 6, 8 i 12 jednakih dijelova. Pokušaji da se krug podijeli na n jednakih dijelova, gdje je n proizvoljan prirodan broj, ostali su bez uspjeha. Krajem 18. vijeka Gaus je dokazao da se ovaj problem može riješiti elementarnim geometrijskim konstrukcijama samo za neke vrijednosti broja n.

I poslije dokaza da se navedeni problemi ne mogu riješiti veliki broj amatera je tragao za njihovim rješenjem. Mnoge naučne ustanove su zatrpavane navodnim rješenjima te se dosta vremena trošilo na razmatranja tih neuspjelih pokušaja. Zato je Pariska akademija 1775. godine objavila odluku da više ne ispituje nijedno rješenje problema udvostručavanje kocke, kvadrature kruga i trisekcije ugla kao niti ijednu mašinu koja se “samostalno kreće”. Na taj način su tri klasična geometrijska problema svrstana među probleme kao što je konstrukcija *perpetum mobile*.

1.4. Didonin problem

Prema legendi ovaj problem je nastao za vrijeme osnivanja drevnog grada Kartage na obali Sjeverne Afrike. Feničanka Didona, koja poslije smrti roditelja nije mogla podnositi samovolju brata Pigmaliona, je pobjegla na obalu Sjeverne Afrike. Tamo se dogovorila sa kraljem Jarbasom da od njega kupi onoliko zemljišta koliko se može obuhvatiti kožom jednog bika. Ona je izrezala kožu na tanke kaiševe, povezala im krajeve i uspjela obuhvatiti zemljište na kojem je kasnije izgrađena Kartagina.

U savremenoj matematičkoj formulaciji Didonin problem glasi:

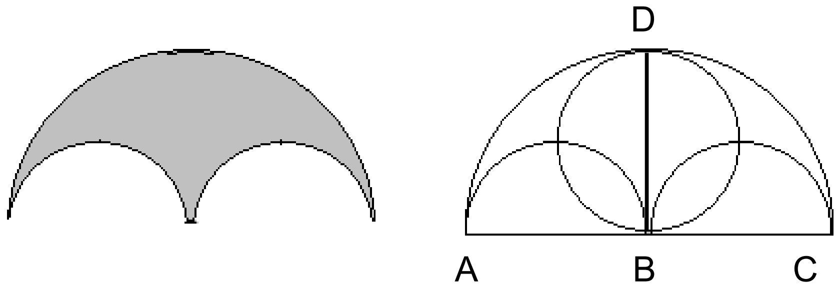
Između svih zatvorenih krivih linija u ravni, koje imaju jednak zadan obim, naći onu koja ograničava najveću površinu.

Ovo je tzv. izoperimetrijski problem, koji se u matematici javlja u opštijem obliku: uz zadanu krivu zahtjeva se da se odredi druga kriva date dužine tako da površina između ove i date krive bude što je moguće veća.

Ovaj problem su rješavali Ojler i Štajner (19. vijek). Ojler je pokazao da od svih krivih u ravni koje imaju jednak obim najveću površinu ograničava kružnica.

1.5. Površina "krznarskog noža"

Krznarski nož predstavlja figuru ograničenu s tri polukruga, čiji su centri na jednoj pravi, i koji se dodiruju (slika 56).



Sl. 56.

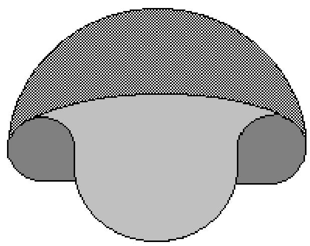
Arhimed dokazuje da je površina P krznarskog noža jednaka površini kruga prečnika BD, upisanog u polukrug prečnika AC:

$$P = \pi\left(\frac{|DB|}{2}\right)^2$$

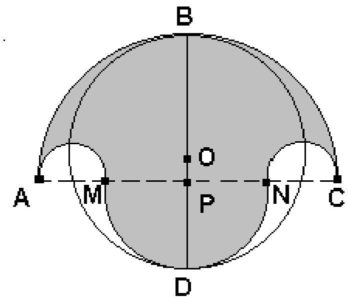
1.6. Površina "rimskog slanika"

Rimski slanik ima oblik polulopte sa kružnim žlijebom i poklopcem u obliku polulopte (sl. 57). Osni presjek ovog slanika, sl. 58, Arhimed naziva "rimski slanik" i dokazuje da je njegova površina P jednaka površini kruga prečnika DB:

$$P = \pi\left(\frac{|DB|}{2}\right)^2.$$



Sl. 57.

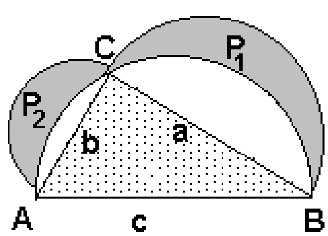


Sl. 58.

1.7. Hipokratovi mjeseci

Grčki matematičar Hipokrat je živio na ostrvu Hiosu u drugoj polovini 5. vijeka p.n.e. Smatra se da je napisao prvu knjigu iz geometrije. Pokušao je da nađe tačan obrazac za izračunavanje površine kruga. U tome nije potpuno uspio, jer nije poznavao prirodu broja π. Njemu se pripisuje sljedeći problem.

Ako se nad stranicama pravouglog trougla hipotenuze c, i kateta a i b konstruišu polukružnice, dobiju se površi P_1 i P_2 koje nazivamo Hipokratovi mjeseci, slika 59.



Sl. 59. Hipokratovi mjeseci

Zbir površina Hipokratovih mjeseca jednaka je površini pravouglog trougla ABC:

$$P_1 + P_2 = \frac{ab}{2}$$

Dobijena jednakost je interesantna, jer u njoj se pojavljuje broj π.

1.8. Apolonijev problem

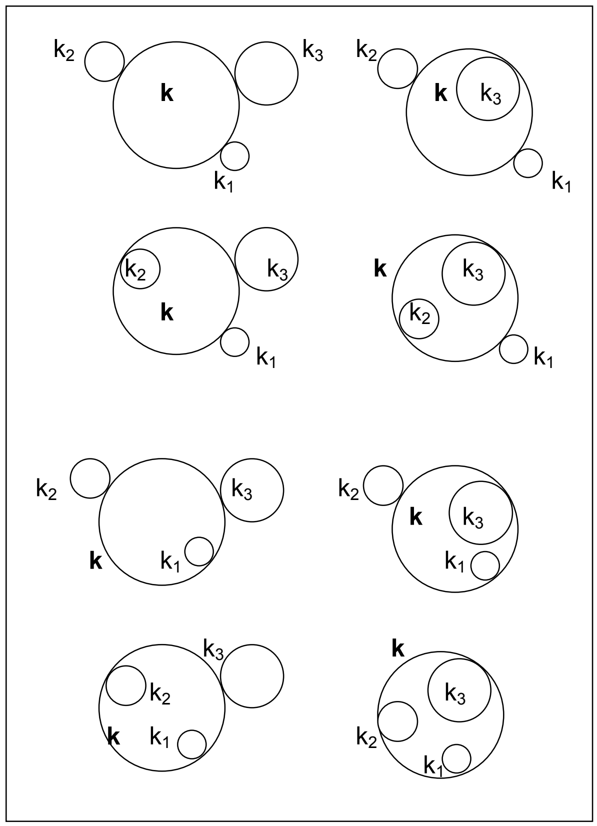
Konstruisati kružnicu koja dodiruje tri date kružnice.

Ovaj klasični zadatak o dodiru kružnica, zove se *Apolonijev problem*. Zadane kružnice k_1, k_2 i k_3 u odnosu prema traženoj kružnici k mogu biti u osam različitih položaja. Ako sa v i u označimo da kružnice k_1, k_2 i k_3 , redom, diraju traženu kružnicu k *izvana,* odnosno *iznutra*, onda postoje ove mogućnosti:

k_1	v	v	v	v	u	u	u	u
k_2	v	v	u	u	v	v	u	u
k_3	v	u	v	u	v	u	v	u

Apolonijev rad o dodiru kružnica nije sačuvan. O njemu se zna zahvaljujući grčkom matematičaru Papusu. Vijet je na osnovu njegovih komentara rekonstruisao i objavio ovo Apolonijevo djelo.

Skica rješenja mogućih varijanti zadatka data je na slici 60.



Sl. 60.

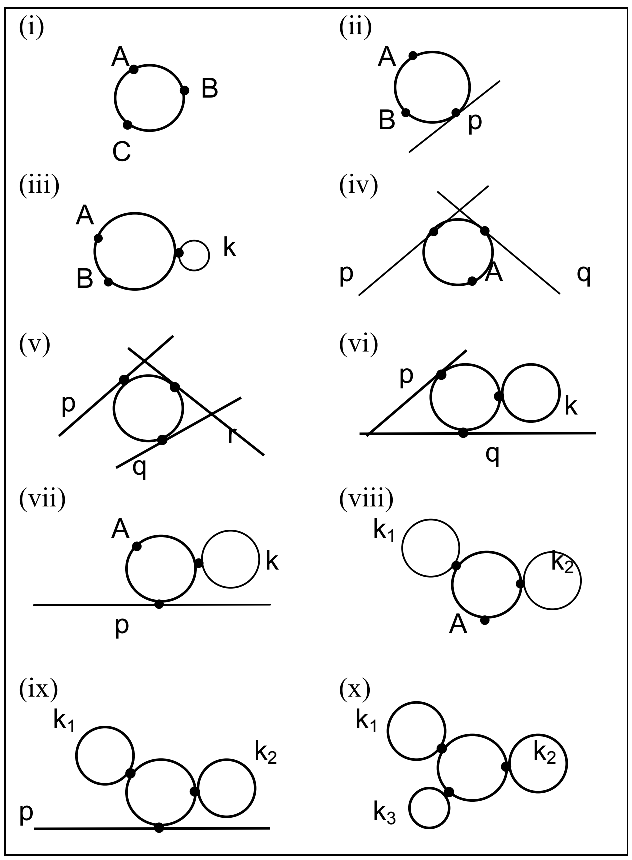
Ako poluprečnik kružnice smanjujemo tako da on teži nuli, onda možemo smatrati da je tačka specijalni slučaj kružnice. Takođe, ako poluprečnik kružnice povećavamo do beskonačno velike vrijednosti, onda pravu možemo interpretirati kao kružnicu sa beskonačno velikim poluprečnikom.

Prema naprijed izloženom može se reći da je Apolonijev problem opšti zadatak, a njegovi specijalni slučajevi nastaju ako pojedine date kružnice zamijenimo tačkom odnosno pravom. Tada zadatak glasi:

Konstruisati kružnicu koja dodiruje:

(i) *tri tačke*;
(ii) *dvije tačke i pravu*;
(iii) *dvije tačke i kružnicu*;
(iv) *dvije prave i tačku*;
(v) *tri prave*;
(vi) *dvije prave i krug*;
(vii) *kružnicu, pravu i tačku*;
(viii) *dva kruga i tačku*;
(ix) *dvije kružnice i pravu*;
(x) *tri kruga*.

Skica rješenja navedenog zadatka je izložena na slici 61.

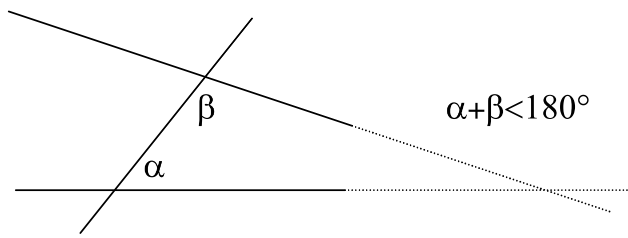


Sl. 61.

1.9. Euklidov peti postulat

Euklidov peti postulat (prva knjiga *Elemenata*) iskazan je složenije u odnosu na četiri njegova prethodna postulata:

> "*Neka se pretpostavi ... da će se, ako jedna prava u preseku sa drugim dvema obrazuje sa iste strane dva unutrašnja ugla čiji je zbir manji od dva prava ugla, te dve prave, beskrajno produžene, seći i to sa one strane sa koje su ovi uglovi manji od dva prava*."(sl. 62)



Sl. 62. Euklidov peti postulat

Sama formulacija ovog postulata kao i činjenica da ga je Euklid po prvi put primjenio u 29. teoremi prve knjige *Elemenata* navela je mnoge matematičare na ideju da se zapravo radi o teoremi, koju treba dokazati. Traganje za dokazom petog postulata trajalo je preko dvije hiljade godina. Mnogi matematički umovi potrošili su mjesece, godine pa i decenije u nastojanjima da ga dokažu. Od Grka to su, na primjer, bili: Ptolemej (85-165), Simplicije (6. vijek), Aganis (6. vijek), Posidonije (oko 100. g. p. n. e.) i Proklo (5. vijek).

Prvi pokušaji dokaza petog postulata od strane arapskih matematičara potiču iz 9. vijeka. Oni su, polazeći od petog postulata kao apsolutno istinite tvrdnje, iskazali mnoge njemu ekvivalentne stavove. Svaki taj ekvivalent je posredno ili neposredno doprinosio da se dublje pronikne u suštinu i značaj samog petog postulata.

Ni evropski matematičari nisu zaostajali u pokušaju dokaza petog postulata. Među njima su, pored ostalih, bili Farkaš Boljaji, Valis, Sakeri, Lambert i Ležandr. Tek sa radovima matematičara Gausa, Janoša Boljaija i Lobačevskog problem petog postulata je riješen.

Ruski matematičar Lobačevski je umjesto Euklidovog petog postulata uveo aksiomu:

Kroz datu tačku van date prave u istoj ravni mogu se povući dvije prave koje ne sijeku datu pravu

i pokazao da se u tom slučaju dobije jedna sasvim nova geometrija, u kojoj nema protivrječnosti i koja je kao i euklidska geometrija istinita. Ovu geometriju Gaus naziva *neeuklidska geometrija*.

Mađarski matematičar Farkaš Boljai je tragajući za dokazom petog postulata sve više bio uvjeren da je taj "nezajažljivi ambis u stanju, vjerovatno, da proguta hiljade takvih titana kao što je Njutn, a ipak da se na Zemlji ne dođe do razjašnjenja". Zato je savjetovao sina Janoša da, ako želi mir i spokojstvo, ne pokušava dokazati peti postulat.

On ga nije poslušao te traga za rješenjem ovog problema. Rezultat toga je otkriće nove geometrije, do kojeg je došao potpuno nezavisno od Lobačevskog. Priznanje za svoj rad je, kao i Lobačevski, dobio poslije smrti.

2. PROBLEMI IZ TEORIJE BROJEVA

2.1. Brojnost skupa prostih brojeva

Jedan od prvih problema iz teorije brojeva javio se još u doba starih Grka. On se odnosio na pitanje da li prostih brojeva ima konačno ili beskonačno mnogo. Euklid je ovaj problem izložio u 20. stavu devete knjige *Elemenata*, koji glasi:

> *Prostih brojeva je više od svake određene množine prostih brojeva.*

Današnja formulacija ove teoreme glasi:

> *Skup prostih brojeva je beskonačan.*

Dokazujući ovu tvrdnju Euklid polazi od tri prosta broja i pri tome se služi dužima. Njegov način zaključivanja primjenjuje se i danas pri generalizaciji ove teoreme.

Smatra se da ova teorema potiče iz Platonove škole.

2.2. Formula za određivanje prostih brojeva

Vidjeli smo da se pomoću *Eratostenovog sita* mogu odrediti prosti brojevi. Mnogi matematičari su tragali za formulom koja će davati samo proste brojeve. Prvi takav pokušaj pripisuje se Fermau, koji je 1640. godine tvrdio da su svi brojevi oblika

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \text{ , za } n=0,1,2,3 \text{ i } 4,$$

prosti brojevi. Na osnovu toga je zaključio da izraz F_n daje proste brojeve za svaki prirodan broj n.

Sto godina kasnije Ojler je dokazao da je za $n=5$ broj $F_5 = 2^{2^5} + 1$ složen, jer se može prikazati kao proizvod $641 \cdot 6700417$. Kasnije se pokazalo da su i brojevi F_6 , F_7 i F_8 složeni.

Ojler je pokazao da je vrijednost polinoma x^2+x+41, za $x=0,1,2,...,39$, prost broj.

Francuski matematičar Mersen (1588-1648) je tvrdio da su brojevi oblika 2^m-1, gdje je $m = 1,2,3,5,7$, prosti.

Ovdje su navedeni samo neki od pokušaja da se odrede formule koje daju samo proste brojeve. Problem je do danas ostao neriješen. Pa ipak zanimanja mnogih matematičara za ovaj problem dovela su do novih saznanja iz teorije brojeva. Tako, na primjer, ruski matematičar Čebišev je dokazo da između prirodnog broja n i njegove dvostruke vrijednosti $2n$ ima bar jedan prost broj.

2.3. Mersenovi brojevi

Brojevi $M_p=2^p-1$, gdje je p prost broj, nazivaju se *Mersenovi brojevi*. Oni su od posebnog značaja, jer nalaze primjenu u drugim oblastima matematike, Mersen ih je izučavao u vezi sa savršenim brojevima. On je tvrdio da su 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 i 257 jedini prosti brojevi, ne veći od 257, za koje je broj 2^p-1 prost.

Ova tvrdnja je pogrešna. Pokazalo se da su neki od navedenih brojeva složeni. Takođe, Mersenova lista je proširena sa prostim brojevima M_{89} i M_{107}.

Do danas nije dokazano da li Mersenovih brojeva ima konačno ili beskonačno mnogo; do početka 2000. godine bilo je poznato 38 Mersenovih brojeva. Najveći poznati prosti brojevi su zapravo Mersenovi brojevi.

Mersenove brojeve možemo definisati kao prirodne brojeve koji se u binarnom sistemu brojeva zapisuju samo sa cifrom 1, pri čemu je i broj cifara prost broj, na primjer:
$2^5-1=31; \qquad 31_{(10)}=11111_{(2)}$

2.4. Savršeni brojevi

Broj koji je jednak zbiru svih svojih pravih djelilaca naziva se savršeni broj. Matematičare je interesovalo

Da li ima beskonačno mnogo savršenih brojeva i postoji li ijedan neparan savršen broj?

Do danas odgovor na ovo pitanje nije dat. Do kraja 1999. godine je otkriveno svega 38 savršenih brojeva. Problem savršenih brojeva, koji se smatra jednim od najstarijih problema iz teorije brojeva, ostaje i dalje neriješen.

2.5. Problem brojeva blizanaca

Dva prosta broja koji se razlikuju za 2 nazivaju se *blizancima*. *Brojevi blizanci* su, na primjer,

3 i 5; 5 i 7, 11 i 13 itd.

Problem brojeva blizanaca glasi:

Da li brojeva blizanaca ima konačno ili beskonačno mnogo?

Do danas nije pronađen odgovor na ovo pitanje.

2.6. Fermaova velika teorema

Ferma je čitajući Diofantovu *Aritmetiku* na njenim marginama zapisivao bilješke koje su se odnosile na probleme iz teorije brojeva. To su uglavnom bili stavovi bez dokaza, koji će kasnije biti potvrđeni od strane drugih matematičara.

Jedan njegov komentar na marginama se može formulisati kao sljedeće tvrđenje:

Ne postoje prirodni brojevi x, y, z *i* n *takvi da za* $n>2$ *važi* $x^n+y^n=z^n$.

Ovaj stav je poznat pod imenom *Fermaova velika teorema*. U Fermaovoj zaostavštini nije pronađen njen dokaz iako je on na stranicama Diofantove *Aritmetike* zapisao da je našao izvanredan dokaz te da ga ne može izložiti, jer na marginama nema dovoljno mjesta. U posljednjih 350 godina mnogi matematičari su pokušavali da dokažu Fermaovu veliku teoremu; u tom nastojanju se došlo do važnih i interesantnih rezultata iz teorije brojeva.

Dokaz ove teoreme za $n=4$, dali su Ferma i Ojler, koji je dokazao tvrdnju i za $n=3$. Ležandr je dokazao tvrdnju za $n=5$ i $n=14$, a Dirihle za $n=5$ i $n=7$.

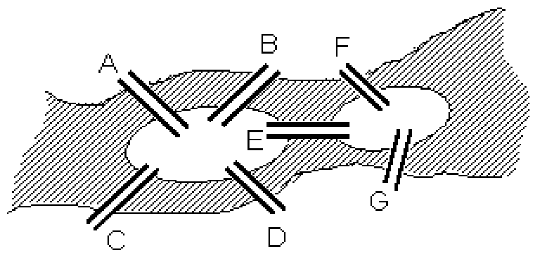
Konačno je Fermaovu veliku teoremu riješio Endrju Vajls, 1994. godine.

Za rješenje Fermaove velike teoreme nagrade su raspisivale Pariska (1818) i Belgijska akademija (1883); Naučno društvo iz Getingena je 1908. godine ponudilo nagradu od 100 000 maraka koju je zavještao Nijemac Volfskel.

3. TOPOLOŠKI PROBLEMI

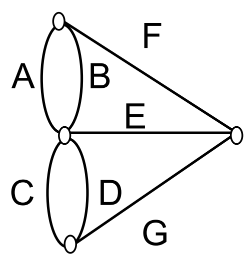
3.1. Keningzberški mostovi

Godine 1736. građani Keningzberga, grada koji je smješten na obalama i ostrvima rijeke Pregel (sl. 63), postavili su pitanje da li je moguće, šetajući gradom, preći preko svih sedam mostova tako da se nijedan od njih ne pređe više od jednom.



Sl. 63. Raspored mostova na rijeci Pregel

Za ovaj problem se pored ostalih zainteresovao i Ojler. Označio je mostove linijama, a ostrva i obale kružićima (čvorovima) i sliku 63 je zamijenio grafom prikazanim na slici 64. Na taj način problem Keningzberških mostova je sveo na zadatak:



Sl. 64.

> *Može li se graf sa slike nacrtati "jednim potezom", tj. tako da se olovka ne podiže s papira i ne prelazi dva puta po jednoj liniji.*

Odgovor na postavljeno pitanje je negativan. Povezan graf uz zadane uslove može se nacrtati "jednim potezom" samo ako ima dva ili nijedan čvor u kojem se sastaje neparan broj linija. Kako se u ovom grafu u sva četiri čvora sastaje neparan broj linija to se on ne može nacrtati "jednim potezom". Dakle, ne može se šetajući po Kenigzbergu preći preko svih sedam mostova tako da se nijedan od njih ne pređe više od jedanput.

3.2. Problem četiri boje

Štamparima je poznato da se svaka geografska karta može odštampati sa četiri boje tako da se dvije zemlje sa zajedničkom granicom oboje različitim bojama. Matematičari de Morgan i Keli postavili su 1850. godine zanimljiv problem:

> *Može li se svaka geografska karta u ravni ili na sferi obojiti s najviše četiri boje tako da zemlje sa zajedničkom granicom ne budu obojene istom bojom.*

Ovaj problem je imao veliki značaj na dalji razvoj teorije grafova. Iako jednostavno formulisan, on je veoma težak. Bilo je bezbroj pokušaja da se riješi. 1890. godine Hivud je dokazao da je uvijek dovoljno pet boja da bi se bilo koja politička karta država obojila tako da države sa zajedničkom granicom ne budu obojene istom bojo. Tek 1976. godine Apel i Haken su dokazali da je, uz zadane uslove, za bojenje svake geografske karte u ravni ili na sferi potrebne najmanje četiri boje. Za dokaz im je bilo potrebno oko 1200 časova rada kompjutera.

Problem Kenigzberških mostova kao i problem četiri boje po svome sadržaju pripadaju topologiji. Ovi problemi su svojim postojanjem i načinom njihovog rješavanja uticali na pojavu i razvoj jedne nove matematičke discipline koja se zove *teorija grafova*.

Literatura

1. **David Eugene Smith**: History of mathematics I, New York 1958.
2. **David Eugene Smith**: History of mathematics II, New York 1958.
3. **M. Ruth Eagle**: Exploring mathetatics through history, Cambridge University Press, Cambridge 1995.
4. **Дирк Ј. Стројк**: Кратак преглед историје математике, Завод за издавање уџбеника, Београд 1969.
5. **Miloš Radojčić**: Opšta matematika, Naučna knjiga, Beograd 1950.
6. **Željko Marković**: Uvod u višu analizu I i II, Zagreb 1961-1965.
7. **P. A. Youschevitch**: Les mathematique arabes (VIII^{e}-XV^{e} siecles), Libraire philosophique, Paris, 1976.
8. **Г. И. Глейзер**: История математики в школе; VII-VIII классы, Просвещенние, Москва 1982.
9. **Г. Вилейтнер**: История математики од Декарта до средины XIX столетия, Москва, 1960.
10. **Г. А. Ковриженко**: Системы счисления и двоичная аритметика, Киев, 1984.
11. **С. И. Олехник и др:** Старинные заниматетелыызадачи. Наука, Москва, 1989.
12. **Еуклидови елементи** (превео и коментар дао Антон Билимовић), Српска академија наука, Београд 1949-58.
13. **Ernest Stipanić**: У свету бројева и фигура, Београд 1967.
14. **Franjo Hrabak**: U svijetu matematičkih pojmova i simbola, Školska knjiga, Zagreb 1960.
15. **Milenko N. Nikolić**: Istorijska i naučna evolucija realnog broja i njen pedagoški tretman, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd 1966.
16. **Ranko Risojević**: Slavni arapski matematičari, Nolit, Beograd 1988.
17. **Š. Znam i dr**: Pogled u povijest matematike, Tehnička knjiga, Zagreb 1989.
18. **Lanslot Hogben**: Brojevi i stvarnost, Novo poglavlje, Beograd 1953.
19. **Ivan Bandić**: Kako se nekad brojalo i računalo, Matica Srpska, Novi Sad 1949.
20. **Stjepan Škarica**: Kvadratura kruga, Školska knjiga, Zagreb 1951.
21. **Boris Čekrlija**: Peti postulat (specijalistički rad) Prirodno-matematički fakultet, Beograd 1987.
22. **V. Trbuhović**: Geometrija u prednaučnom periodu, Prisutna prošlost, Matematički institut, Beograd 1991.
23. **Časopisi**: Математика в школе, Квант, Matematičko-fizički list, Matematički list, Nastava matematike, Matematika i dr.

POPIS IMENA

P

R

S

Š

T

V

Z

Ž

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна и универзитетска библиотека
Републике Српске, Бања Лука

51(076.1)(091)

ЧЕКРЛИЈА, Борис

Vremeplovom kroz matematiku / Boris Čekrlija. – 2. izd. – Laktaši : Grafomark, 2000
(Laktaši: Grafomark). – 173 str.: граф. прикази; 25 cm

Tiraž 1000. – Стр. 3: Predgovor / (аутор). – Библиографија: стр. 170. – Регистар.

ISBN 86-82875-28-4

П.О.: МАТЕМАТИКА- Вјежбе, МАТЕМАТИКА – Историја

MFN=000405

IZVODI IZ RECENZIJA

Autor je pokazao široko poznavanje materije o kojoj piše. Stil kojim je knjiga pisana omogućava da se uz potrebnu matematičku strogost istaknu najinteresantniji aspekti istorijske prirode. Značajno je da se pojavljuju ovakva izdanja koja mogu pomoći da se kod učenika razvije i održi interes za matematiku. Smatram da će knjiga privući pažnju čitalaca i da će popuniti izvjesnu prazninu koja kod nas postoji kada se radi o izdavanju popularnih matematičkih knjiga.

dr Ratko Tošić

Cijela knjiga se može shvatiti kao roman o matematici ili kao zbirka izuzetno zanimljivih priča o matematičkim pojmovima. Može se reći da je ponuđeni rukopis, pre svega odlična ideja, a onda i kvalitetno realizovana ideja. Knjiga *Vremeplovom kroz matematiku* biće od izvanredne koristi i za nastavnike i za učenike, i to ne samo za one koji imaju izražene sklonosti prema matematici, već i za one koji nisu njeni ljubitelji.

mr Vladimir Stojanović

Boris Čekrlija je rođen 1948. godine u Banjoj Luci, gdje je završio osnovnu školu i gimnaziju. Diplomirao je na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, odsjek za matematiku i fiziku. Poslijediplomske specijalističke studije završio je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu. Do 1985. godine radi kao srednjoškolski profesor matematike, a zatim kao prosvjetni savjetnik, odnosno školski nadzornik za matematiku. Objavio je više stručnih radova iz matematike, metodike nastave matematike te istorije i metodologije matematike.

IZVODI IZ RECENZIJA

Autor je pokazao široko poznavanje materije o kojoj piše. Stil kojim je knjiga pisana omogućava da se uz potrebnu matematičku strogost istaknu najinteresantniji aspekti istorijske prirode. Značajno je da se pojavljuju ovakva izdanja koja mogu pomoći da se kod učenika razvije i održi interes za matematiku. Smatram da će knjiga privući pažnju čitalaca i da će popuniti izvjesnu prazninu koja kod nas postoji kada se radi o izdavanju popularnih matematičkih knjiga.

dr Ratko Tošić

Cijela knjiga se može shvatiti kao roman o matematici ili kao zbirka izuzetno zanimljivih priča o matematičkim pojmovima. Može se reći da je ponuđeni rukopis, pre svega odlična ideja, a onda i kvalitetno realizovana ideja. Knjiga *Vremeplovom kroz matematiku* biće od izvanredne koristi i za nastavnike i za učenike, i to ne samo za one koji imaju izražene sklonosti prema matematici, veći za one koji nisu njeni ljubitelji.

mr Vladimir Stojanović

Boris Čekrlija je rođen 1948. godine u Banjoj Luci, gdje je završio osnovnu školu i gimnaziju. Diplomirao je na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, odsjek za matematiku i fiziku. Poslijediplomske specijalističke studije završio je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu. Do 1985. godine radi kao srednjoškolski profesor matematike, a zatim kao prosvjetni savjetnik, odnosno školski nadzornik za matematiku. Objavio je više stručnih radova iz matematike, metodike nastave matematike te istorije i metodologije matematike.